TEMA 2

Funciones de una variable

Contenidos:

1. Conceptos básicos

A menudo, en nuestra vida diaria nos encontramos con fenómenos que pueden ser expresados como una función de una variable. Por ejemplo:

- El consumo de gasolina de un coche está en función de la velocidad del mismo.
- Las ventas de un producto dependen de su precio.
- El consumo de un individuo es función de su renta.
- La factura mensual del agua está en función de los metros cúbicos gastados.

Todo este tipo de expresiones muestran una dependencia entre dos magnitudes, de tal forma que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda.

Definición 1. *(Función)*

Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$ $(\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R})$. *Se llama función real de variable real a toda correspondencia* $f\colon \mathrm{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que asocia a cada elemento* $x \in \mathrm{D}$ *un sólo elemento de* $\mathbb{R}$.

Las funciones reales de una variable se suelen representar mediante expresiones de la forma $y = f(x)$ donde x es la variable independiente e y es la variable dependiente. Esta relación indica que la variable y depende de la variable x.

Ejemplo 1.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función de $\mathbb{R}$ - $\{0\}$ en $\mathbb{R}$, pues a todo número real salvo el cero le asocia un único elemento de $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = \pm\sqrt{x}$ no es una función, ya que, por ejemplo, al valor $x = 4$ le corresponden dos valores de $\mathbb{R}$, que son 2 y –2.

Definición 2. *(Dominio)*

Sea $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función real. Se define su dominio, y se denota por* $Dom(f)$, *como el subconjunto de números reales para los cuales existe la función, es decir,*

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \text{existe}\, f(x)\}$$

Definición 3. *(Recorrido o Imagen)*

Dada $f\colon\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se define el recorrido o imagen de* f, *y se denota por* $\mathrm{Rec}(f)$ *o* $\mathrm{Im}(f)$, *al conjunto de números reales que toma la variable y, es decir,*

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \text{existe}\ x \in \mathrm{Dom}(f), f(x) = y\}$$

Nótese que $f\colon \text{Dom}\,(f) \subset \mathbb{R} \to \text{Rec}(f) \subset \mathbb{R}$, esto es, $\text{Dom}\,(f)$ es un subconjunto del conjunto inicial de la función, mientras que $\text{Rec}(f)$ es un subconjunto del conjunto final.

Ejemplo 2. Calculemos el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Esta función está bien definida siempre que $x \neq 0$, por tanto

$$\text{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Para estudiar el recorrido podemos observar que, para todo número $y \neq 0$, existe un número $x = 1/y$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1/y} = y$. Así pues, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = x^3$

En este caso es claro que siempre podemos calcular el cubo de cualquier número real, por tanto $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; en cuanto al recorrido, también podemos observar que cualquier número se puede expresar como el cubo de otro, luego $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = +\sqrt{1 - x^2}$

En este caso para calcular el dominio debemos observar que sólo podemos calcular la raíz cuadrada de números positivos, por tanto $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 - x^2 \geq 0\}$. Si calculamos ahora el subconjunto dado por esa inecuación obtenemos que

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$$

En cuanto al recorrido, teniendo en cuenta que $\text{Dom}(f) = [-1,1]$ es evidente que en dicho intervalo $1 \geq 1 - x^2 \geq 0$, luego $1 \geq \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ y, por tanto, $\text{Rec}(f) = [0,1]$.

2. Gráficas de funciones de una variable

En esta sección vamos a explicar cómo toda función dada por una ecuación $y = f(x)$ se puede representar en un sistema de coordenadas por una curva (o gráfica), lo que nos ayuda a visualizarla.

Definición 4. *(Gráfica de una función)*

Sea $f\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se denomina gráfica de* f *al conjunto de todos los pares* $(x, f(x))$ *donde* x *pertenece al dominio de f, es decir,*

$$\mathrm{Gr}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \middle| \; x \in \mathrm{Dom}\,(f),\; y = f(x)\right\}$$

En principio, una aproximación de la gráfica de una función $y = f(x)$ puede obtenerse construyendo una tabla de valores de dicha función, de tal forma que para un conjunto de valores de *x* se calculan los correspondientes valores de *y*, y con la representación de los pares de puntos obtenidos se perfila la curva que determina la gráfica de la misma.

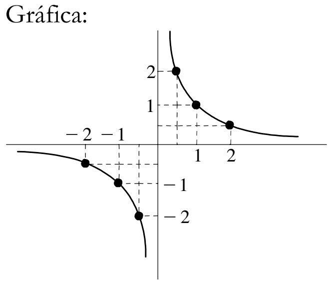
Ejemplo 3. Vamos a dibujar las gráficas de las funciones del ejemplo 2.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. $\mathrm{Gr}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in \mathbb{R} - \{0\}, y = \dfrac{1}{x}\right\}$

Tabla de valores:

x	*y*
1	1
-1	-1
2	1/2
-2	-1/2
3	1/3
-3	-1/3
1/2	2
-1/2	-2

Gráfica:



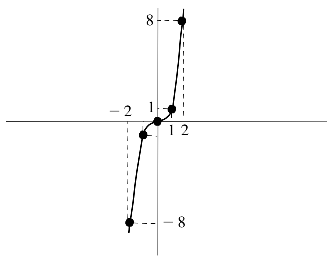
Si observamos esta gráfica podemos determinar que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y que $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $f(x) = x^3$. $\mathrm{Gr}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \middle| \; x \in \mathbb{R}, y = x^3\right\}$

Tabla de valores:

x	*y*
0	0
1	1
-1	-1
2	8
-2	-8

Gráfica:



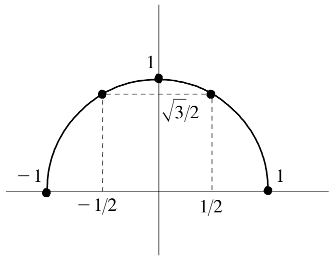
En este caso observamos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y que $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

c) $f(x)=+\sqrt{1-x^2}$. $\mathrm{Gr}(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\in[-1,1],\, y=+\sqrt{1-x^2}\right\}$.

Tabla de valores:

x	y
0	1
1	0
-1	0
1/2	$\sqrt{3}/2$
-1/2	$\sqrt{3}/2$

Gráfica:

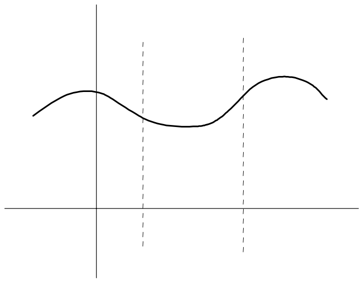


Donde observamos que $\mathrm{Dom}(f)=[-1,1]$ y $\mathrm{Rec}(f)=[0,1]$.

Es importante notar que el método de "marcar" los puntos no es muy fiable. Un método más riguroso se verá en el capítulo 5. Además, conviene señalar que no todas las curvas del plano son gráficas de funciones. La gráfica de una función tiene la propiedad de que una recta vertical que pase por cualquier punto del eje OX la corta a lo sumo una vez.

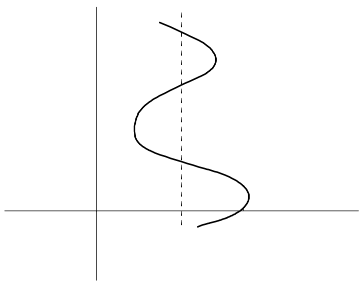
Ejemplo 4. Utilizando la observación anterior determinar, de entre las siguientes curvas, cuales corresponden a la gráfica de una función y cuales no.

a)



Esta curva representa la gráfica de una función, ya que las infinitas rectas verticales que cortan a la curva lo hacen siempre en un sólo punto.

b)



Esta curva no representa la gráfica de una función, pues existen rectas verticales que cortan a la curva en 2 ó 3 puntos.

3. Características de las gráficas de funciones

Definición 5. *(Función creciente y decreciente)*

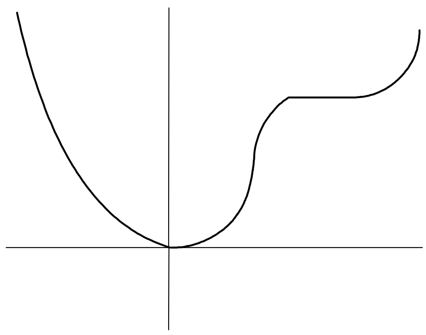
(i) *Una función* f *es creciente en un intervalo I si para cualquier par de números* x_1, x_2 *del intervalo I tales que* $x_1 < x_2$ *se verifica que* $f(x_1) \le f(x_2)$.

(ii) *Una función* f *es estrictamente creciente en un intervalo I si para cualquier par de números* x_1, x_2 *del intervalo I tales que* $x_1 < x_2$ *se verifica que* $f(x_1) < f(x_2)$.

(iii) *Una función* f *es decreciente en un intervalo I si para cualquier par de números* x_1, x_2 *del intervalo I tales que* $x_1 < x_2$ *se verifica que* $f(x_1) \ge f(x_2)$.

(iv) *Una función* f *es estrictamente decreciente en un intervalo I si para cualquier par de números* $x_1 < x_2$ *del intervalo I tales que* $x_1 < x_2$ *se verifica que* $f(x_1) > f(x_2)$.

Nótese que una función es creciente si, al movernos por el eje OX hacia la derecha, la gráfica asciende, y decreciente si desciende. Así, la función cuya gráfica es la siguiente:

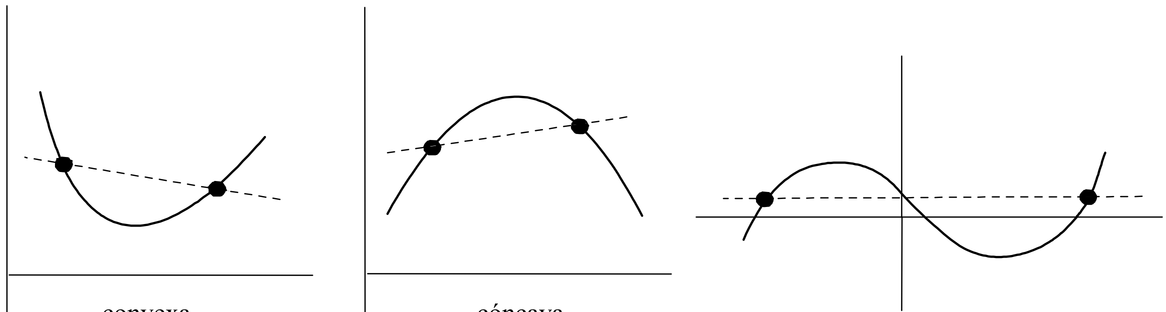


es una función estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

Definición 6. *(Función convexa y cóncava)*

(i) *Una función* f *es convexa en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del intervalo de la gráfica de f nunca se sitúa <u>por debajo</u> de la gráfica de f.*

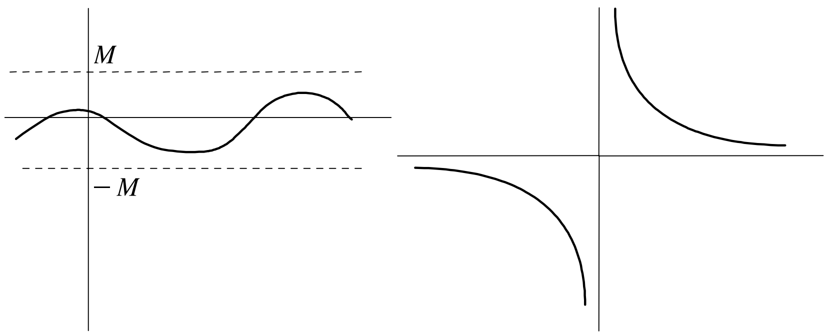
(ii) *Una función* f *es cóncava en un intervalo si el segmento que une dos puntos cualesquiera del intervalo de la gráfica de f nunca se sitúa <u>por encima</u> de la gráfica de f.*



convexa cóncava ni cóncava ni convexa

Definición 7. *(Función acotada)*

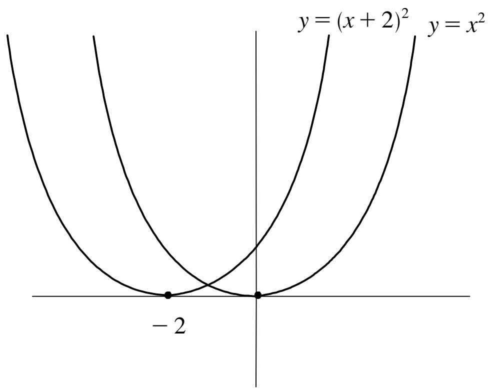
Sea $f(x)$ una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ es acotada en el intervalo $[a,b]$ si existe un número $M>0$ tal que $-M\le f(x)\le M$ para cada $x\in[a,b]$.



Función acotada Función no acotada

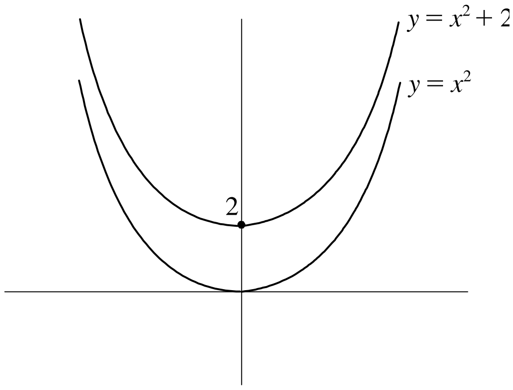
A continuación vamos a estudiar ciertas transformaciones que no hacen variar esencialmente la gráfica de una función:

a) Sea $f(x)=x^2$ y comparémosla con la gráfica de $g(x)=f(x+2)=(x+2)^2$.



Como se observa, se ha producido una traslación horizontal (a la izquierda).

b) Sea $f(x) = x^2$ y comparémosla con la gráfica de $g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$.



En este caso, se ha producido una traslación vertical (hacia arriba).

Cada una de las gráficas de los ejemplos a) y b) es una transformación de la gráfica de $y = x^2$.

Los tipos básicos de transformaciones son:

(i) $y = f(x - c)$ es una traslación horizontal de la gráfica de $f(x)$ en c unidades a la derecha.

(ii) $y = f(x + c)$ es una traslación horizontal de la gráfica de $f(x)$ en c unidades a la izquierda.

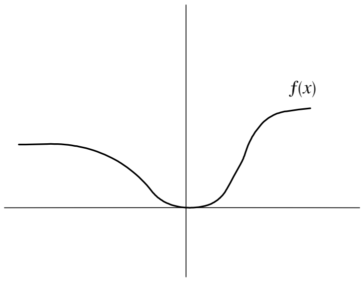
(iii) $y = f(x) - c$ (ó $y = f(x) + c$) es una traslación vertical de c unidades hacia abajo (o hacia arriba).

(iv) $y = -f(x)$ es una reflexión de $f(x)$ respecto del eje OX.

(v) $y = f(-x)$ es una reflexión de $f(x)$ respecto del eje OY.

(vi) $y = -f(-x)$ es una reflexión de $f(x)$ respecto del origen.

Ejemplo 5. Dada la gráfica de $f(x)$



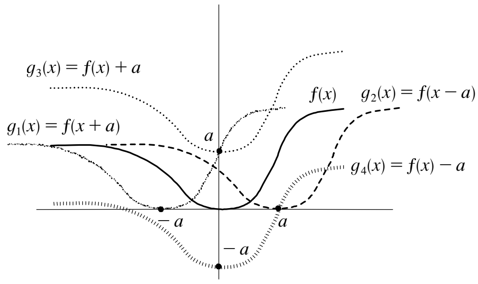
veamos a qué corresponde la gráfica de las siguientes transformaciones:

a) $f(x \pm a),\ f(x) \pm a,\ \ a > 0$
Sean

$$g_1(x) = f(x+a)$$
$$g_2(x) = f(x-a)$$
$$g_3(x) = f(x)+a$$
$$g_4(x) = f(x)-a$$

Entonces tendremos que para x_0, se verifica:

$$g_1(x_0) = f(x_0+a),\ \ g_2(x_0) = f(x_0-a)$$
$$g_3(x_0) = f(x_0)+a,\ \ g_4(x_0) = f(x_0)-a$$

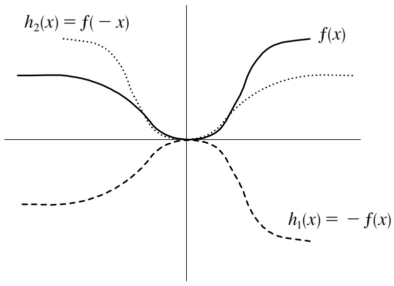


Así pues:

* $g_1(x)$ es una traslación horizontal de la gráfica $f(x)$ en a unidades a la izquierda.
* $g_2(x)$ es una traslación horizontal de la gráfica $f(x)$ en a unidades a la derecha.
* $g_3(x)$ es una traslación vertical de la gráfica $f(x)$ en unidades hacia arriba.
* $g_4(x)$ es una traslación vertical de la gráfica $f(x)$ en a unidades hacia abajo.

b) $h_1(x) = -f(x),\ \ h_2(x) = f(-x),\ \ h_3(x) = -f(-x)$
Dado x_0 se tiene que:

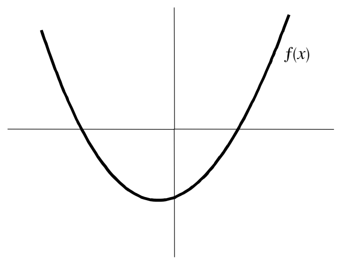
$$h_1(x_0) = -f(x_0)$$
$$h_2(x_0) = f(-x_0)$$
$$h_3(x_0) = -f(-x_0)$$



Por tanto:

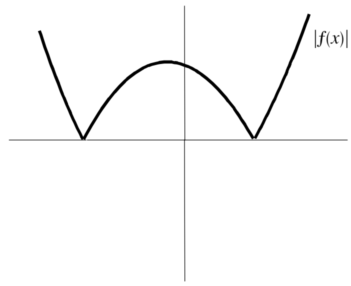
* $h_1(x)$ es una reflexión respecto al eje OX.
* $h_2(x)$ es una reflexión respecto al eje OY.
* $h_3(x)$ es una reflexión respecto del origen.

Ejemplo 6. Dada la gráfica de $f(x)$



determinar la gráfica del valor absoluto de $f(x)$, esto es, la gráfica de $|f(x)|$.

Solución:

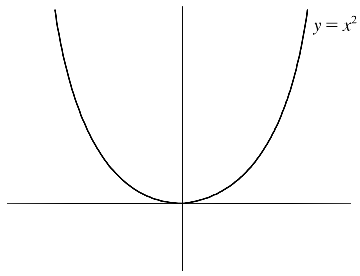


Finalmente, analizaremos los diferentes tipos de simetrías de las gráficas de funciones, que se expresan en los siguientes términos:

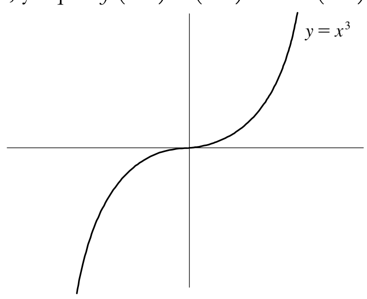
(i) La función $y = f(x)$ es *par* si $f(-x) = f(x)$, es decir, si su gráfica es simétrica respecto al eje OY.

(ii) La función $y = f(x)$ es *impar* si $f(-x) = -f(x)$, es decir, si su gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Ejemplo 7. $f(x) = x^2$ es par, ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.



Ejemplo 8. $f(x) = x^3$ es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x(-x)^2 = -xx^2 = -x^3 = -f(x)$.



4. Operaciones entre funciones

En general, casi todas las funciones pueden obtenerse a partir de unas cuantas funciones elementales utilizando ciertas operaciones. Por eso, vamos a definir algunas de las operaciones que nos permiten construir funciones a partir de otras.

Definición 8. *Sean* $f, g\colon \mathrm{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones. Se define la función*

* *Suma:* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
* *Resta:* $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
* *Producto:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
* *División:* $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ si $g(x) \neq 0$
* *Producto por un escalar,* $\alpha \in \mathbb{R}$: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

Ejemplo 9. A partir de las funciones

$$f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 2x,\ f_3(x) = 3$$

construir las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^2 + 2x + 3$. Es ésta una función obtenida a partir de la suma de $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$. Así pues, $g(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

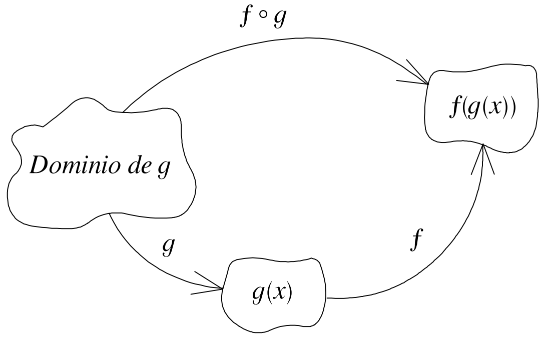
b) $h(x) = x^2 - 2x$. En este caso se trata de una función obtenida como resta de $f_1(x)$ y $f_2(x)$: $h(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

c) $p(x) = x^3$. Se ha obtenido como producto de $f_1(x)$ y $f_2(x)$: $p(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

d) $c(x) = \dfrac{x}{2}$. Se ha obtenido dividiendo $f_1(x)$ entre $f_2(x)$: $c(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

e) $q(x) = 5x^2$. Se ha obtenido como producto de un escalar $\alpha = 5$ por $f_1(x)$: $q(x) = 5 \cdot f_1(x)$.

Otra operación importante entre funciones es la composición. La composición de funciones consiste en la aplicación reiterada de dos o más funciones. En forma esquemática podemos representarla así:



$Rec(g) \subset Dom(f)$

Definición 9. *(Composición de funciones)*

Sean f y g *dos funciones. La función dada por* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ *se llama función compuesta de* f con g. *El dominio de* $f \circ g$ *es el conjunto de todos los* x *del dominio de* g *tales que* $g(x)$ *pertenece al dominio de* f.

Ejemplo 10. Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Calcular:

a) $(f \circ g)(x)$

b) $(g \circ f)(x)$

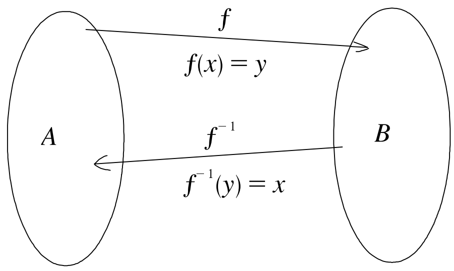
Solución:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$

Nótese que, en general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

Finalmente, estudiemos el concepto de función inversa. La función inversa de una función dada tiene el efecto de "deshacer" lo hecho por la otra. En forma esquemática consiste:



donde f^{-1} denota la función inversa de y y donde se verifica que:

Dominio de f = Recorrido de f^{-1}

Recorrido de f = Dominio de f^{-1}

Por lo tanto, dada $f\colon A \to B$, estamos interesados en encontrar una función $f^{-1}\colon B \to A$ tal que a cada $y \in B$ el valor de $f^{-1}(y) = x$ es el único número de $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Así:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) \qquad (x \in A, y \in B)$$

Definición 10. *(Función inversa)*

Una función g *es la inversa de la función* f *si*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(g) \quad \text{y}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathrm{Dom(f)}$$

La función g *se denota por* f^{-1} *y se denomina función inversa de* f.

Ejemplo 11. Calcular la función inversa de $f(x) = 2x + 5$.

Obsérvese que $y = 2x + 5$. Intercambiando las variables $x = 2y + 5$ y despejando la "y" tenemos que

$$y = \frac{x-5}{2} \quad \text{luego} \quad f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} .$$

Se puede comprobar que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-5}{2}) = 2 \cdot \frac{x-5}{2} + 5 = x - 5 + 5 = x$$

y

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+5) = \frac{(2x+5)+5}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

Observaciones:

1. Si g es la función inversa de *f*, entonces f es la inversa de g .
2. Dominio de f^{-1} = Recorrido de f y Dominio de f = Recorrido de f^{-1} .
3. Una función puede no tener inversa, pero si la tiene, la función inversa es única.
4. Una función tiene inversa si y sólo si es *inyectiva*. Recordemos que una función es inyectiva si para cualquier par de puntos x_1, x_2 pertenecientes a su dominio se verifica que:

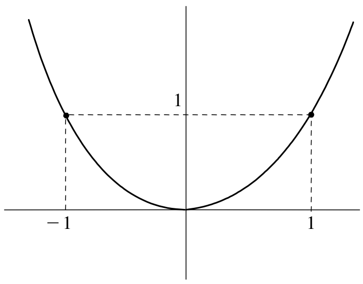
   $$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{implica} \quad x_1 = x_2 .$$

   Esto sugiere un criterio gráfico: f tiene inversa si y sólo si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo sumo en un punto.
5. La gráfica de f contiene al punto (a,b) si y sólo si la gráfica de f^{-1} contiene al (b,a) . Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} es simétrica a la gráfica de f respecto de la recta $y = x$.

Ejemplo 12. Dada la función $f(x) = x^2$ definida en todo $\mathbb{R}$, ¿admite función inversa?

Solución:

No admite función inversa pues no es inyectiva: $f(-1) = f(1) = 1$ y $-1 \neq 1$. Gráficamente se tiene:

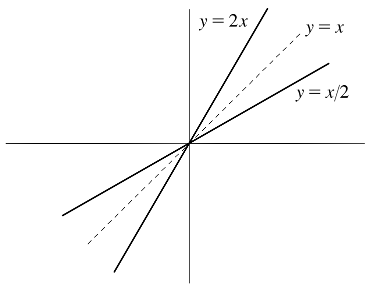


y, por tanto, no se cumple el criterio de la recta horizontal.

Ejemplo 13. Dada $f(x) = 2x$, analizar la simetría de su función inversa.

Solución:

$f^{-1}(x) = x/2$, y si dibujamos las gráficas de f y de f^{-1} :



observamos que

$$\mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Dom}\,(f^{-1}) - \mathbb{R}$$
$$\mathrm{Dom}\,(f) = \mathrm{Rec}\,(f^{-1}) - \mathbb{R}$$

Además, las gráficas de f y de g parecen reflejadas una de la otra en un espejo colocado a lo largo de la recta $y = x$, es decir, la gráfica de f^{-1} es una reflexión de la de f respecto de la recta $y = x$.

5. Ejemplos de funciones

Como se comentó anteriormente, el primer método de pintar gráficas consiste en representar infinitos puntos, este es el método que utiliza el ordenador ya que tiene una gran capacidad de cálculo, sin embargo en este apartado veremos que para ciertos casos especiales se puede conocer la forma de la gráfica de una función estudiando distintas características de las gráficas de las funciones: simetría, crecimiento, convexidad, etc… El estudio de todas estas características se verá con detalle en el capítulo 5.

Funciones Polinómicas

Se llama función polinómica a una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$. El número n es el grado del polinomio.

Nótese que el dominio de una función polinómica es todo el conjunto de los números reales. Las funciones polinómicas las clasificamos según su grado n .

a) $n = 0$ (grado cero): $P(x) = a_0$ que se denomina función constante.

b) $n = 1$ (grado uno): $P(x) = a_1 x + a_0$ que se denomina función lineal.

c) $n = 2$ (grado dos): $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ que se denomina función cuadrática.

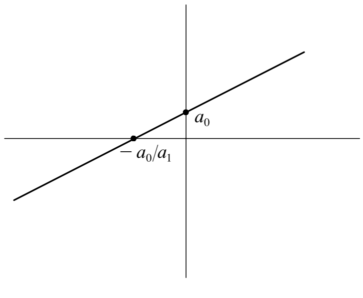
d) $n = 3$ (grado tres): $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ que se denomina función cúbica.

Ejemplo 14.

a) Pintar la gráfica de un polinomio de grado uno.

$$P(x) = a_0 + a_1 x, \quad a_0 > 0, \;\; a_1 > 0$$

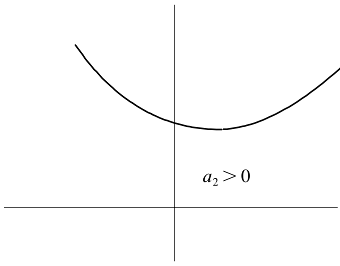
La gráfica de esta función corresponde a la recta que pasa por los puntos $(0, a_0)$ y $(-a_0 / a_1, 0)$.

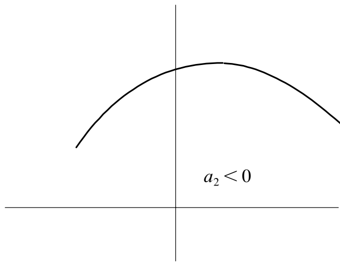


b) Pintar la gráfica de un polinomio de grado dos.

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad , \quad a_2 \neq 0$$

La gráfica de esta función corresponde a una parábola.



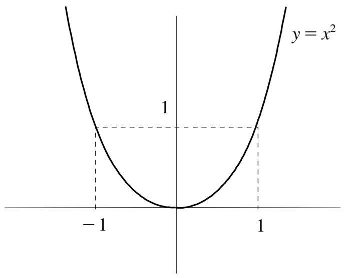


c) Pintar la gráfica de la función $y = x^2$.

Obsérvese que esta función tiene las siguientes propiedades:

1. Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido es $\mathbb{R}^+$.
2. Es simétrica respecto al eje OY, ya que $y = (-x)^2 = x^2$.
3. Es creciente en $(0,\infty)$; si tomamos $x_0, y_0 \in (0,\infty)$ tales que $x_0 > y_0 \Rightarrow x_0^2 < y_0^2 \Rightarrow f(x_0) < f(y_0)$.
4. Es decreciente en $(-\infty,0)$; si $x_0, y_0 \in (-\infty,0)$ son tales que $x_0 < y_0 \Rightarrow x_0^2 > y_0^2 \Rightarrow f(x_0) > f(y_0)$.
5. Es convexa en todo $\mathbb{R}$. El estudio del crecimiento y de la convexidad se realizará con más detalle en el capítulo 5.
6. Pasa por el $(0,0)$.

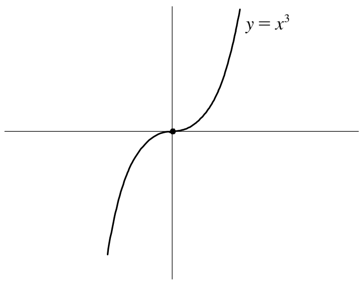
Por lo tanto:



d) Pintar la gráfica de la función $y = x^3$.

Haciendo un estudio similar al del caso anterior se obtiene que:

1. Su dominio es todo $\mathbb{R}$, al igual que su recorrido.
2. Es simétrica respecto al origen, ya que $(-y) = (-x) \Leftrightarrow y = x^3$.
3. Es creciente en todo $\mathbb{R}$; si tomamos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 < y_0 \Rightarrow x_0^3 < y_0^3 \Rightarrow f(x_0) < f(y_0)$.
4. Es convexa en $(0,\infty)$ y cóncava en $(-\infty,0)$. De nuevo remitimos al capítulo 5 para el estudio detallado del crecimiento y de la convexidad de una función. Este comentario es extensible a todos los ejemplos posteriores.
5. Pasa por el $(0,0)$.



e) Estudiar la gráfica de $y = x^n$, $n > 1$.

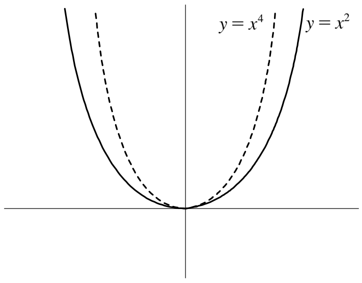
Teniendo en cuenta el ejemplo anterior distinguimos dos casos: n par y n impar.

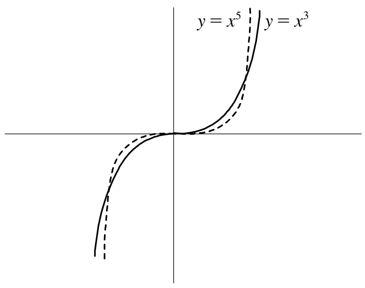
CASO n par:

1. Dom $(f) = \mathbb{R}$ y Rec$(f) = \mathbb{R}^+$.
2. Simétrica respecto el eje Y.
3. Es creciente en $(0,\infty)$.
4. Es decreciente en $(-\infty,0)$.
5. Es convexa para todo $\mathbb{R}$.
6. Pasa por el punto (0,0)

CASO n impar:

1. Dom $(f) = \mathbb{R}$ y Rec$(f) = \mathbb{R}$.
2. Simétrica respecto el origen.
3. Es creciente en todo $\mathbb{R}$.
4. Es convexa en $(0,\infty)$.
5. Es cóncava en $(-\infty,0)$.
6. Pasa por el punto $(0,0)$.





Funciones racionales

Una función $f(x)$ es racional si se puede expresar como un cociente

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Su dominio es toda la recta real excepto las raíces de $Q(x)$.

Ejemplo 15. Calcular el dominio de

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}$$

Solución:

Para ello vamos a encontrar las raíces de $Q(x) = x^3 - 3x + 2$ por la regla de Ruffini. En primer lugar buscamos la raíces del polinomio $Q(x)$ entre los divisores del término independiente (esto es, 1, -1, 2 y -2) y observamos que $Q(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, luego $x = 1$ es raíz de $Q(x)$. Por lo tanto nos interesa dividir el polinomio $Q(x)$ entre $(x-1)$. Aplicando Ruffini tenemos que:

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & x^2 & x & k \\ \text{Coef } Q \rightarrow & 1 & 0 & -3 & 2 \\ (a=1) \quad 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Así pues, las raíces de $Q(x)$ son $x = 1$ y las soluciones de $x^2 + x - 2 = 0$, que vienen dadas por la expresión:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

Luego el dominio de $f(x)$ es:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Es decir, toda la recta real menos $x = -2$ y $x = 1$.

Ejemplo 16. Pintar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$.

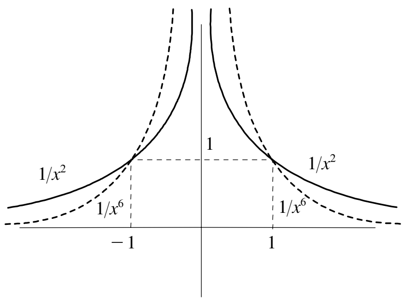
Solución:

Distinguimos dos casos: *n* PAR y *n* IMPAR.

CASO n par:

1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\text{Rec}(f) = (0, \infty)$.
2. Es simétrica respecto el eje OY, ya que
$$y = \frac{1}{(-x)^n} \underset{n\text{ PAR}}{=} \frac{1}{x^n}.$$
3. Es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$.
4. Es convexa en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
5. Pasa por el (1,1) y (-1,1).

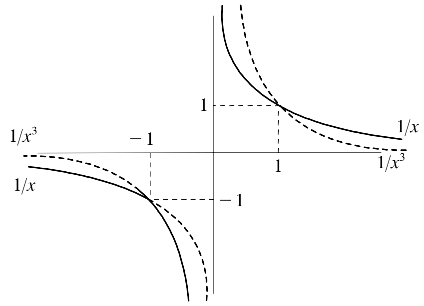
Esta curva está compuesta por dos tramos. Es una hipérbola.



CASO n impar:

1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
2. Es simétrica respecto del origen:
$$-y = \frac{1}{(-x)^n} = \frac{1}{-x(-x)^{n-1}} \underset{n-1\text{ PAR}}{=} \frac{1}{-x^n} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^n}$$
.
3. Es decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
4. Es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$
5. Pasa por el (-1,-1) y (1,1).

Esta curva también está compuesta por dos tramos. Es una hipérbola.



Obsérvese que estas funciones no están acotadas, puesto que cuando nos aproximamos al cero las gráficas de las funciones tienden al infinito.

Ejemplo 17. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

Solución:

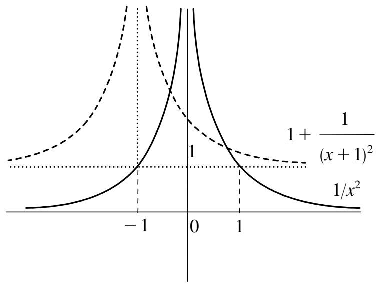
En primer lugar debemos expresar de forma más sencilla la función racional $f(x)$ Para ello vamos a realizar la división. Deseamos calcular $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$; por lo tanto, buscamos un polinomio $C(x)$ tal que $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$ (Dividendo=Cociente · Divisor + Resto)

$$\begin{array}{rl} x^2 + 2x + 2 & \big| \underline{x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-(x^2 + 2x + 2)} & \quad 1 \\ 1 & \end{array}$$

Resulta $x^2 + 2x + 2 = (x^2 + 2x + 1) + 1$, por lo tanto

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 1} = 1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

Teniendo en cuenta que $(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)^2$ podemos escribir $f(x) = 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Para dibujar la gráfica de esta función vamos a utilizar las transformaciones estudiadas en el apartado 4. Dada $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, obtenemos que $f(x) = 1 + g(x+1)$. Por lo tanto, hemos realizado una traslación horizontal de la gráfica $g(x)$ en una unidad a la izquierda, a la vez que una traslación vertical en una unidad hacia arriba.



Funciones irracionales

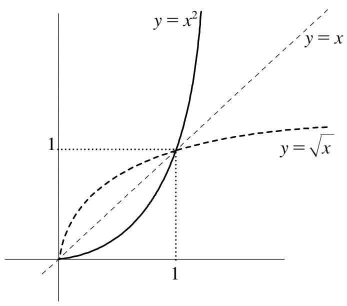
Una función $f(x)$ es irracional si se puede expresar como raíz

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)}$$

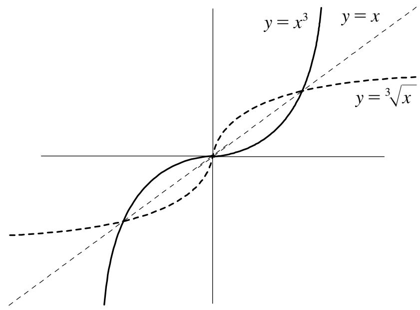
donde $R(x)$ es una función racional y $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 18. Dibujar la gráfica de $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$.
Solución:
Sea la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \geq 1$. Distinguiremos dos casos: n par y n impar.

CASO n par:
1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$.
2. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es inversa de $g(x) = x^n$, con n par, para $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$. Por lo tanto las gráficas de f y g son reflexiones una de la otra respecto de la recta $y = x$.



CASO n impar:
1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es inversa de $g(x) = x^n$, n impar. Por lo tanto, las gráficas de f y g son reflexiones una de la otra respecto de la recta $y = x$.



Funciones exponenciales

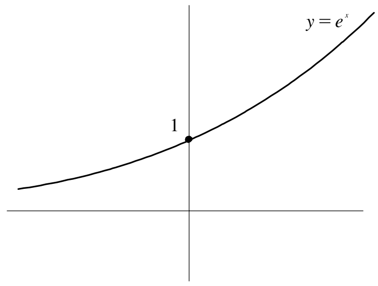
Se denomina *función exponencial en base e* a la función que asocia, a cada $x \in \mathbb{R}$, el número $f(x) = e^x$.

Propiedades. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $e^0 = 1$ 2. $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$ 3. $e^x / e^y = e^{x-y}$

4. $\left(e^x\right)^y = e^{xy}$ 5. $e^{-x} = 1/e^x$ 6. $e^{x/y} = \sqrt[y]{e^x}$

Ejemplo 19. Dibujar la gráfica de $f(x) = e^x$ $f(x) = e^x$
Solución:
1. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(f) = (0, \infty)$ pues $f(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Pasa por el punto (0,1).
3. Es creciente en $\mathbb{R}$
4. Es convexa en $\mathbb{R}$



A continuación generalizaremos la función exponencial para cualquier base de un número real positivo.

Sea b un número real positivo y x un número real cualquiera, entonces a la función de la forma $f(x) = b^x$ se la denomina *función exponencial de base* b. Nótese que la función $f(x) = b^x$ tiene por dominio toda la recta real.

Ejemplos de este tipo de funciones exponenciales son $2^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$, etc…

Propiedades. Sean a, b números reales positivos y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. $a^0 = 1$ 2. $a^x a^y = a^{x+y}$ 3. $a^x / a^y = a^{x-y}$ 4. $(a^x)^y = a^{xy}$

5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ 6. $(a/b)^x = a^x / b^x$ 7. $a^{-x} = 1/a^x$ 8. $a^{x/y} = \sqrt[y]{a^x}$

Funciones logarítmicas

El *logaritmo neperiano* de un número b es el exponente al que hay que elevar el número e para obtener el número b. Se denota por $\ln(b)$. Así pues:

$$L = \ln(b) \Leftrightarrow e^L = b$$

Propiedades.

1. $\ln(1) = 0, \ln(e) = 1$ 2. $\ln(1/e) = -1$ 3. $\ln(M \cdot N) = \ln(M) + \ln(N)$

4. $\ln(M^k) = k \cdot \ln(M)$ 5. $\ln(M/N) = \ln(M) - \ln(N)$

Ejemplo 20. Teniendo en cuenta que $\ln(2) = 0.69$ y $\ln(3) = 1.1$ resulta que:

a) $\ln(6) = \ln(2 \cdot 3) = \ln(2) + \ln(3) = 1.79$

b) $\ln(\sqrt{6}) = \ln(6^{1/2}) = 1/2 \cdot \ln(6) = 1.79 / 2 = 0.895$

c) $\ln(\sqrt[3]{2/9}) = \ln\left((2/9)^{1/3}\right) = 1/3 \cdot \ln(2/9) = 1/3 \cdot (\ln(2) - \ln(9)) = 1/3 \cdot (\ln(2) - 2 \cdot \ln(3)) = -0.5$

Ejemplo 21. Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$.

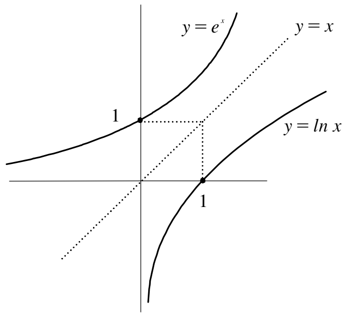
Solución:

La gráfica de la función $f(x) = \ln(x)$ tiene las siguientes características:

1. $\text{Dom}(f) = (0,\infty)$.
2. Pasa por el punto (1,0).
3. Es la función inversa de $g(x) = e^x$. En efecto, se verifica que:

$$(f \circ g)(x) = f(e^x) = \ln(e^x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$$

Por lo tanto las gráficas de f y g son reflexiones una de la otra respecto de la recta $y = x$.



La función logaritmo se puede generalizar a cualquier base. El *logaritmo en base a* de un número b es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número b. Se denota por $\log_a(b)$. Así pues

$$L = \log_a(b) \Leftrightarrow a^L = b$$

Ejemplo 22.

a) $\log_2(8) = 3$ ya que $2^3 = 8$ (Logaritmo en base dos).

b) $\log_{10}(1.000) = 3$ ya que $10^3 = 1.000$ (Los logaritmos en base 10 se denotan simplemente por log y se llaman logaritmos decimales).

Propiedades:

1. $\log_b(1) = 0, \quad \log_b(b) = 1$ 2. $\log_b(1/b) = -1$ 3. $\log_b(MN) = \log_b(M) + \log_b(N)$

4. $\log_b(M^k) = k\log_b(M)$ 5. $\log_b(M/N) = \log_b(M) - \log_b(N)$

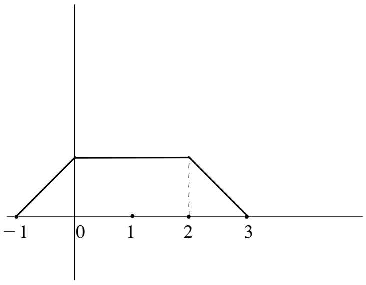
Funciones definidas a trozos

A veces, las funciones vienen definidas de forma distinta según ciertos intervalos dados. Las funciones que se comportan de este modo reciben el nombre de funciones definidas a trozos.

Ejemplo 23. Dibujar la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{en } -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{en } 0 \le x < 2 \\ -x+3 & \text{en } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Solución:

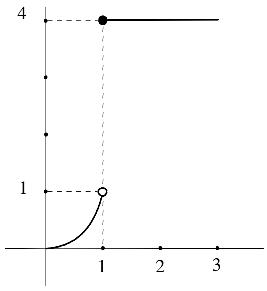


Obsérvese que esta gráfica está definida por trozos de rectas, que obedecen a ecuaciones distintas según cada intervalo. Las funciones que se comportan de este modo reciben el nombre de funciones definidas a trozos.

Ejemplo 24. Dibujar la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{en } 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{en } 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

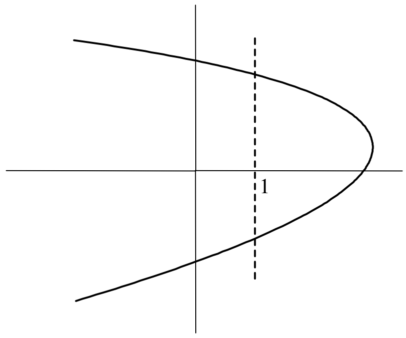
Solución: La función definida a trozos $f(x)$ tiene la siguiente gráfica:

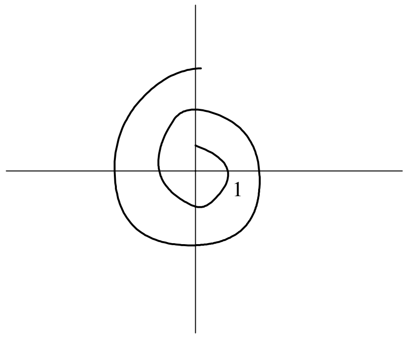


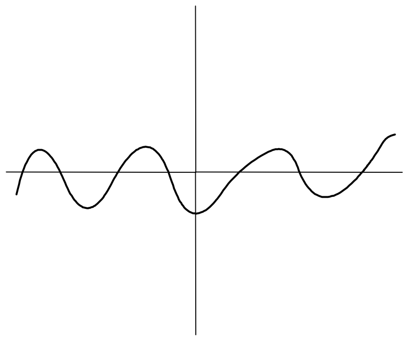
Obsérvese que esta gráfica tiene un salto en el punto $x = 1$.

Ejercicios resueltos

1. Determinar cuáles de las siguientes curvas no son la gráfica de una función, indicando el motivo.







<u>**Solución:**</u>

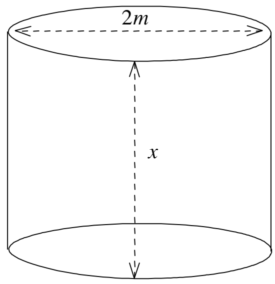
a) No es la gráfica de una función porque al punto $x = 1$ le corresponden dos valores distintos de y.

b) No es la gráfica de una función pues al punto $x = 0$ le corresponden cinco valores distintos de y.

c) Sí es la gráfica de una función porque a cada punto de x le corresponde un solo valor de y.

2. Se quiere construir un pozo de forma cilíndrica de 2m de diámetro. Definir una función que exprese el volumen que cabe en el pozo en función de la profundidad.

Solución:



Se trata de expresar el volumen de un cilindro en función de su altura *x*. Como el volumen del cilindro es *V*=(Área de la base)x(Altura), y dado que el área de la base es el área del círculo de diámetro igual a 2 (es decir, de radio 1), se verifica que el valor del volumen en función de la altura *x* es $V = \pi r^2 \cdot x = \pi x$. Por tanto, la función buscada es $f(x) = \pi x$.

3. Calcular el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 2x$ b) $f_2(x) = 1/x^2$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{x-16}$ d) $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

a) $f_1(x) = 2x$ está definida para cualquier valor de x , luego $\text{Dom}(f_1) = \mathbb{R}$. El recorrido es $\text{Rec}(f_1) = \mathbb{R}$ ya que cualquier $y \in \mathbb{R}$ se puede expresar como el doble de otro número real.

b) $\text{Dom}(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$ ya que para $x = 0$ la expresión carece de sentido. El recorrido es $\text{Rec}(f_2) = (0, \infty)$ pues los valores de $f_2(x) = 1/x^2$ son números estrictamente positivos.

c) En este caso se tiene que $\text{Dom}(f_3) = \mathbb{R} - \{16\}$ ya que la expresión carece de sentido en el punto $x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 16$. El recorrido es $\text{Rec}(f_3) = \mathbb{R} - \{0\}$.

d) El dominio es el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \geq 0\right\}$, es decir: $\text{Dom}(f_4) = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$. El recorrido es $\text{Rec}(f_4) = [0,\infty)$.

4. Hallar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$ b) $g(x) = \log\left(\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1} - 1\right)$

<u>Solución:</u>

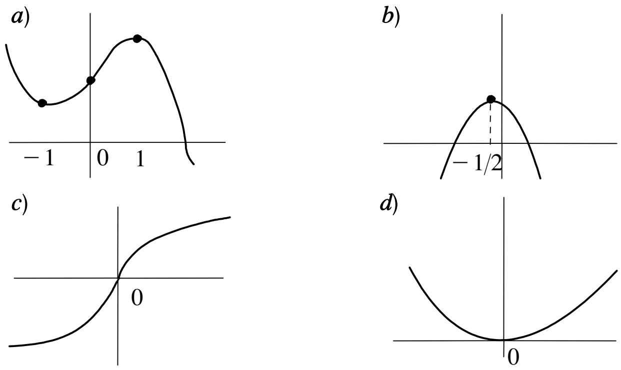
a) El dominio de esta función racional es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$, ya que $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

b) Puesto que el dominio de la función logaritmo es $(0,\infty)$ debemos resolver la inecuación

$$\frac{x^2+x+2}{x^2+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2+1} > 0$$

de donde resulta $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(g) = (-1,\infty)$.

5. Dadas las siguientes gráficas, discutir para que intervalos la función a la que representan es creciente o decreciente, cóncava o convexa:



<u>Solución:</u>

a)Decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, creciente en (-1,1), cóncava en $(0,\infty)$, convexa en $(-\infty,0)$

b)Creciente en $(-\infty,-1/2)$, decreciente en $(-1/2,\infty)$, cóncava en $\mathbb{R}$

c)Creciente en $\mathbb{R}$, convexa en $(-\infty,0)$, cóncava en $(0,\infty)$

d)Decreciente en $(-\infty,0)$, creciente en $(0,\infty)$, convexa en $\mathbb{R}$

6. Dadas las funciones

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 3x^3 + 2$$

Hallar: a) $(f \cdot g)(x)$ b) $(g - f)(x)$ c) $(f + g)(x)$

Solución:

a) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^3 - 2x^2) \cdot \left(3x^3 + 2\right) = 3x^6 - 6x^5 + 2x^3 - 4x^2$

b) $(g - f)(x) = g(x) - f(x) = 3x^3 + 2 - x^3 + 2x^2 = 2x^3 + 2x^2 + 2$

c) $(f + g)(x) = x^3 - 2x^2 + 3x^3 + 2 = 4x^3 - 2x^2 + 2$

7. Dadas las funciones

$$f(x) = x^3 - 2$$
$$g(x) = \sqrt{x+1}$$
$$h(x) = 3x - 2$$

Calcular: a) $(f \circ h)(x)$ b) $(h \circ g)(x)$ c) $(h \circ f)(x)$

Solución:

a) $(f \circ h)(x) = f(3x - 2) = (3x - 2)^3 - 2 = 27x^3 - 54x^2 + 36x - 10$

b) $(h \circ g)(x) = h(\sqrt{x+1}) = 3\sqrt{x+1} - 2$

c) $(h \circ f)(x) = h(x^3 - 2) = 3(x^3 - 2) - 2 = 3x^3 - 8$

8. Se consideran las funciones

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = \ln x$$

Se pide:

a) Calcular $(f \circ g \circ h)(x)$ y $(h \circ f \circ g)(x)$

b) Expresar la función e^{x^3} como composición de las funciones f y g.

c) Calcular $g \circ h$ y $h \circ g$. ¿Son iguales?.

Solución:

a) $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(\ln x) = f\left(e^{\ln x}\right) = f(x) = x^3$

$(h \circ f \circ g)(x) = (h \circ f)\left(e^x\right) = h(e^{3x}) = \ln(e^{3x}) = 3x$

b) $e^{x^3} = (g \circ f)(x)$

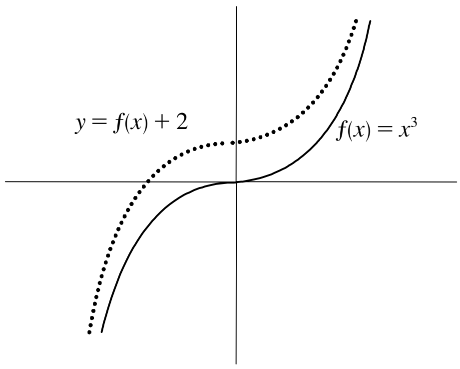
c) $(g \circ h)(x) = e^{\ln x} = x$ y $(h \circ g)(x) = \ln(e^x) = x$. Sí son iguales pues g y h son inversas.

9. Sea $f(x) = x^3$, dibujar las siguientes transformaciones de $f(x)$:

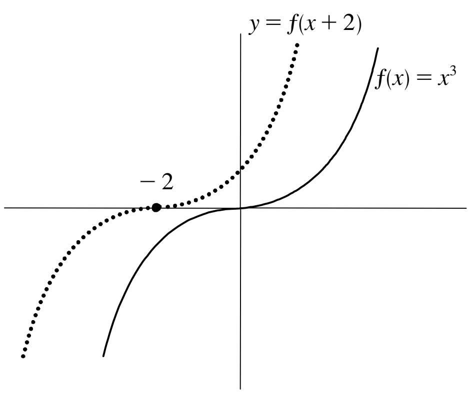
a) $y = f(x) + 2$ b) $y = f(x + 2)$ c) $y = -f(x)$ d) $y = f(-x)$

Solución:

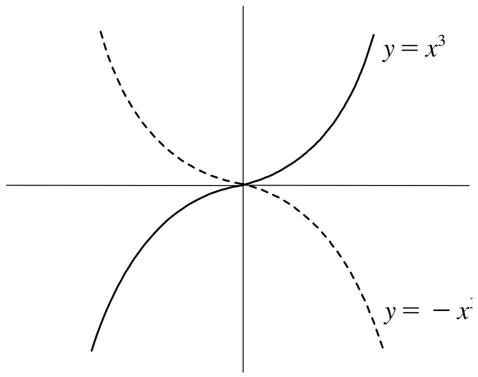
a) $y = f(x) + 2$ es una traslación vertical en 2 unidades hacia arriba



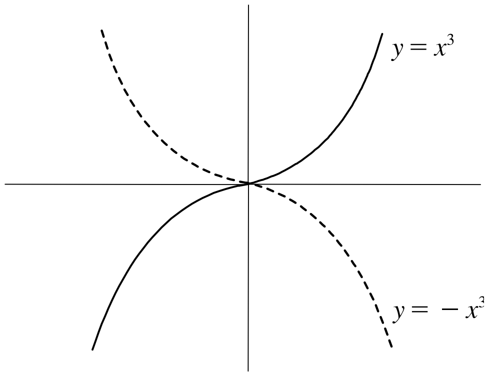
b) $y = f(x + 2)$ es una traslación horizontal en 2 unidades a la izquierda



c) $y = -f(x)$ es una reflexión de $f(x)$ con respecto del eje OX



d) $y(x) = f(-x)$ es una reflexión de $f(x)$ respecto del eje OY



10. Calcular si es posible la inversa de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \dfrac{x+3}{4}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3+7}{2}$

<u>**Solución:**</u>

a) Sea $y = \dfrac{x+3}{2}$, intercambiando las variables $x = \dfrac{y+3}{4}$ y despejando "y" se obtiene que:

$$y = 4x - 3$$

luego $g^{-1}(x) = 4x - 3$. Se puede comprobar que este resultado es correcto mediante la siguiente operación de composición de funciones:

$$\left(g \circ g^{-1}\right)(x) = g(4x-3) = \frac{4x-3+3}{4} = x$$
$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right) = 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3 = x$$

b) En este caso $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y, llamando $y=\dfrac{2x^3+7}{5}$ y de nuevo cambiando las variables $x=\dfrac{2y^3+7}{5}$ resulta

$$\begin{gathered}5x-7=2y^3\\ y=\sqrt[3]{\frac{5x-7}{2}}\end{gathered}$$

de donde se deduce que $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\dfrac{5x-7}{2}}$. Se puede comprobar que

$$(f\circ f^{-1})(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$$

11. Hallar el cociente $P(x)=Q(x)$ donde $P(x)=x^3+5x^2-22x-56$ y $Q(x)=x-4$.

Solución:

$$\begin{array}{rl}
x^3+5x^2-22x-56 & \left|\underline{\,x-4\qquad\qquad}\right. \\
\underline{-(x^3-4x^2)}\qquad\qquad\quad & \;x^2+9x+14 \\
9x^2-22x-56 & \\
\underline{-\left(9x^2-36x\right)}\qquad & \\
14x-56 & \\
\underline{-(14x-56)} & \\
0 &
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\frac{x^3+5x^2-22x-56}{x-4}=x^2+9x+14$$

12. Calcular las raíces del siguiente polinomio:

$$P(x)=x^3-4x+5x-2$$

Solución:

El término constante es 2 con divisores enteros ± 2 y ± 1 . Además, $P(1)=1-4+5-2=0$, luego 1 es raíz de $P(x)$. Dividiendo $P(x)$ por $x-1$ mediante el método de Rufini se obtiene

$$P(x)=(x-1)\cdot Q(x)\text{ , donde }\ Q(x)=x^2-3x+2$$

Calculamos ahora las raíces de $Q(x)$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Así pues tenemos que $P(x) = (x-1)^2(x-2)$ y entonces sus raíces son $x = 1$ (doble) y $x = 2$.

13. Calcular $625^{0.75}$ y $32^{-3/5}$.

<u>Solución:</u>

$$625^{0.75} = 625^{3/4} = (625^{1/4})^3 = 5^3 = 125$$

$$32^{-3/5} = (32^{1/5})^{-3} = 2^{-3} = 1/8$$

14. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{x^{-2}y^{2/3}}{x^4y^{-4/3}}\right)^{-1/3}$$

<u>Solución:</u>

$$\left(\frac{x^{-2}y^{2/3}}{x^4y^{-4/3}}\right)^{-1/3} = \left(x^{-6}y^2\right)^{-1/3} = x^2y^{-2/3} = \frac{x^2}{y^{2/3}}$$

15. Resolver la ecuación $5e^{-3x} = 16$.

<u>Solución:</u>

Tomando logaritmos neperianos: $\ln(5e^{-3x}) = \ln(16)$. Ahora bien,

$$\ln(5e^{-3x}) = \ln(5) + \ln(e^{-3x}); \quad \ln(e^{-3x}) = -3\ln(e^x) = -3x$$

Por lo tanto, $\ln(5-3x) = \ln(16) \Leftrightarrow x = 1/3(\ln(5) - \ln(16)) = 1/3\ln(5/16)$.

16. Dibujar la gráfica de

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4$ teniendo en cuenta la gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{x}$

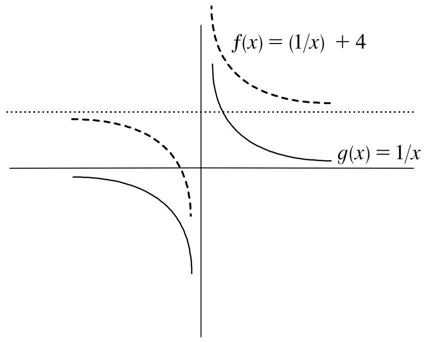
b) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ teniendo en cuenta la gráfica de $g(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = e^{-x}$ teniendo en cuenta la gráfica de $g(x) = e^{x}$

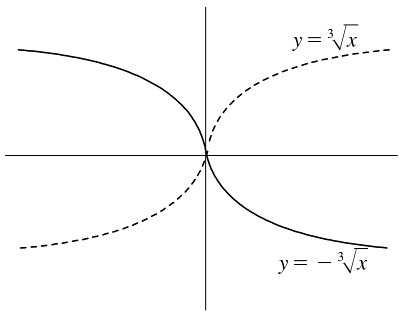
d) $f(x) = \ln(x-2)$ teniendo en cuenta la gráfica de $g(x) = \ln x$

Solución:

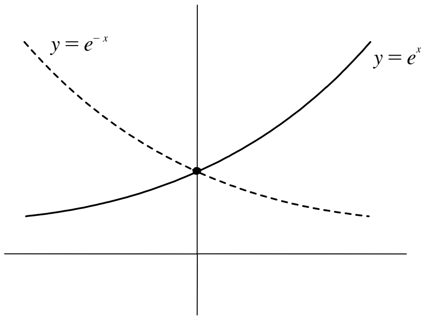
a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4 = g(x) + 4$ es una traslación vertical en 4 unidades hacia arriba.



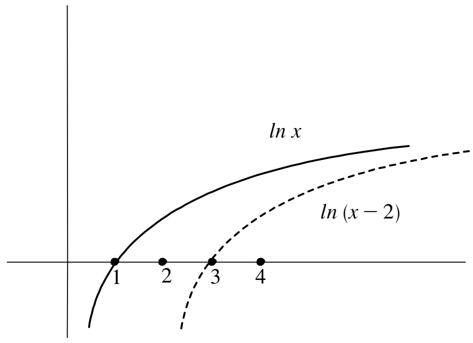
b) $f(x) = -\sqrt[3]{x} = -g(x)$ es una reflexión de $g(x)$ respecto al eje =X.



c) $f(x)$ es una reflexión de $g(x)$ respecto al eje OY.



d) $f(x) = \ln(x-2) = g(x-2)$ es una traslación horizontal de la gráfica de $g(x)$ en dos unidades a la derecha.

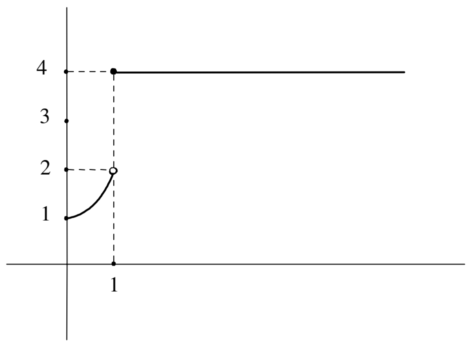


17. Representar las gráficas de las siguientes funciones:

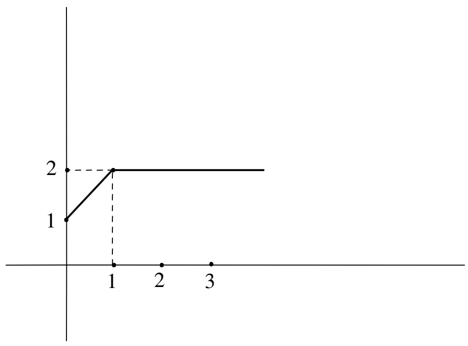
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

<u>**Solución:**</u>

a)

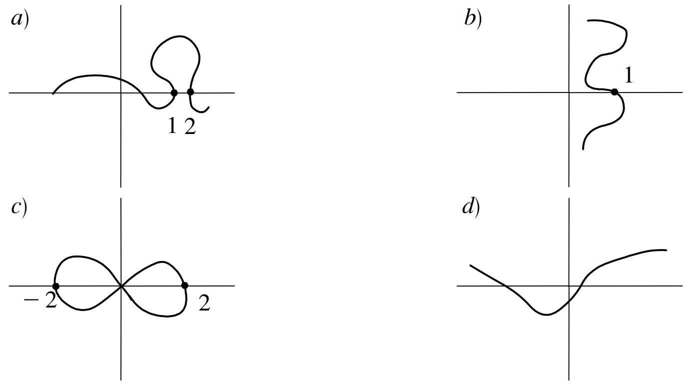


b)



Ejercicios propuestos

1. Determinar cuáles de las siguientes curvas no son gráficas de una función, indicando el motivo.



2. Un rectángulo tiene un perímetro de 40 metros. Expresar la altura del rectángulo en función del lado x de la base.

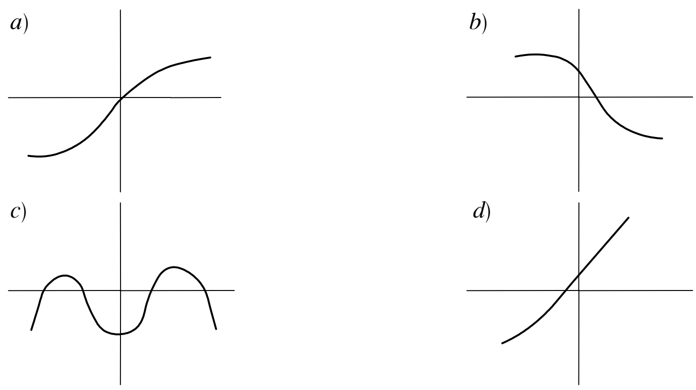
3. Hallar el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ (b) $f_2(x) = \dfrac{2}{x-7}$

(c) $f_3(x) = \ln(x+1)$ (d) $f_4(x) = \sqrt{x-3}$

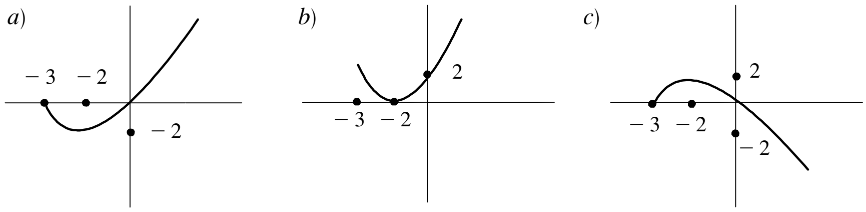
4. Se llama parte entera de un número real x, y se denota por $[x]$, al menor entero que no supera a x. Así, por ejemplo, $[0.24] = 0$, $[7.684] = 7$ y $[11.99] = 11$. Representar la gráfica de la función $[x]$ tomando como dominio $x \geq 0$.

5. Determinar cuáles de las siguientes gráficas de funciones son crecientes o decrecientes en todo $\mathbb{R}$.



6. De las siguientes curvas, indicar cuál de ellas puede ser la gráfica de la función

$$f(x) = x\sqrt{x+3}$$



7. Hallar las raíces reales ($x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 0$) de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^2 - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

(c) $f(x) = \ln(x+1)$ (d) $f(x) = a + \dfrac{1}{2}$

8. Expresar en función de $\ln(2)$ los siguientes valores:

(a) $\ln(4)$

(b) $\ln(\sqrt[3]{2^5})$

9. Decir si las siguientes fórmulas son ciertas o no:

(a) $(\ln(A)^4) = 4\ln(A)$

(b) $\ln(B) = 2\ln(\sqrt{B})$

(c) $\ln(A^{10}) - \ln(A^4) = 3\ln(A^2)$

(d) $\ln(A^4) = 4\ln(A)$

10. Calcular las raíces enteras de la ecuación

$$-x^3 + 4x^2 - x - 6 = 0$$

11. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son válidas para todo x e y?

(a) $(2^x)^2 = 2^{x^2}$ (b) $3^{x-3y} = \dfrac{3^x}{3^y}$

(c) $3^{-1/x} = \dfrac{1}{3^{1/x}}$ (d) $5^{1/x} = \dfrac{1}{5^x} (x \neq 0)$

(e) $a^{x+y} = a^x + a^y$ (f) $2^{\sqrt{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 2^{\sqrt{xy}}$

12. Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, hallar:

(a) $(f(x))^2$ (b) $(g(x))^4$ (c) $f(x) \cdot g(x)$

13. Dadas $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2 + 1$, calcular:

(a) $(f \circ g)(1)$ (b) $(g \circ f)(2)$

14. Dadas las funciones

$$f(x) = x^2 - 9, \quad g(x) = \frac{1}{2x+1}, \quad h(x) = (x-9)^2$$

calcular: (a) $(f \circ g)(x)$ (b) $(f \circ h)(x)$ (c) $(g \circ h)(x)$ (d) $(h \circ f)(x)$

15. Calcular, si es posible, la inversa de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = (2x+1)^3$ (b) $g(x) = \dfrac{3x-1}{2}$ (c) $h(x) = 2x^5 - 3$