TEMA 1

Conceptos previos

Contenidos:

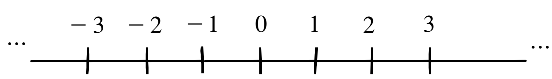
1. Números reales. La recta real

Los diferentes conjuntos numéricos han surgido por necesidades reales que el hombre ha debido de afrontar a lo largo de la historia. La primera necesidad numérica la tuvieron nuestros antepasados como consecuencia del recuento de objetos, animales y otras pertenencias; de esta forma, surgieron los que hoy denominamos números naturales.

Definición 1. *(Números naturales)*

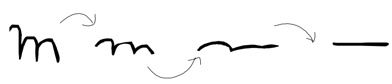
El conjunto de los números naturales, que se denota por $\mathbb{N}$*, está formado por los números* $1,2,3,4,\ldots\ldots$

Con este conjunto numérico se podían realizar sumas y productos de números naturales, ya que se trataba de operaciones bien definidas: dados dos números naturales, la suma o producto de éstos siempre da como resultado otro número natural. Sin embargo, las diferentes operaciones comerciales de compra-venta necesitaron construir una nueva operación: la diferencia. Esta operación no presentaba inicialmente ningún problema porque no era lógico gastar más de lo que uno poseía; sin embargo, las operaciones mercantiles sí provocaron la necesidad de definir diferencias entre dos números naturales cualesquiera. Esta circunstancia propició la necesidad de introducir los números naturales negativos. Aunque los primeros en utilizar los números negativos fueron los chinos, hace ya más de 25 siglos, nuestra civilización occidental se resistió de tal forma a manejar de manera natural las cantidades negativas que aún en el siglo XVII, Descartes (entre otros) afirmaba que “cuando una ecuación tenía solución negativa, la solución era falsa”. Los números negativos adquirieron su verdadera naturaleza cuando se empezaron a visualizar en una recta



El signo menos (procedente de una “m” deformada, “minus”) se empleó por primera vez como distintivo de los números negativos en la Alemania del siglo XVI.

Evolución del signo menos



La aparición de los números naturales negativos y el cero junto a los números naturales conformaron el conjunto de los números enteros.

Definición 2. *(Números enteros)*

El conjunto de los números enteros, que se representa con la letra $\mathbb{Z}$*, está formado por los números naturales* $(\mathbb{N})$*, el cero* (0) *y los números naturales negativos* $-1,-2,-3,-4,\ldots$.

Pero nuevamente surgieron nuevas necesidades. Efectivamente, con la complejidad del comercio y de la sociedad aparecieron cuestiones relacionadas con los repartos, distribuciones de herencias, etc., lo que condujo de forma inevitable al concepto de fracción. Las fracciones ya fueron consideradas de manera conceptual por los egipcios en el siglo XX a.C. y más tarde la comunidad pitagórica encontró numerosas relaciones que vinculaban la música con los números fraccionarios a través de los armónicos. En realidad, el problema viene motivado por la insuficiencia del conjunto de los números enteros para encontrar soluciones a ecuaciones como $3x = 2$. El conjunto de los números fraccionarios dio lugar al conjunto de los números racionales, que se definen de la siguiente forma:

Definición 3. *(Números racionales)*

Diremos que a *es un número racional* $(a \in \mathbb{Q})$ *si se puede expresar como cociente de dos números enteros, es decir, si existen* $p, q \in \mathbb{Z}$ *tales que* $a = p / q$*,* $q \neq 0$.

Este conjunto de números tiene una peculiaridad especial, y es que un mismo número racional se puede expresar por medio de infinitos números fraccionarios, todos ellos equivalentes entre si. Así, por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = \frac{8}{6} = \frac{16}{12} = \frac{32}{24} = \frac{64}{28} = \ldots.$$

De entre todas las fracciones que representan un número racional, existe una que tiene la propiedad de ser irreducible, es decir, está formada por dos números primos entre si, en el ejemplo anterior $\frac{4}{3}$.

Cuando efectuamos la división entre dos números enteros en ocasiones podemos obtener o bien un número decimal exacto (con un número finito de cifras decimales) o bien un número decimal periódico (con un número infinito de cifras decimales, generadas por la repetición periódica de una cantidad finita de ellas). Esta circunstancia nos permite asegurar la siguiente propiedad:

Proposición 1. *Todo número racional se puede expresar en forma decimal exacta o periódica.*

Por ejemplo, los números racionales $\frac{10}{3};\frac{15}{3};\frac{2454}{990};\frac{7}{2}$ se pueden expresar de forma decimal como:

$$\frac{10}{3} = 3.3333\ldots\ldots = 3.\widehat{3} \text{ (número decimal periódico)}$$

$$\frac{15}{5} = 3 \text{ (número decimal exacto)}$$

$$\frac{2454}{990} = 2.478787878\ldots = 2.4\widehat{78} \text{ (número decimal periódico mixto)}$$

$$\frac{7}{2} = 3.5 \text{ (número decimal exacto)}$$

Como acabamos de observar en este ejemplo, la expresión decimal de una fracción puede ser de dos tipos:

* Expresión decimal exacta: 3, 3.5
* Expresión decimal periódica:
  - $3.\widehat{3}$: expresión decimal periódica pura
  - $2.4\widehat{78}$: expresión decimal periódica mixta

Con la construcción de los números racionales se pensó que cualquier longitud era susceptible de ser medida utilizando este tipo de números. Sin embargo, incluso en la Grecia clásica se descubrieron las denominadas cantidades ”inconmensurables”, es decir, cantidades que no podían expresarse por medio de fracciones o lo que es lo mismo, cantidades cuya expresión decimal no era ni exacta ni periódica. Así pues, se introdujo un tercer tipo de expresiones decimales: las que no eran ni decimales exactas ni decimales periódicas.

Uno de los ejemplos clásicos de estas “cantidades inconmensurables” es el número π, cuya expresión decimal es $3.14161821\ldots$ y que debe su nombre a la comunidad pitagórica. Otro ejemplo clásico es el número $\sqrt{2}$. Efectivamente, la expresión decimal de $\sqrt{2}$ es 1.414213562373095048801…. que a primera vista no tiene el aspecto de ser una expresión decimal periódica y mucho menos una expresión decimal exacta. Pero para cerciorarnos del hecho de que $\sqrt{2}$ es una de estas cantidades inconmensurables veamos una demostración que nos garantiza que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Proposición 2. $\sqrt{2}$ *no es un número racional.*

Demostración. Para demostrar esta proposición utilizaremos el método de reducción al absurdo, es decir, partiendo de la hipótesis de que $\sqrt{2}$ es un número racional llegaremos a un resultado contradictorio con esa hipótesis de partida.

En efecto, supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Esto quiere decir que existirán $p,q \in \mathbb{Z}$ números primos (sin factores comunes) tales que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos que $\frac{p^2}{q^2} = 2$, es decir: $p^2 = 2q^2$. Si p es impar, esta igualdad carece de sentido, dado que el cuadrado de un número impar es otro número impar, y $2q^2$ ha de ser necesariamente par. Deducimos, por lo tanto que p necesariamente será un número par, en cuyo caso $p = 2k$ para cierto entero k. En consecuencia, $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$, es decir, $q^2 = 2k^2$, de donde se deduce que q también tiene que ser par. Así pues p y q han de ser pares, lo cual es contradictorio con el hecho que imponíamos al principio de que p y q no tenían factores en común. Por tanto $\sqrt{2}$ no es un número racional.

□

Estas cantidades inconmensurables dieron lugar a los denominados números irracionales. En este caso, la insuficiencia de $\mathbb{Q}$ para resolver una ecuación tan sencilla como $x^2 = 2$ propició la aparición de estos números irracionales.

Definición 4. *(Números irracionales)*

Diremos que p es un número irracional si su expresión decimal no es periódica ni exacta. El conjunto de los número irracionales se suele denotar por el símbolo $\mathbb{I}$.

A partir del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales se construyó un nuevo conjunto: el conjunto de los números reales.

Definición 5. *(Número reales)*

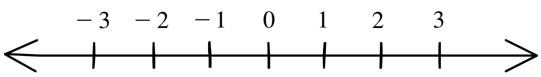
Diremos que p es un número real $(p \in \mathbb{R})$ *si p es o bien un número racional* $(p \in \mathbb{Q})$ *o bien es un número irracional* $(p \in \mathbb{I})$. *De esta forma, podemos afirmar que* $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

A lo largo de esta sección hemos podido constatar las sucesivas ampliaciones de los conjuntos numéricos que han tenido lugar a lo largo de la historia como consecuencia de las necesidades que el hombre ha ido teniendo para medir las magnitudes. De esta forma podemos resumir la siguiente cadena de inclusiones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Tal como observamos en esta cadena conjuntista, el conjunto de los números naturales es el origen de los números, situación que ha provocado afirmaciones como la de L. Kronecker: "Dios creó los números naturales. El resto es obra del hombre".

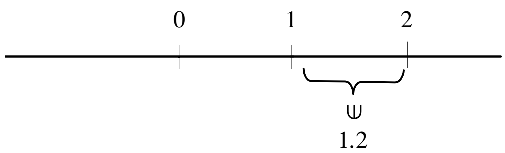
La "natural" ordenación de los números naturales puede extenderse al resto de conjuntos. En concreto, en el conjunto de los números reales podemos establecer una relación de orden $\leq$ "menor o igual" de la siguiente forma:

$$\textit{Dados } a,b \in \mathbb{R} \textit{ diremos que } a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$$

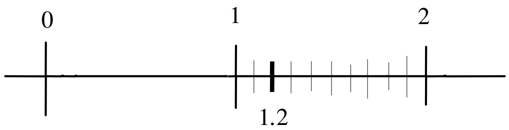
Teniendo en cuenta esta ordenación, si dibujamos una recta sobre la que marcamos con "0" un punto cualquiera al que llamaremos *origen* y con "1" otro punto al que llamaremos *unidad*, es posible representar cualquier número real sobre dicha recta situando a la derecha del "0" los números reales positivos y a su izquierda los números reales negativos.



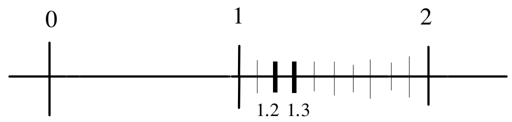
Para representar cualquier número real tan sólo hay que especificar el lugar que ocupa cada número en la recta, llamada *recta real*. Por ejemplo, si deseamos representar el número 1.2 basta considerar que $1 \leq 1.2 \leq 2$



de tal forma que si dividimos la distancia entre 1 y 2 en 10 partes iguales, entonces 1.2 se sitúa en la segunda.



Si ahora deseamos representar 1.23, teniendo en cuenta que $1.2 \leq 1.23 \leq 1.3$, si representamos 1.2 y 1.3



y dividimos ahora el segmento entre 1.2 y 1.3 en 10 partes iguales, situaremos 1.23 en la tercera. De hecho, se puede asegurar que a todo número real le corresponde un único lugar en la recta real, representación que nos permite visualizar la posición que ocupa cualquier número real, sea éste racional o irracional.

Esta consideración nos permite plantearnos dos cuestiones muy interesantes: ¿Cuántos números racionales hay entre dos números reales cualquiera? ¿y cuántos irracionales?. La respuesta a ambas preguntas es la misma: entre dos números reales a y b distintos cualesquiera, existen infinitos racionales e irracionales.

Por ejemplo, entre 1.41 y $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$ están todos los racionales de la forma 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, … y entre $\sqrt{2}$ y 1.5 están los irracionales $1.5 - \frac{\sqrt{2}}{100}$, $1.5 - \frac{\sqrt{2}}{101}$, $1.5 - \frac{\sqrt{2}}{103}$, $1.5 - \frac{\sqrt{2}}{104}$, …

2. Desigualdades. Intervalos de la recta real

En el apartado anterior se ha comentado que la relación “ $\le$ ” establece una relación de orden en el conjunto de los números reales. Esta relación de orden “ $\le$ ” cumple algunas propiedades importantes en relación a la suma, el producto y el cociente de números reales.

Proposición 3.

(i) *Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta un mismo número se obtiene otra desigualdad en el mismo sentido, es decir:*

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a \le b \Leftrightarrow a \pm c \le b \pm c$$

(ii) *Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un número real mayor que cero, se obtiene una desigualdad del mismo sentido, es decir:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \text{ y } \forall c \in \mathbb{R},\ c > 0: \quad a \le b \Leftrightarrow a \cdot c \le b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$$

(iii) *Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por un número real menor que cero, se obtiene una desigualdad en sentido contrario, es decir:*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \text{ y } \forall c \in \mathbb{R},\ \mathrm{c} < 0: \quad a \le b \Leftrightarrow a \cdot c \ge b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$$

Estas propiedades son fundamentales a la hora de resolver desigualdades. Por ejemplo, si deseamos resolver una inecuación, esto es, hallar los números x que cumplen la desigualdad:

$$\frac{3x+1}{2} \ge \frac{5x+2}{3}$$

procedemos de la siguiente forma:

1) Multiplicando por 6 (que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3) queda

$$\frac{6(3x+1)}{2} \ge \frac{6(5x+2)}{3}$$

es decir $3 \cdot (3x+1) \ge 2 \cdot (5x+2)$, o equivalentemente, $9x + 3 \ge 10x + 4$

2) Restando 4 a ambos miembros resulta

$$9x + 3 - 4 \ge 10 \quad \to \quad 9x - 1 \ge 10x$$

3) Restando ahora $9x$ se obtiene

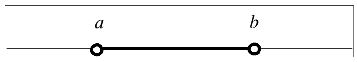
$$-1 \ge 10x - 9x$$

de donde $-1 \ge x$, por lo que la solución buscada es el conjunto de los números reales $x \in \mathbb{R}$ tales que $x \le -1$

La relación de orden permite definir algunos subconjuntos de números reales que tienen una interpretación geométrica muy sencilla: los intervalos. Los intervalos de la recta real están determinados por dos números reales y están formados por los números comprendidos entre ambos. Según se consideren los extremos incluidos o no en el intervalo se tienen los siguientes tipos de intervalos:

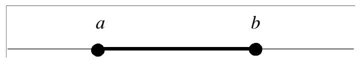
a) intervalos abiertos:

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$



b) intervalos cerrados:

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/ a \le x \le b\}$



c) intervalos abiertos por la derecha y cerrados por la izquierda:

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \le x < b\}$

d) intervalos abiertos por la izquierda y cerrados por la derecha:

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \le b\}$

Si consideramos los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ como elementos que pueden determinar intervalos de la recta real (estos símbolos no representan un número real; son una manera de representar el concepto del “infinito positivo” y del “infinito negativo”) entonces podríamos considerar semirrectas, determinadas por un número y formadas por todos los números mayores o menores que él. Según que el número pertenezca o no a la semirrecta, se tienen distintos tipos de semirrectas o intervalos infinitos.

a) semirrecta positiva:

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \ge a\}$

b) semirrecta negativa:

$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \le a\}$

c) semirrecta positiva abierta:

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$

d) semirrecta negativa abierta:

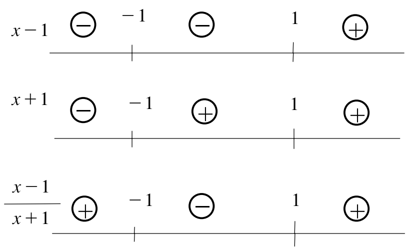
$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$

En algunas ocasiones, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ se suelen expresar en forma de desigualdades que se traducen en intervalos o semirrectas.

Ejemplo 1. Si consideramos $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x-1}{x+1} > 0\right\}$ y queremos caracterizar A con mayor claridad, debemos resolver la desigualdad que lo define:

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left.\begin{array}{l} x-1>0 \\ x+1>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>1 \\ x>-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>1 \equiv (1,\infty) \\ \text{o bien} \\ \left.\begin{array}{l} x-1<0 \\ x+1<0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<1 \\ x<-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x<-1 \equiv (-\infty,-1) \end{array} \right\}$$

con lo que $A = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. La desigualdad anterior también se puede analizar de forma gráfica estudiando el signo del numerador y del denominador:



Ejemplo 2. Si intentamos determinar $B = \{x \in \mathbb{R} / (2-4X) < 8 \text{ y } (2x-1) < (7x+2)\}$, debemos resolver dos desigualdades. De la primera resulta

$$2-4x < 8 \Leftrightarrow -4x < 6 \Leftrightarrow x > \frac{-6}{4} \Leftrightarrow x > \frac{-3}{2} \Leftrightarrow x \in (-3/2,+\infty)$$

obteniendo que su solución es el intervalo $(-3/2,+\infty)$.
De la segunda resulta

$$2x-1 < 7x+2 \Leftrightarrow -3 < 5x \Leftrightarrow -\frac{3}{5} < x \Leftrightarrow x \in (-3/5,+\infty)$$

cuya solución es el intervalo $(-3/5,+\infty)$. Por lo tanto,

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x > -3/2 \text{ y } x > -3/5\} = (-3/2,+\infty) \cap (-3/5,+\infty).$$

Ejemplo 3. Se considera ahora el conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \ / x-3 \le -2x+5\}$. En este caso si resolvemos la desigualdad

$$x-3 \le -2x+5 \Leftrightarrow 3x-3 \le 5 \Leftrightarrow 3x \le 8 \Leftrightarrow x \le \frac{8}{3}$$

se concluye que $C = (-\infty, 8/3]$.

En algunas ocasiones suelen aparecer conjuntos definidos por desigualdades de tipo cuadrático, es decir, en las que interviene un polinomio de grado 2.

Ejemplo 4. Sea $D = \{x \in \mathbb{R} / x(x+3) - 2x > 4x+4\}$. En este caso, si consideramos la inecuación

$$x(x+3) - 2x > 4x+4$$

operando tenemos

$$x^2+3x-2x>4x+4$$

y simplificando

$$x^2-3x-4>0$$

Si ahora factorizamos el polinomio resulta

$$(x-4)\,(x+1)>0\,,$$

desigualdad que se hace cierta si $(x-4)>0$ y $(x+1)>0$ o bien si $(x-4)<0$ y $(x+1)<0$, es decir, si $x>4$ y $x>-1$ o bien si $x<4$ y $x<-1$, esto es, cuando $x>4$ o bien $x<-1$.
Por lo tanto, $D=(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$.

Como acabamos de ver el método de resolución de este tipo de desigualdades consiste en factorizar previamente el polinomio y estudiar los signos de sus factores. Mediante este método sería sencillo resolver desigualdades cúbicas como $x^3-x^2-6x<0$, ya que si sacamos factor común $x\left(x^2-x-6\right)<0$ y factorizamos $x(x+2)\cdot(x-3)<0$, podemos estudiar los signos de cada factor en los intervalos $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,3)$ y $(3,+\infty)$ ya que en los puntos $x=-2$, $x=0$ y $x=3$ es donde se anula el polinomio:

		-2		0		3	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x(x+2)(x-3)$	$-$		$+$		$-$		$+$

Luego la solución es $x<-2$ ó $0<x<3$, esto es, el conjunto $(-\infty,2)\cup(0,3)$.

3. Valor absoluto. Propiedades

Definición 6. *(Valor absoluto)*

Sea a un número real cualquiera. Se define su valor absoluto y se denota por $|a|$ como:

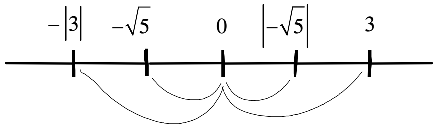
$$|a| = \begin{cases} -a & \text{si } a < 0 \\ a & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo 5.

$|3| = 3$ $\qquad |4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$ $\qquad |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

$|-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$ $\qquad |-4| = 4$ $\qquad |1-5\sqrt{2}| = 5\sqrt{2}-1$

Obsérvese la relación de simetría que guardan los números negativos y sus valores absolutos en la recta real (son equidistantes del origen).



El valor absoluto cumple algunas propiedades básicas respecto de las principales operaciones entre números reales:

Proposición 4.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ *, entonces se verifica:*

1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\qquad$ *2)* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ *si* $b \neq 0$

3) $|a| = \sqrt{a^2}$ $\qquad$ *4)* $|a^n| = |a|^n$

Estas propiedades se pueden comprobar de forma sencilla sobre ejemplos concretos.

1) $|3 \cdot 4| = 12;\ \ |3| \cdot |4| = 12$
$|(-3) \cdot (-4)| = |12| = 12;\ \ |-3||-4| = 3 \cdot 4 = 12$

2) $\left|\frac{-90}{3}\right| = |-30| = 30;\ \ \frac{|-90|}{|3|} = \frac{90}{3} = 30$

3) $|5| = 5 \qquad \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$
$|-5| = 5 \quad \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

4) $|3^2| = 9 \qquad |3|^2 = 3^2 = 9$
$|(-2)^3| = |-8| = 8;\ \ |-2|^3 = 2^3 = 8$

Además de estas propiedades relacionadas con las operaciones de números reales, el valor absoluto satisface propiedades muy importantes respecto a las desigualdades:

Proposición 5.

Si $a,b \in \mathbb{R}$ y $k \geq 0$ *entonces se verifican:*

1) $-|a| \leq a \leq |a|$

2) $|a| \leq k \Leftrightarrow \ -k \leq a \leq k$

3) $k \leq |a| \Leftrightarrow \ -k \leq a \leq k$

4) Desigualdad triangular: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Demostración. La primera propiedad es inmediata pues $a = |a|$ ó bien $a = -|a|$.

La segunda se obtiene a partir de la definición de valor absoluto:

$$|a| \leq k \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a \leq k \ \text{ si } \ a < 0 \\ \ a \leq k \ \ \text{ si } \ a < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -k \leq a < 0 \\ 0 \leq a \leq k \end{array} \right\} \Leftrightarrow -k \leq a \leq k \, .$$

La tercera es consecuencia directa de la anterior: los puntos que cumplen $|a| \geq k$ son los que no cumplen $|a| < k$, esto es, los que no pertenecen al intervalo $(-k,k)$.

La cuarta se demuestra a partir de las dos primeras: por la primera propiedad

$$-\left(|a| + |b|\right) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

entonces utilizando la segunda propiedad (para $k = |a| + |b| \geq 0$) resulta

$$|a+b| \leq |a| + |b| \, .$$

□

Algunas desigualdades que contienen el valor absoluto resultan muy interesantes de estudiar. Por ejemplo, si consideramos

$$|x-3| \leq 1$$

aplicando la segunda de las propiedades anteriores esta desigualdad es equivalente a

$$-1 \leq x - 3 \leq 1 \, ,$$

es decir,

$$-1 + 3 \leq x \leq 1 + 3$$

luego $2 \leq x \leq 4$.

En general, empleando el mismo razonamiento, la desigualdad

$$|x-a| \leq b$$

es equivalente a

$$-b \leq x - a \leq b$$

es decir,

$$-b + a \leq x \leq b + a$$

luego

$$|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b \,.$$

Una desigualdad similar es $|x - 3| \geq 1$. En este caso la desigualdad equivalente sería

$$x - 3 \geq 1 \;\text{ ó }\; x - 3 \leq -1$$

es decir, $x \geq 4$ ó $x \leq 2$; luego generalizando, la desigualdad

$$|x - a| \geq b$$

es equivalente a

$$x - a \geq b \;\text{ ó }\; x - a \leq -b$$

es decir,

$$|x - a| \geq b \Leftrightarrow x \geq a + b \;\text{ ó }\; x \leq a - b$$

Ejercicios resueltos

1. Clasificar los siguientes números decimales según sean decimales exactos, periódicos o decimales no exactos y no periódicos:

a) 2.47	b) 2.3888888	c) 3.01212121
d) 3.14161821…	e) 6.4	f) 12.111111…
g) 0.12131415…		

<u>**Solución:**</u>

a) Decimal exacto

b) Decimal periódico mixto: $2.388888\ldots.= 2.3\overset{\frown}{8}$

c) Decimal periódico mixto: $3.0\overset{\frown}{12}$

d) Decimal no exacto y no periódico: $3.14161821\ldots = \pi$

e) Decimal exacto

f) Decimal periódico: $12.\overset{\frown}{1}$

g) Decimal no exacto y no periódico

2. Clasificar los siguientes números en racionales o irracionales:

a) 0.111 222 333 111 222 333…	b) 0.220200200020000200002…
c) 0.112122122212222122222…	d) 0.123321123321123321…

<u>**Solución:**</u>

a) Es un número racional pues se trata de un número decimal periódico ($0.\overset{\frown}{111222333}$).

b) Es un número irracional, ya que detrás de la cifra 2 se van colocando sucesivamente ninguno, uno, dos, tres, … ceros.

c) Es un número irracional, ya que detrás del 1 se van colocando sucesivamente ninguno, uno, dos, tres… doses.

d) Es un número racional, pues se trata de un número decimal periódico ($0.\overset{\frown}{123321}$)

3. Escribir tres números irracionales distintos a los anteriores.

Solución:

Algunas soluciones posibles serían:

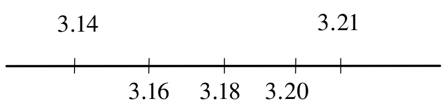
2.37377377737777… 6.1282228222282222222… 0.12345678910111213…

4. Intercalar tres números racionales entre cada uno de los siguientes pares de números, representándolos en la recta real:

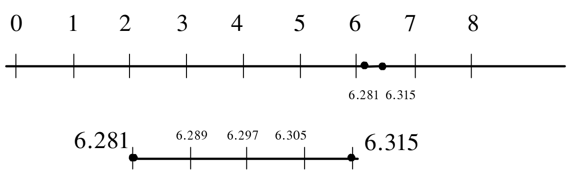
a) 3.14 y 3.21 b) 6.281 y 6.315

Solución:

a)



b)



5. Dados los números reales

$$\frac{1}{5},\frac{2}{25},\sqrt{2},\frac{3}{8},\sqrt{3},6$$

ordenarlos de mayor a menor y realizar una representación de dichos números en la recta real.

Solución:

En primer lugar, es obvio que $\frac{1}{5},\frac{2}{25},\frac{3}{8}$ son menores que 1, $\sqrt{2}>1$ y $\sqrt{3}>1$; por lo tanto, sólo hay que ordenar los tres primeros y los dos segundos. Ahora bien, poniendo el mismo denominador en los tres números racionales

$$\frac{1}{5}=\frac{5}{25}=\frac{40}{200};\quad \frac{2}{25}=\frac{16}{200};\quad \frac{3}{8}=\frac{75}{200}$$

y como $2<3 \Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt{3}$, se concluye que

$$\frac{2}{25}<\frac{1}{5}<\frac{3}{8}<\sqrt{2}<\sqrt{3}<6$$

6. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x+1}{2}\le\frac{5x+2}{8}$ b) $2x-5<7$ c) $x^2<x+6$

Solución:

a) $$\frac{x+1}{2}\le\frac{5x+2}{8} \underset{\text{multiplicando por 8}}{\Leftrightarrow} 4\cdot(x+1)\le 5x+2$$

$$\underset{\text{operando}}{\Leftrightarrow} 4x+4\le 5x+2$$

$$\underset{\text{restando 2}}{\Leftrightarrow} 4x+2\le 5x$$

$$\underset{\text{restando 4x}}{\Leftrightarrow} 2\le x$$ esto es, el conjunto $[2,+\infty)$.

b) $$2x-5<7 \underset{\text{sumando 5}}{\Leftrightarrow} 2x<12 \underset{\text{dividiendo por 2}}{\Leftrightarrow} x<6$$ esto es, el conjunto $(-\infty,6)$.

c) $$x^2<x+6 \underset{\text{restando x y 6}}{\Leftrightarrow} x^2-x-6<0$$

$$\underset{\text{factorizando}}{\Leftrightarrow} (x-3)(x+2)<0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{l}(x-3)>0\\(x+2)<0\end{array}\right\}\\ \text{ó}\\ \left\{\begin{array}{l}(\mathrm{x}-3)<0\\(x+2)>0\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{l}x>3\\x<-2\end{array}\right\}\text{ imposible}\\ \text{ó}\\ \left\{\begin{array}{l}x<3\\x>-2\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow -2<x<3$$ esto es, el conjunto $(-2,3)$.

7. Determinar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) $A_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; \dfrac{x-1}{x+2} > 0 \;\text{ y }\; x > -1 \right\}$ b) $A_2 = \{ x \in \mathbb{R} \,/\; 4x < 6x + 2 \;\text{ y }\; -3x \geq -1 \}$

c) $A_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; \dfrac{3x+6}{x-1} > 0 \right\}$ d) $A_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; x^2 - 5x + 6 > 0 \right\}$

e) $A_5 = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\; x^2 - 6x + 8 \leq 0 \right\}$

<u>**Solución:**</u>

a) A partir de la tabla de signos

		-2		1	
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$\dfrac{x-1}{x+2}$	$+$		$-$		$+$

se deduce que

$$\frac{x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$$

y como además se debe verificar que $x > -1$, entonces $A_1 = (1,+\infty) \cap (-1,+\infty) = (1,+\infty)$.

b) $4x < 6x + 2 \Leftrightarrow -2x < 2 \Leftrightarrow x > -1$

$-3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1/3$

Luego $A_2 = \{ x \in \mathbb{R} \,/\; -1 < x < 1/3 \}$, esto es, $A_2 = (-1, 1/3]$.

c) A partir de la tabla de signos

		1		2	
$3x-6$	$-$		$-$		$+$
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\dfrac{3x-6}{x-1}$	$+$		$-$		$+$

se deduce que $A_3 = \{ x \in \mathbb{R} \,/\; x < 1 \text{ ó } x > 2 \}$, luego $A_3 = (-\infty,1) \cup (2,+\infty)$.

d) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)\,(x-2)$ luego $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x-3)\,(x-2) > 0$

		2		3	
$x-3$	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
$x-2$	$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$
x^2-5x+6	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$

Por tanto, $A_4 = \{x \in \mathbb{R} \,/\; x < 2 \text{ ó } x > 3\}$, es decir, $A_4 = (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$.

e) $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$

$x^2 - 6x + 8 = (x-4)\,(x-2)$ luego $x^2 - 6x + 8 > 0 \Leftrightarrow (x-4)\,(\mathrm{x}-2) > 0$

		2		4	
$x-4$	$\ominus$		$\ominus$		$\oplus$
$x-2$	$\ominus$		$\oplus$		$\oplus$
x^2-6x+8	$\oplus$		$\ominus$		$\oplus$

Así, $A_5 = \{x \in \mathbb{R} \,/\; 2 \le x \le 4\} = [2,4]$.

8. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|x+3| \ge 5$ b) $|x-3| \ge 4$

c) $|3x+2| \le 6$ d) $|4x-1| \ge 5$

Solución:

a) $|x+3| \ge 5 \Leftrightarrow x+3 \ge 5$ ó $x+3 \le -5 \Leftrightarrow x \ge 2$ ó $x \le -8$; es decir: $x \in (-\infty,-8] \cup [2,+\infty)$.

b) $|x-3| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 7 \\ \text{ó} \\ x-3 \leq -4 \Leftrightarrow x \leq -1 \end{cases}$

Por tanto, resulta $x \in (-\infty,-1] \cup [7,+\infty)$.

c) $|3x+2| \leq 6 \Leftrightarrow -6 \leq 3x+2 \leq 6$

$$\Leftrightarrow -6 \leq 3x+2 \;\text{ y }\; 3x+2 \leq 6$$
$$\Leftrightarrow -8 \leq 3x \;\text{ y }\; 3x \leq 4$$
$$\Leftrightarrow -8/3 \leq x \;\text{ y }\; x \leq 4/3$$

es decir $x \in (-\infty,-1] \cup [7,+\infty)$.

d) $|4x-1| \geq -5$

Obsérvese que $|4x-1| \geq 0 > -5$ siempre (cualquier número real verifica la desigualdad), por lo que la desigualdad se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicios propuestos

1. Clasificar los siguientes números decimales en racionales e irracionales:

(a) 1’223344223344223344……………

(b) 4’12131415161718……………

(c) 0’201202203204……………

(d) 1’6874747474……………

(e) $3\sqrt{2}-1$

(f) $\sqrt{2}^{3}$

(g) $\sqrt[3]{64}$

2. Encontrar dos números irracionales comprendidos entre los siguientes números racionales:

(a) 3/4 y 2 (b) 1/3 y 2/3 (c) 6/8 y 1

3. Ordenar de menor a mayor los siguientes números reales:

$$\sqrt{5},\ \frac{1}{3},\ \sqrt{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{7}{9}$$

4. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $\dfrac{4x-2}{3} \leq \dfrac{2x+7}{2}$

(b) $3x+8 \leq 4x$

(c) $2x^2-7 \geq 0$

5. Determinar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $A=\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x+7 \leq 8{,}4x+2 < 3x+1\}$

(b) $B=\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{4x+2}{2x-3} \leq 5, x \geq -4\right\}$

(c) $C=\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{x+4}{3}-\dfrac{x-4}{5} > 2+\dfrac{3x+1}{15}\right\}$

(d) $D=\left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \dfrac{4x+3}{2x+2} > 6x+1\right\}$

6. Resolver las siguientes desigualdades:

(a) $|3x+1| \geq 6$

(b) $|2x-3| \leq 4$

(c) $|3x-5| \geq 6$

(d) $|4x-2| \leq 4$

7. Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

(a) $x^3 - x^2 - 5x - 3 \leq 0$

(b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$

(c) $x^2 - 2x + 4 \geq 3$