Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional
Colegio de Ciencias y Humanidades

CUADERNO DE TRABAJO, PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS III, PARA LOS PROGRAMAS VIGENTES DE MATEMÁTICAS DEL CCH

RESPONSABLE DEL PROYECTO
Israel Gómez Flores

Participantes:
Juan Rodríguez Aguilar
Laura Pérez Rosal
Marycarmen Guillén Acosta
Luis Fernando Arrieta Velazco
Maribel Serrato Duarte

Área Académica: Ciencias Físico Matemáticas y de Las Ingenierías
Línea Temática: Actividades Colegiadas

*'Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-INFOCAB **PB100120**'*

2021

Cuaderno de trabajo para el curso de matemáticas III, para los programas vigentes de Matemáticas del CCH.

____

Primera edición

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM – DGAPA – INFOCAB

PB100120, 2021

____

Autores

Responsable del proyecto: Israel Gómez Flores

Participantes: Juan Rodríguez Aguilar, Laura Pérez Rosal, Luis Fernando Arrieta Velazco, Maribel Serrato Duarte, Marycarmen Guillén Acosta

Cuaderno de trabajo para el curso de matemáticas III, para los programas vigentes de Matemáticas del CCH. —1ª ed. — Ciudad de México, UNAM, 2021. p. 255

ISBN 978-607-30-4907-8

____

1ª edición septiembre 2021.

Universidad Nacional Autónoma de México

Escuela Nacional

Colegio de Ciencias y Humanidades

Plantel Vallejo

DISEÑO DE CUADERNO DE TRABAJO, PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS III, PARA LOS PROGRAMAS VIGENTES DE MATEMÁTICAS DEL CCH.

RESPONSABLE DEL PROYECTO

Israel Gómez Flores

Participantes:

Juan Rodríguez Aguilar

Laura Pérez Rosal

Luis Fernando Arrieta Velazco

Maribel Serrato Duarte

Marycarmen Guillén Acosta

Área Académica: Ciencias Físico Matemáticas y de Las Ingenierías

Línea Temática: Actividades Colegiadas

'Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-INFOCAB ***PB100120****'*

Índice

Introducción. Dentro del perfil del egresado y de los nuevos programas de estudio del Colegio de Ciencias y Humanidades, así como la Orientación y Sentido del Área de Matemáticas, se pretende que el alumno adquiera diversas habilidades, actitudes y valores tales que les permita hacer frente a las demandas que exigen las facultades o el campo laboral. De acuerdo con los nuevos programas de Matemáticas I – IV en donde se establece como columna vertebral trabajar el enfoque de resolución de problemas, de tal forma que se seleccionen problemas que despierten el interés de los alumnos y promuevan el análisis y la reflexión matemática.

Por lo anterior surge la necesidad de desarrollar un material como el cuaderno de trabajo que esté acorde con los nuevos programas de Matemáticas, que funcione como apoyo para el desarrollo de los cursos tanto para los profesores con experiencia como para los de nuevo ingreso del Colegio. En tanto se presenta una propuesta de Cuaderno de Trabajo para el curso de Matemáticas III, que pueda servir como material didáctico de apoyo al nuevo programa de estudio, y al mismo tiempo proporcione una base, de actividades y ejercicios, que puedan orientar el desarrollo del curso, sobre todo a los profesores de nuevo ingreso.
El diseño de un Cuaderno de Trabajo, para el curso de Matemáticas III, está acorde con los objetivos que se plantean en los nuevos programas de estudio, con lo que se busca apoyar la planeación didáctica del curso.

La estructura del cuaderno de trabajo que se presenta, cumple con lo que se señala en el protocolo de equivalencia que es: el conjunto estructurado de técnicas y procedimientos para realizar actividades tanto teóricas como prácticas sobre una o varias unidades del programa, su desarrollo tiene como base los ejercicios graduados y estructurados por medio de estrategias de enseñanza-aprendizaje que resolverán los estudiantes con el apoyo del profesor, incluyendo alternativas para el tratamiento de cada uno de los temas. Incluye: a) una guía para su uso, b) propósitos, c) estrategias de aprendizaje, d) formas de evaluación y e) bibliografía.

Objetivos generales y específicos del proyecto

General:

Diseñar un Cuaderno de Trabajo, para el curso de Matemáticas III, para los programas vigentes de Matemáticas del CCH.

Específicos:

Elaborar estrategias y actividades que estén acordes a los nuevos programas de Matemáticas III.

Elaborar una serie de ejercicios graduados y estructurados, que estén acordes a los aprendizajes señalados en los nuevos programas.

Diseñar instrumentos de evaluación necesarios para el desarrollo del curso de Matemáticas III.

Poner en práctica el material diseñado durante un semestre, para analizar los resultados y realizar los cambios o ajustes necesarios, de acuerdo con la experiencia docente.

ESTRUCTURA DEL CUADERNO DE TRABAJO: El cuaderno de trabajo que se presenta tiene la siguiente estructura:

- Una guía para su uso
- Estrategias de Aprendizaje (Por unidad): Dividida por sesiones de acuerdo con el número de horas que se señala en el programa de estudios.
- Cada unidad cuenta con ejercicios por sesión y una evaluación al final de cada unidad.
- Al final de cada unidad se presenta una serie de problemas de repaso
- Contiene una sección, llamada problemas para investigar
- Se presenta las respuestas a los ejercicios de cada una de las sesiones
- Al final del cuaderno de trabajo se presenta la bibliografía recomendada para alumnos y profesores.

Guía para su uso. El cuaderno de trabajo está diseñado para cubrir las cinco unidades del curso de Matemáticas III, cada una de las unidades esta seccionada por sesiones, estas sesiones corresponden a la división del número de horas que tiene asignada cada unidad, de acuerdo con el programa de estudios, pensando que para el CCH el curso de Matemáticas III se tienen a la semana 3 sesiones, dos de 2 horas y una de una hora (5 horas a la semana).

Cada una de las sesiones, cuenta con una serie de ejercicios, que se podrán trabajar durante las sesiones. Al final de cada sesión, se presenta una serie de problemas que, a consideración de los profesores, se podrán trabajar en la misma sesión (si el tiempo lo permite) o trabajarlo como actividades extra-clase, para que los alumnos reafirmen lo visto en la sesión.

Al final de la unidad se presenta una serie de ejercicios que servirán de repaso, de lo visto durante toda la unidad, también hay una autoevaluación que el profesor podrá utilizar como examen, o como mejor lo considere.

También hay una sección que se denominó, problemas para investigar, que plantea situaciones o problemas, donde el alumno tiene que investigar, resolver problemas de aplicación o de mayor grado de dificultad, en algunas ocasiones se le sugiere hacer uso de algún software matemático, como GeoGebra, para resolverlos. Estos problemas los puede ir trabajando el profesor a lo largo de la unidad, a modo de proyecto, de tal forma que se pueda ir presentando una retroalimentación de lo que se va realizando.

El profesor debe de tomar en cuenta lo siguiente:

- En algunas de las sesiones se sugiere el uso de software, como GeoGebra, por lo que cada profesor deberá planear la forma de usarlo.
- El número de sesiones cubre con el número de horas asignadas a cada unidad.
- Los ejercicios que se presentan están a consideración de cada profesor, para realizarlos fuera o dentro del salón de clase.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS III

UNIDAD I: Elementos de trigonometría

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
JUAN RODRÍGUEZ AGUILAR
LAURA PÉREZ ROSAL
LUIS FERNANDO ARRIETA VELAZCO
MARIBEL SERRATO DUARTE
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

2020- 2021

MATEMÁTICAS III
UNIDAD I

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Propósito:

Utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores.

Elaborado por:
Marycarmen Guillén Acosta

Aprendizajes

Sesión 1: Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.

Sesión 2: Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30, 45 y 60 grados y emplea la calculadora para verificarlos.

Sesión 3: Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos

Sesión 4: Resuelve problemas que involucren triángulos rectángulos

Sesión 5: Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas

Sesión 6: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

Sesión 7: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

Sesión 8: Problemas de aplicación

Sesión 9: Problemas de aplicación

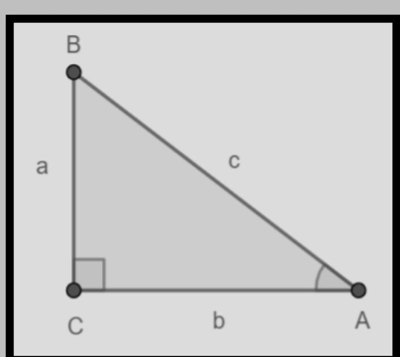
En esta unidad se trabajarán las razones e identidades trigonométricas elementales, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas. Se espera que el alumno adquiera el conocimiento y las habilidades para manipular las razones trigonométricas y resuelva problemas de triángulos rectángulos y oblicuángulos en distintos contextos.

SESIÓN 1 (2 HORAS)

Tema: Razones trigonométricas para ángulos agudos de triángulos rectángulos.
Aprendizaje: Comprende que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.

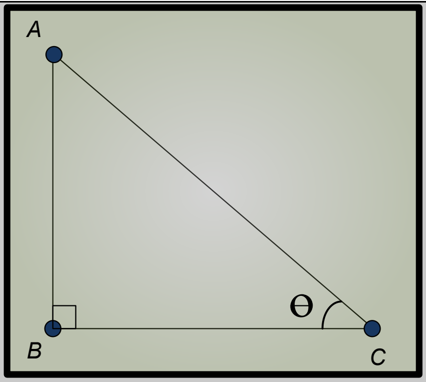
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS AGUDOS

A las razones que existen entre las longitudes de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, se les llaman razones trigonométricas.

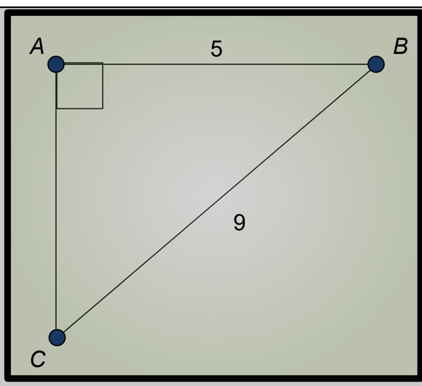
<table>
<tr><td rowspan="6">Razones Trigonométricas
</td><td>El seno del ángulo A, es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa
$$\mathbf{sen\,A} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}$$</td></tr>
<tr><td>El coseno del ángulo A, es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa
$$\mathbf{cos\,A} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}$$</td></tr>
<tr><td>La tangente del ángulo A, es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente
$$\mathbf{tan\,A} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$</td></tr>
<tr><td>La cotangente del ángulo A, es la razón entre el cateto adyacente y el opuesto
$$\mathbf{ctg\,A} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$</td></tr>
<tr><td>La secante del ángulo A, es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente
$$\mathbf{sec\,A} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}$$</td></tr>
<tr><td>La cosecante del ángulo A, es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto
$$\mathbf{csc\,A} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$$</td></tr>
</table>

Nota: Los catetos se nombran según el ángulo agudo que se utilice. Por ejemplo: para el ángulo B, el cateto opuesto será el lado b.

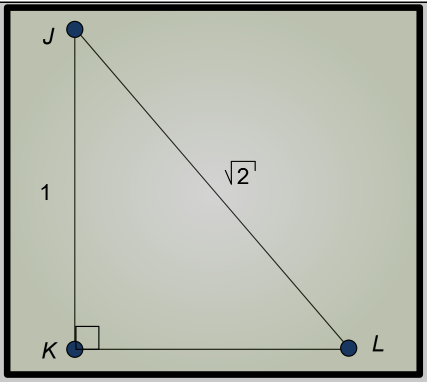
E1.1. Si θ es un ángulo agudo y $\cos\theta = \frac{3}{4}$, determina los valores de las razones trigonométricas para θ.



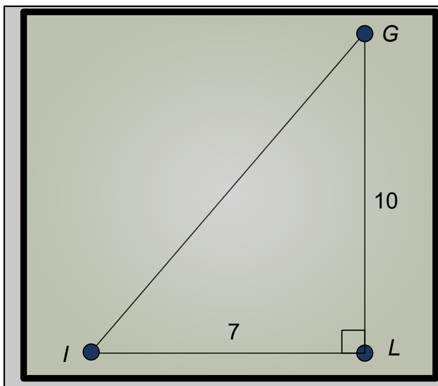
E1.2. Obtén el valor de las razones trigonométricas de los ángulos agudos en el siguiente triángulo.



E1.3. Obtén el valor de las razones trigonométricas de los ángulos agudos para el triángulo JKL.



E1.4. Determina el valor de las razones trigonométricas para el ángulo G.

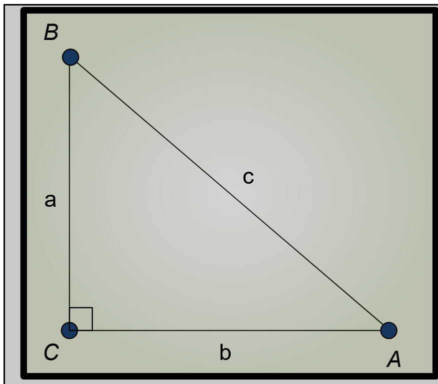


E1.5. Resuelve (determina el valor de sus lados y ángulos) el siguiente triángulo rectángulo según los datos proporcionados:

a) $a = 12, b = 17$

b) $\angle A = 32°, b = 4$

c) $\angle B = 46°, a = 5$



EJERCICIOS SESIÓN 1

E 1.6 Dado el triángulo rectángulo ΔABC. Determina el valor de sus ángulos y lados restantes, según los datos proporcionados.

a) $a = 32 \, , c = 41$

b) $\angle A = 45° \, , a = 13$

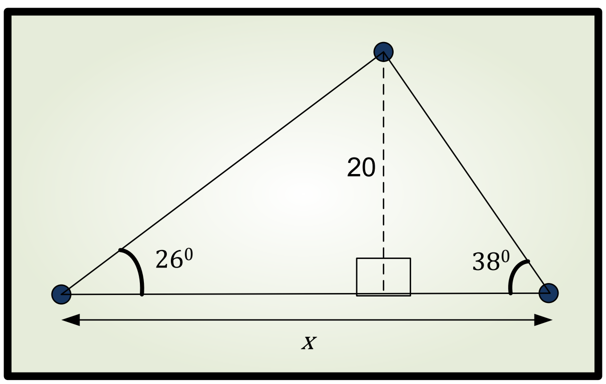
E 1.7 Si α es un ángulo agudo y $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, calcula los valores del seno y coseno del ángulo α.

E 1.8 Obtén el valor de las razones trigonométricas de los ángulos agudos en los siguientes triángulos rectángulos:

a) si $\alpha \; y \; \theta$ son ángulos agudos y $\cos \theta = \frac{1}{4}$

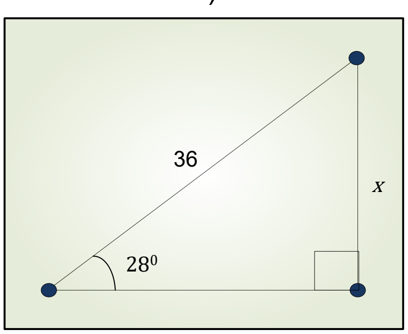
b) si $\alpha \; y \; \beta$ son los ángulos agudos y $\sec \beta = 2\sqrt{3}$

E 1.9 Calcula el valor de la base del siguiente triángulo escaleno

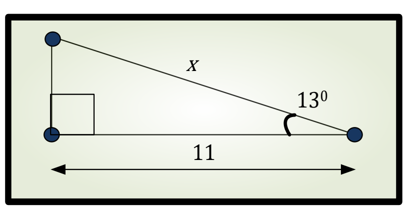


E 1.10 Determina el valor de x utilizando las razones trigonométricas:

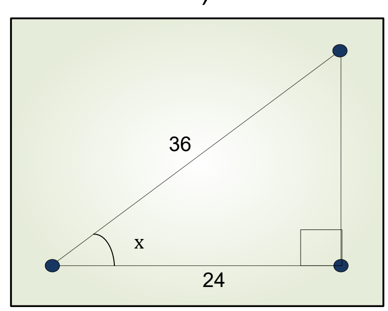
a)



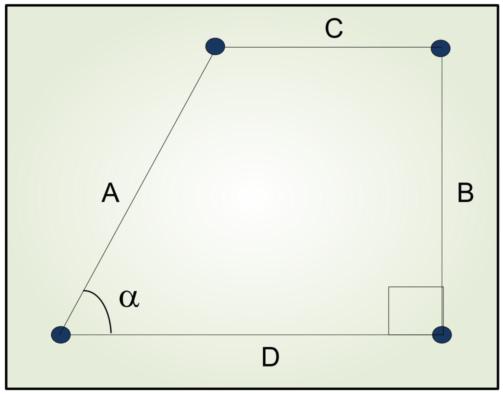
b)



c)

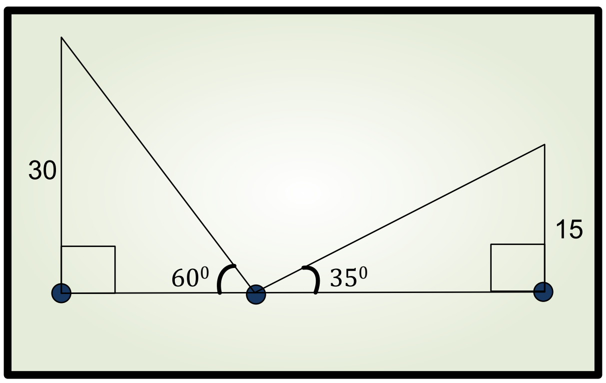


E 1.11 Calcular el perímetro del siguiente polígono



dónde: $\alpha = 58°$, $B = C$ y $A = 24.6m$

E 1.12 Calcular la base de la siguiente figura:



SESIÓN 2 (2 HORAS)

Tema: Solución de triángulos rectángulos especiales

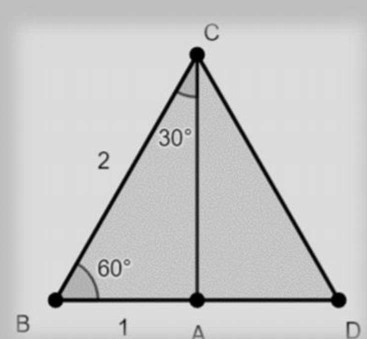
Aprendizaje: Determina los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30, 45 y 60 grados y emplea la calculadora para verificarlos.

VALOR DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS ESPECIALES

Los ángulos que se denominan especiales cuando son utilizados en razones trigonométricas, son los ángulos de $30°$, $45°$ y $60°$. Es muy importante conocer el valor de cada razón trigonométrica de ángulos especiales, esto se puede hacer sin el apoyo de una calculadora y con ayuda de figuras geométricas básicas. Los ángulos especiales se pueden encontrar en un triángulo equilátero, ya que cada ángulo tiene un valor de $60°$, así también se puede encontrar un ángulo de $45°$ haciendo la construcción de un cuadrado.

Para determinar el valor de las razones trigonométricas de los ángulos de $30°\, y\, 60°$, se puede construir un triángulo equilátero de lado igual a 2 (puede utilizarse cualquier valor para la medida de los lados)

Se traza $\overline{CA} \perp \overline{BD},\ \overline{CA}$ es bisectriz del $\angle C$ y mediatriz del lado BD.

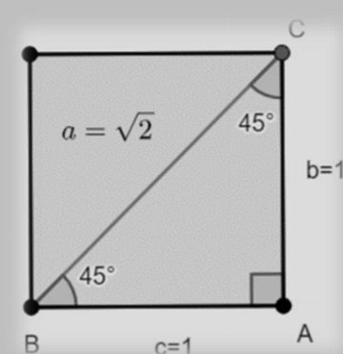


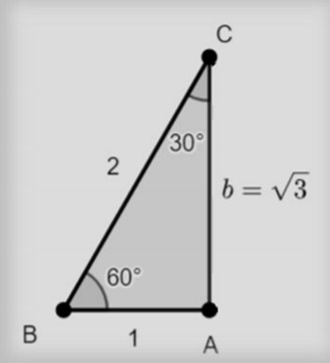
Por lo tanto, en el triángulo BAC, $\angle B = 60°,\ \angle ACB = 30°\ y\ \overline{BA} = 1$

Para obtener el valor del lado $b = \overline{CA}$ se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$\overline{CA}^2 = (2)^2 - (1)^2$$
$$\overline{CA}^2 = 3$$
$$\overline{CA} = \sqrt{3}$$

Para encontrar el valor de las razones trigonométricas del ángulo de $45°$, se puede construir un cuadrado de lado igual a 1 (también se puede utilizar cualquier valor) y trazar su diagonal. De igual manera, se aplica el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa, como se muestra en la siguiente figura:

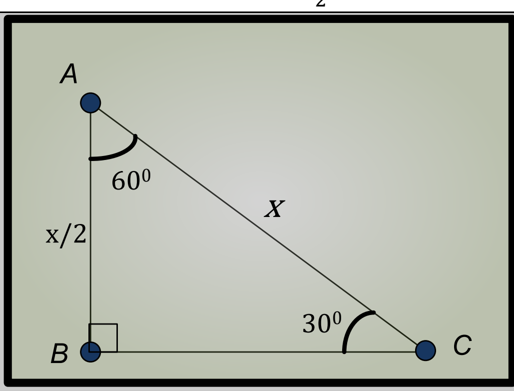


Por lo tanto, los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos especiales, son:

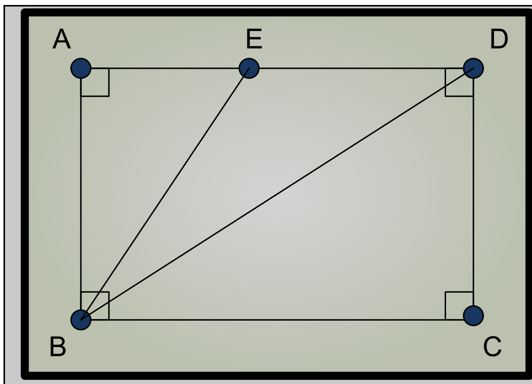
	$30°$	$60°$	$45°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1
Cotangente	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
Secante	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\sqrt{2}$
Cosecante	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$

E1.13 Demuestra que, en el siguiente triángulo rectángulo, si la hipotenusa tiene longitud x y el lado más corto tiene longitud $\frac{x}{2}$, entonces el lado opuesto al ángulo de $60°$ mide $\frac{\sqrt{3}x}{2}$.

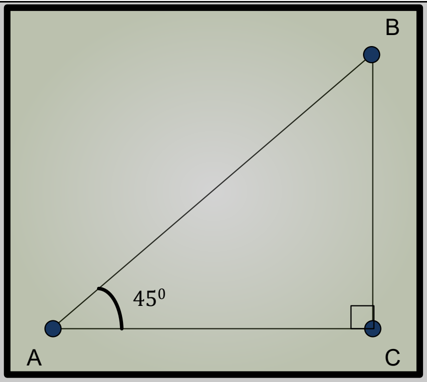


E1.14 Con base en el ejercicio anterior. Si $x = 4$, determina el valor de las razones trigonométricas para los ángulos de $30°$ y $60°$.

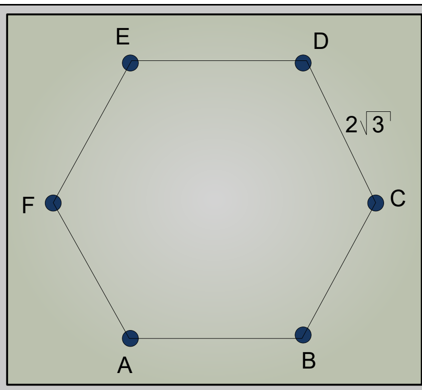
E1.15 En el rectángulo $ABCD, \overline{AB} = 1, \overline{BE}$ y $\overline{BD}$ trisecan al ángulo ABC. Determina el perímetro del triángulo BED.



E1.16 Dado el siguiente triángulo rectángulo, prueba que $BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$



E1.17 Determina el área del siguiente hexágono regular de lado $2\sqrt{3}$.



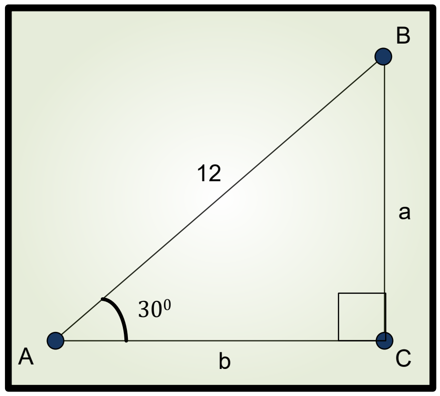
EJERCICIOS SESIÓN 2

E 1.18 Conociendo las razones trigonométricas de $30°, 45°\ y\ 60°$ calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

a) $sen\ 1470°$

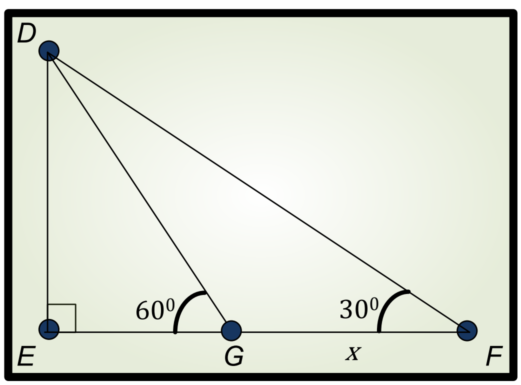
$b)\ cos\ 405°$

E 1.19 Resuelve el triángulo rectángulo que muestra la siguiente figura:

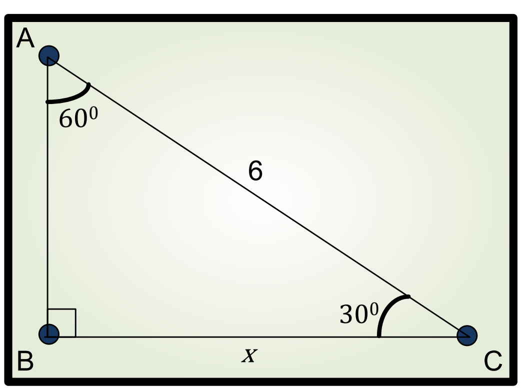


E 1.20 Determina el valor de x en las siguientes figuras:

a)



b)



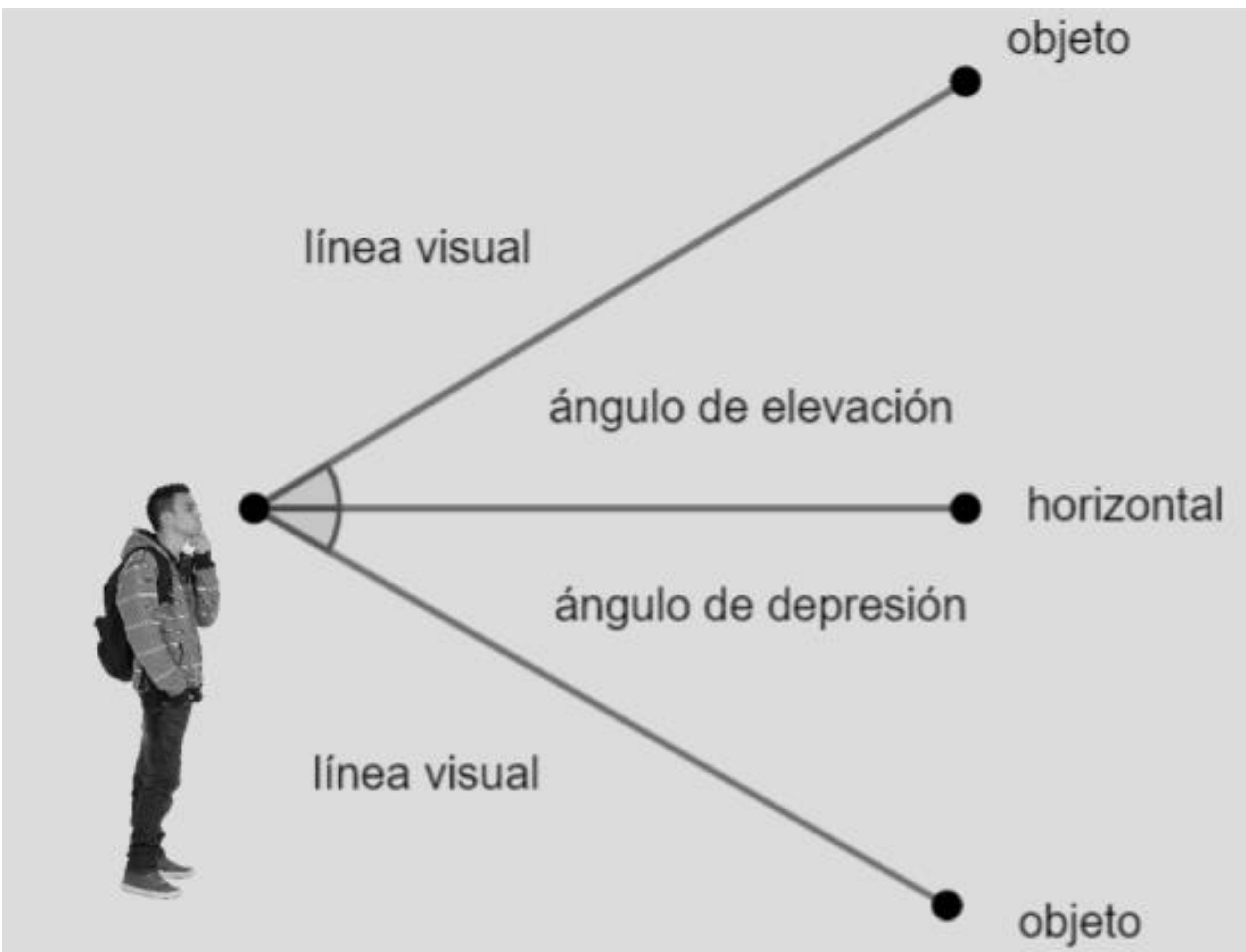
SESIÓN 3 (1 HORA)

Tema: Solución de problemas de aplicación: Ángulos de elevación, ángulos de depresión, distancias inaccesibles y cálculo de áreas.

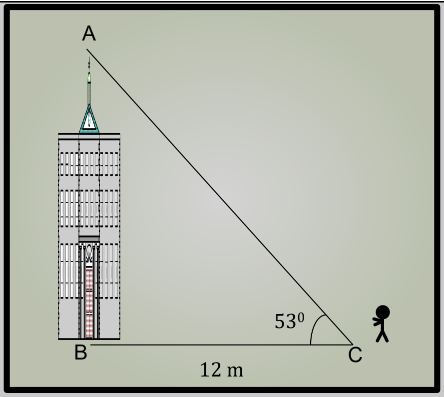
Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos

ÁNGULOS DE ELEVACIÓN Y DEPRESIÓN

Cuando se observa un objeto por arriba de nosotros, existe un ángulo de elevación entre el plano horizontal y la línea de visión hacia el objeto. Similarmente, al observar un objeto debajo de nosotros, se forma un ángulo de depresión entre el plano horizontal y la línea de la visión.

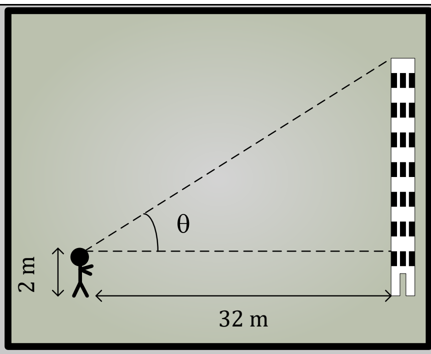


E1.21 Desde un punto en el suelo un estudiante observa la parte más alta de la catedral de Lima, con un ángulo de elevación de $53°$ cuando se encuentra separado 12 m de su base. ¿Cuál es la altura de la catedral?



E1.22 Un niño de estatura de $1.5\ m$ está ubicado a $6\ m$ de una torre y observa su parte más alta con un ángulo de elevación de $53°$ ¿cuál es la altura de la torre?

E1.23 Una persona de dos metros de estatura está ubicada a $32\ m$ de la base de una torre que tiene una altura de $34\ m$. ¿Cuál es el ángulo de elevación con el que la persona divisa la parte más alta de la torre?

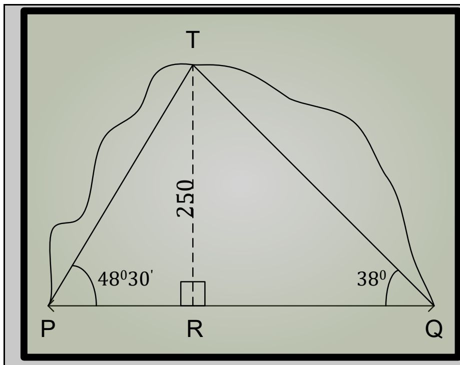


SESIÓN 4 (2 HORAS)

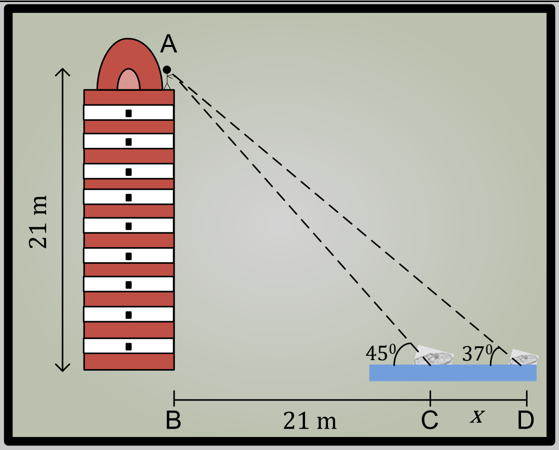
Tema: Solución de problemas de aplicación: Ángulos de elevación, ángulos de depresión, distancias inaccesibles y cálculo de áreas.

Aprendizaje: Resuelve problemas que involucran triángulos rectángulos

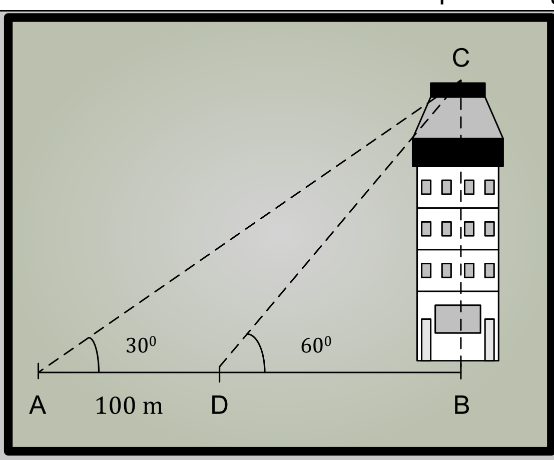
E1.24 En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 metros de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de $48°30´$ desde un punto P en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de $38°$ desde el otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?



E1.25 Carol observa dos barcos desde la parte superior de un faro. Con base en la siguiente figura, determina la distancia que existe entre ambos barcos.



EJERCICIO E1.26 El ángulo de elevación de la parte superior de un museo es de $30°$. Si acercándose $100\ m$ se encuentra que el ángulo de elevación es de $60°$, ¿cuál es la altura del museo?

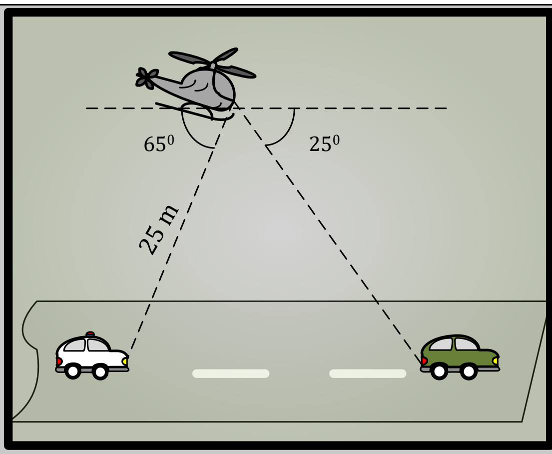


E1.27 Un maleante es perseguido por un patrullero, quien es apoyado desde el aire por un helicóptero. Si el ángulo de depresión desde el helicóptero hasta donde se encuentra el delincuente es de $25°$ y el ángulo de depresión hasta donde se encuentra el patrullero es de $65°$, y su distancia a éste es de 25 metros, calcula:

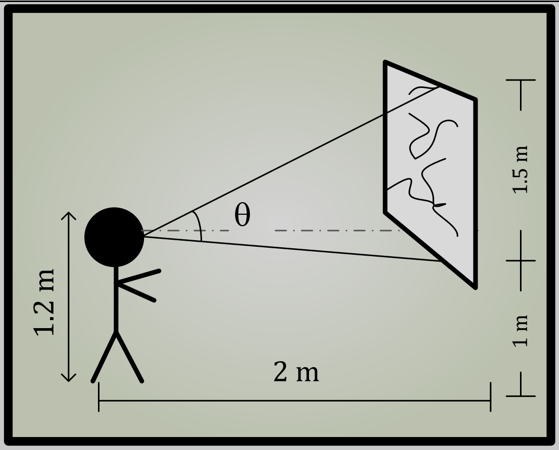
a) La distancia entre el helicóptero y el delincuente

b) La distancia entre el patrullero y el delincuente

c) La altura del helicóptero



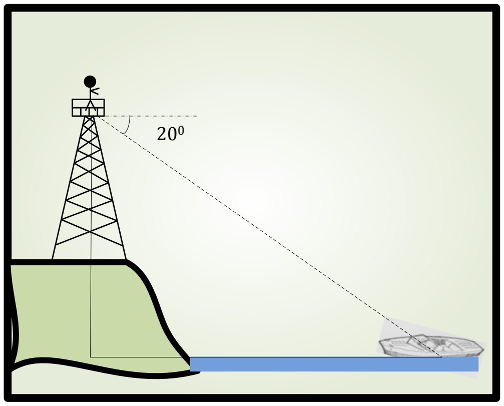
E1.28 Una persona cuyos ojos están a 1.20 metros del suelo, observa una pintura que se encuentra a un metro del suelo y mide 1.5 metros. Dicha persona se encuentra a dos metros de distancia de la pintura. ¿Cuál es su ángulo de visión?



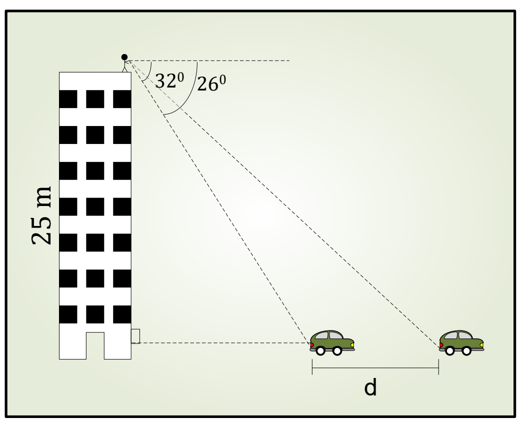
EJERCICIOS SESIÓN 3 Y 4

E 1.29 Se sitúa un punto a 20 metros de un edificio. Si el ángulo de elevación al punto más alto del edificio es de $46°23´$, encuentra la altura del edificio.

E 1.30 En una torre de $40\ m$ que está sobre un peñasco de $65\ m$ de alto junto a una laguna, se encuentra un observador que mide el ángulo de depresión de $20°$ de un barco situado en la laguna. ¿A qué distancia de la orilla del peñasco se encuentra el barco?



E 1.31 Desde lo alto de una torre cuya altura es de 25 metros, se observa un automóvil alejándose de la torre, con un ángulo de depresión de $32°$; si un instante después el ángulo es de $26°$, ¿Qué distancia se ha desplazado el automóvil?



E 1.32 Una persona observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 45°, y el techo del sexto piso con un ángulo de elevación de 37°. Hallar el número de pisos que tiene el edificio.

E 1.33 Dos personas están colocadas a ambos lados de un poste de tal forma que una de ellas observa la parte más alta con ángulo de elevación de 45° y la otra observa el punto medio del poste con el ángulo de elevación de 37°. Hallar la altura del poste si las personas están separadas una distancia de 25 m.

E 1.34 Desde lo alto de un edificio de $24\ m$, se divisa en dirección norte, un árbol con un ángulo de depresión de 74° y en dirección oeste se divisa otro árbol, con un ángulo de depresión de 37°. Hallar la distancia aproximada entre dichos árboles.

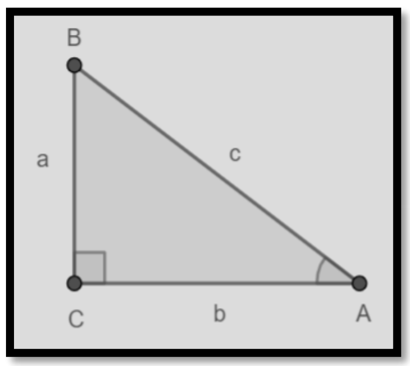
SESIÓN 5 (2 HORAS)

Tema: Identidades trigonométricas fundamentales.

Aprendizaje: Comprende la deducción de algunas identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las que intervienen razones trigonométricas y son verdaderas para cualquier valor angular. Para determinar identidades trigonométricas se utilizan las definiciones del seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

Por ejemplo: En el triángulo, las razones trigonométricas del ángulo A, se definen como:



$$sen\ A = \frac{a}{c}\ ,\ \ \cos A = \frac{b}{c},\ \ \tan A = \frac{a}{b},\ \ ctg\ A = \frac{b}{a}, \sec A = \frac{c}{b}, \csc A = \frac{c}{a}$$

Al multiplicar una razón trigonométrica por su recíproca, se obtiene:

$$(sen\ A)(\csc A) = \left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

$$(cosA)(\sec A) = \left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{b}\right) = 1$$

$$(\tan A)(ctg\ A) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

Con lo que se deducen las siguientes identidades, llamadas identidades recíprocas:

$$(sen\ A)(\csc A) = 1$$

$$(cosA)(\sec A) = 1$$

$$(\tan A)(ctg\ A) = 1$$

E1.35 Dado que $sen\alpha \cdot csc\alpha = 1, cos\alpha \cdot sec\alpha = 1\ y\ tan\alpha \cdot cot\alpha = 1$, deduce que:

$$sen \propto = \frac{1}{csc \propto}, \qquad tan \propto = \frac{1}{cot \propto}, \qquad csc \propto = \frac{1}{sen \propto}$$

$$cos \propto = \frac{1}{sec \propto}, \qquad cot \propto = \frac{1}{tan \propto}, \qquad sec \propto = \frac{1}{cos \propto}$$

E1.36 Verifica que:

$a)\ \dfrac{sen \propto}{cos \propto} = tan \propto$

$b)\ \dfrac{cos \propto}{sen \propto} = cot \propto$

E1.37 Demuestra la siguiente identidad: $sen\ x = \frac{\cos x}{\cot x}$

E1.38 Verifica que: $sen\beta + cos\beta \cdot cot\beta = csc\beta$

E1.39 Demuestra que $tan \propto +cot \propto = sec \propto \cdot csc\alpha$

EJERCICIOS SESIÓN 5

E 1.40 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $cot \propto \cdot sec\alpha = csc\alpha$

b) $1 + tan^2 \propto = \frac{1}{cos^2 \propto}$

c) $cot^2 \propto +1 = \frac{1}{sen^2 \propto}$

d) $tan \propto \cdot cot\alpha = sen^2\alpha + cos^2\alpha$

e) $sen \propto \cdot sec\alpha = tan\alpha$

f) $sec \propto -sen \propto \cdot \tan\alpha = \cos \propto$

g) $sen \propto (1 + cot \propto) = sen \propto +cos \propto$

SESIÓN 6 (1 HORA)

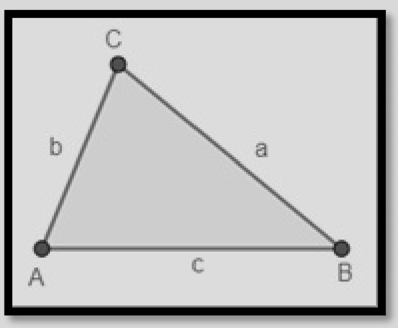
Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos: Ley de senos

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

Un triángulo es oblicuángulo cuando sus tres ángulos son oblicuos; es decir, no tiene un ángulo recto. Para resolver este tipo de triángulos se utiliza la ley de senos o cosenos

LEY DE SENOS

La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes:



$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

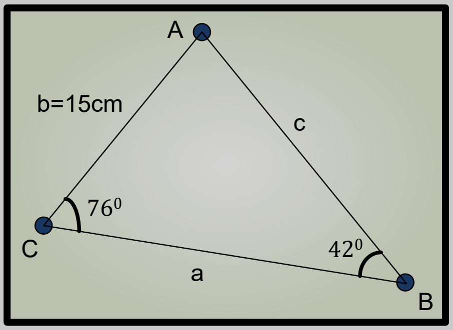
La ley de senos se utiliza cuándo:

1. Los datos conocidos son los lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
2. Los datos conocidos son dos ángulos y cualquier lado

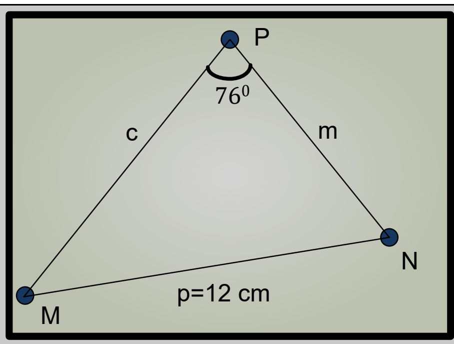
Desigualdad triangular. Se debe recordar que los lados de un triángulo deben de cumplir con la siguiente propiedad:

En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado.

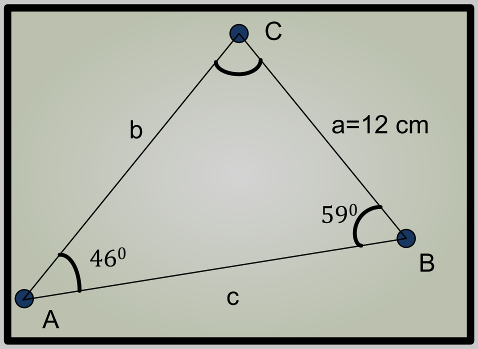
E1.41 En el triángulo ABC, $b = 15\ cm, \angle B = 42°\ y\ \angle C = 76°$. Calcula las medidas de los lados y ángulos restantes.



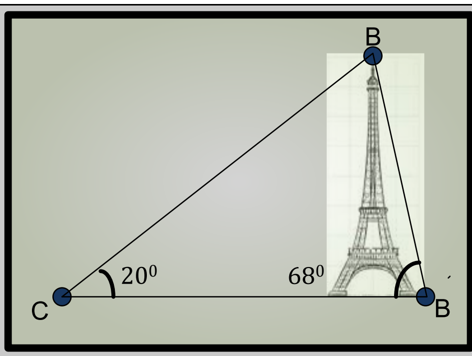
E1.42 En el triángulo MNP, $\angle P = 76°,\ p = 12\ cm\ y\ m = 8$. Resuelve el triángulo.



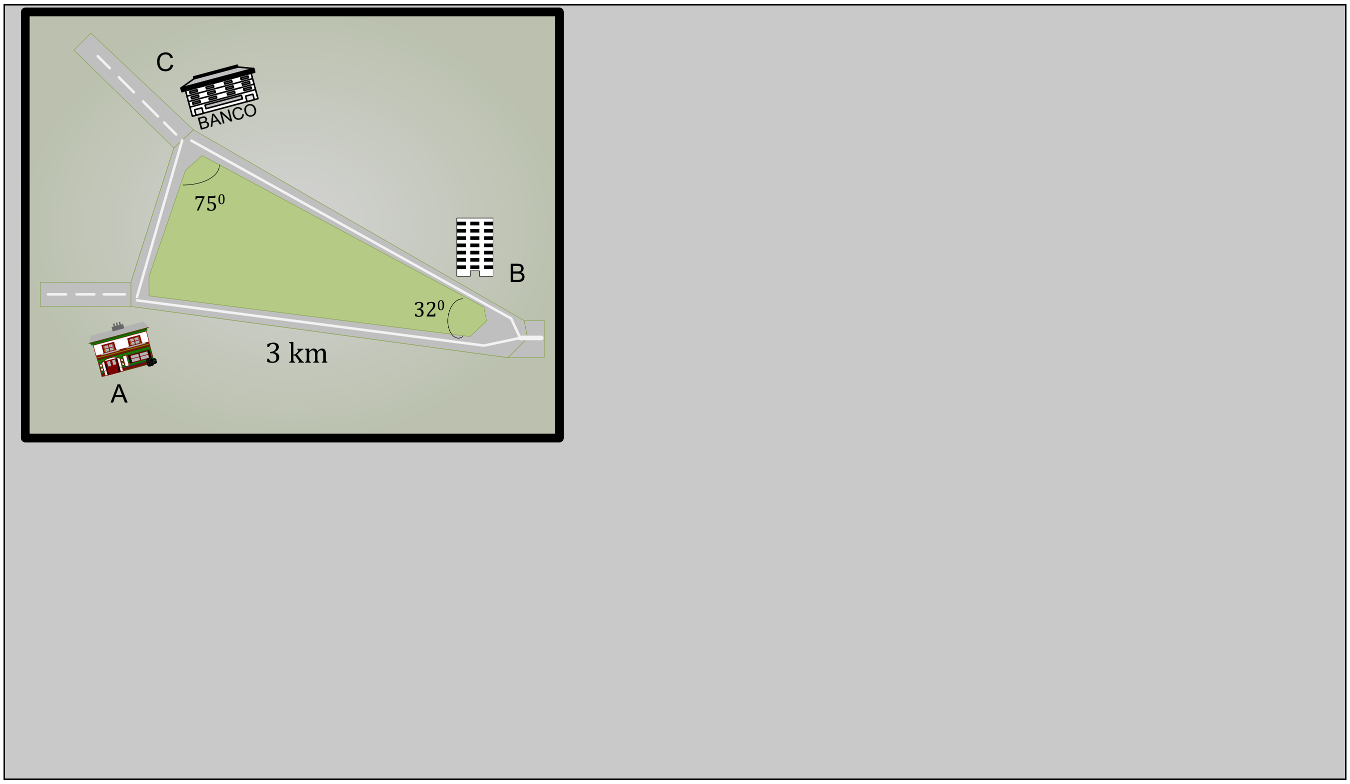
E1.43 En el triángulo ABC, $\angle A = 46°, \angle B = 59° \ y \ a = 12\ cm$. Determina los elementos restantes del triángulo



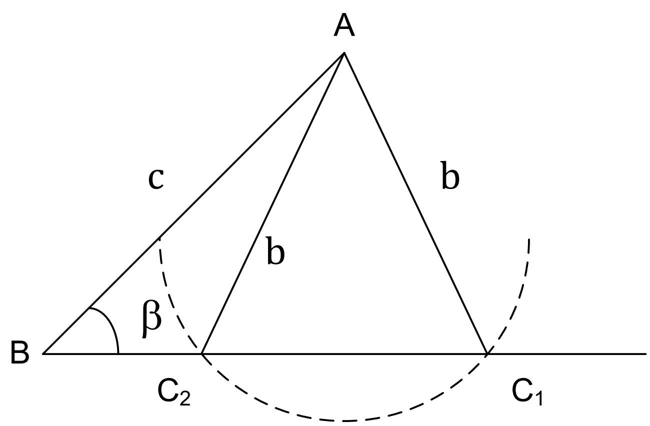
E1.44 Un hombre mide un ángulo de elevación de una torre desde un punto situado a 100 metros de ella. Si el ángulo medido es de 20º y la torre forma un ángulo de 68º con el suelo, determina su altura.



E1.45 Cuando en la sucursal bancaria (como se muestra en la figura) suena una alarma, la señal se recibe en las dos comisarías más cercanas. Los policías de la comisaría A acuden al banco a una velocidad de 90 kilómetros por hora, y los de la comisaría B lo hacen a 100 kilómetros por hora. ¿Qué policías llegarán primero?

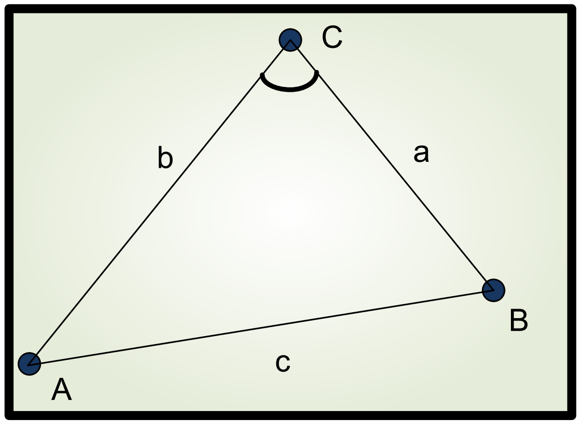


Cuando se da como dato dos lados y un ángulo opuesto a alguno de ellos, se puede tener más de una solución. Lo anterior se muestra en la siguiente figura:



EJERCICIOS SESIÓN 6

E 1.46 Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo, de acuerdo con los datos proporcionados:



a) $\angle B = 57°, \angle C = 43°, b = 18$

b) $\angle A = 63°, \angle C = 37°, c = 32$

c) $\angle A = 85, \angle B = 26,\ c = 43$

d) $a = 5, \angle A = 32°,\ b = 8$

e) $c = 13, b = 10, \angle c = 35°$

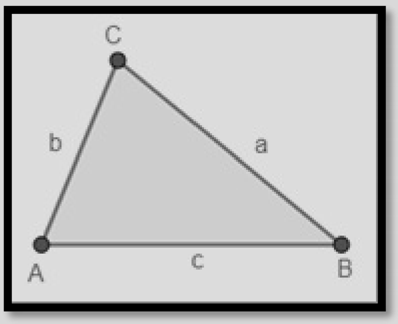
SESIÓN 7 (2 HORAS)

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos: Ley de cosenos

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

LEY DE COSENOS

El cuadrado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido por los lados.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

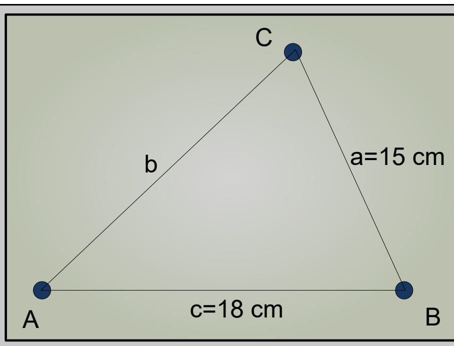
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

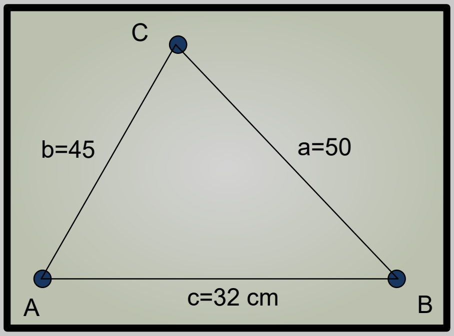
Para utilizar la ley de cosenos en la resolución de problemas, es necesario entender que la podemos aplicar cuando tengamos alguno de los siguientes casos:

1. Se conoce el valor de dos de los lados y el ángulo comprendido entre ellos
2. Se conoce el valor de los tres lados

E1. 47 En el triángulo ABC, $a = 15\ cm, c = 18\ cm, \angle B = 70°$. Determina el valor de los ángulos y lados restantes.

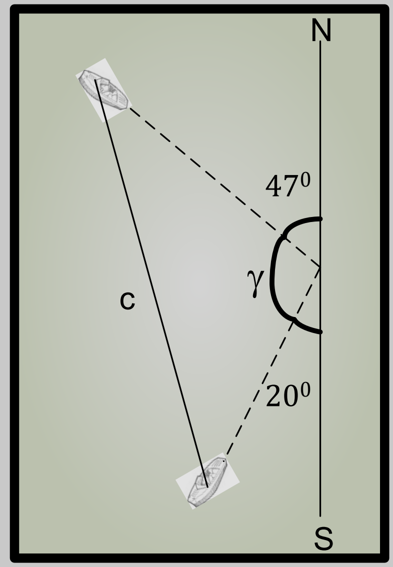


E1.48 Determina el valor de los ángulos interiores del siguiente triángulo.

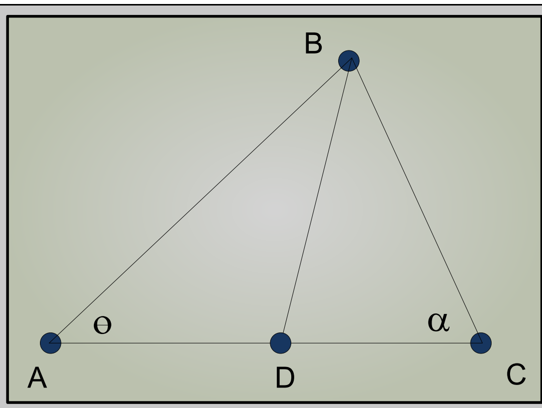


E1.49 Un observador se encuentra en un punto P que dista de dos edificios, 250 m y 380 m, respectivamente. Si el ángulo formado por los dos edificios y el observador es de $38°$, precisa la distancia entre ambos edificios.

E1.50 Dos barcos salen de un puerto a las 7:00 a.m. Uno viaja a 12 nudos (millas náuticas por hora) y el otro a 10 nudos. Si el barco más rápido mantiene un rumbo de N47°O y el rumbo del otro es S20°O, ¿cuál es su separación (redondeando a la milla náutica) a las 11:00 a.m. de ese día?

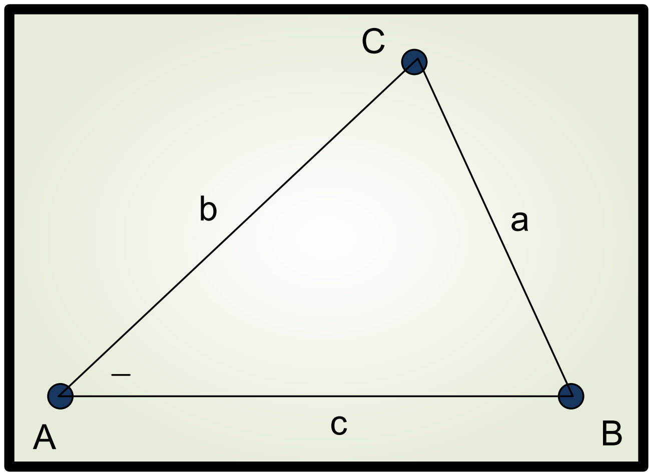


E1.51 En la siguiente figura, $AB = 5\ u, BD = 2\sqrt{3}\ u, DC = 3\ u\ y\ cos \propto = \frac{1}{3}$. Determina el valor del $sen\ \theta$:



EJERCICIOS SESIÓN 7

E 1.52 Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo, de acuerdo con los datos proporcionados:



a) $a = 15, b = 16, c = 26$

b) $a = 32, b = 48, c = 66$

c) $a = 15, b = 12, c = 20$

d) $a = 12. b = 15, \angle C = 68°$

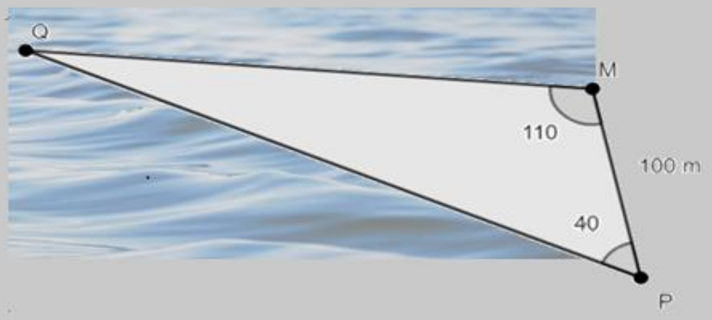
e) $b = 45, c = 75, \angle A = 35°$

SESIÓN 8 (2 HORAS)

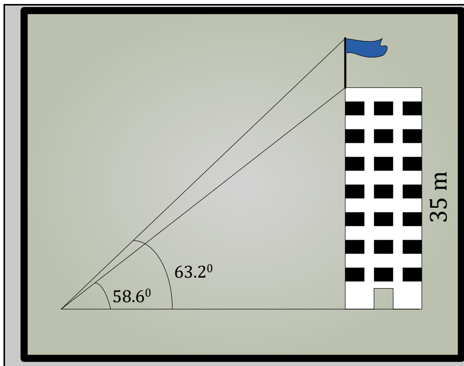
Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

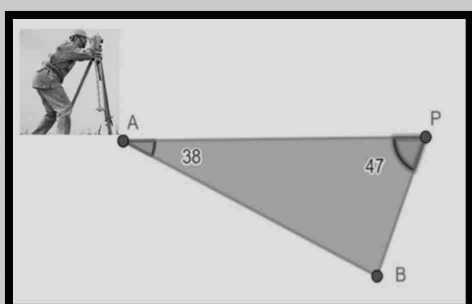
E1.53 Para calcular la distancia entre dos puntos a las orillas de un lago, se establece un punto P a 100 metros del punto M; al medir los ángulos resulta que $\angle M = 110° \ y \ \angle P = 40°$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos M y Q?



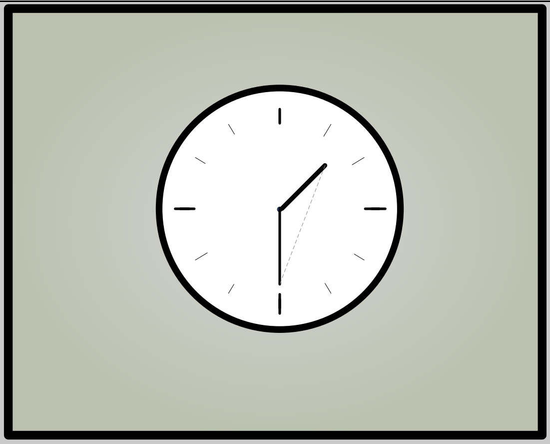
E1.54 Una asta está situada en la parte superior de un edificio de 35 metros pie de altura. Desde un punto en el mismo plano horizontal de la base del edificio los ángulos de elevación de los extremos superior en inferior de la asta son 63.2 ° y 58.6°, respectivamente. ¿Cuál es la longitud de la asta?



E1.55 Para establecer la distancia desde un punto A en la orilla de un rio a un punto B de éste, un agrimensor selecciona un punto P a 500 metros del punto A, $\angle BAP = 38° \; y \; \angle BPA = 47°$, obtén la distancia entre A y B.



E1.56 El horario y el minutero de un reloj miden respectivamente 0.7 y 1.2 cm. Determina la distancia entre los extremos de dichas manecillas a las 13:30 horas.



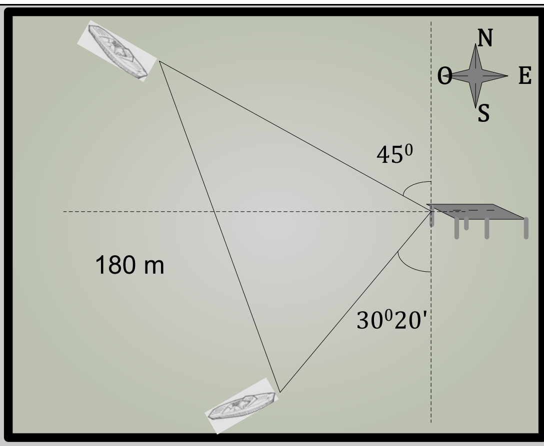
E1.57 Se inscribe un octágono regular de lado 1 cm en una circunferencia; determina el área del círculo.

SESIÓN 9 (1 HORA)

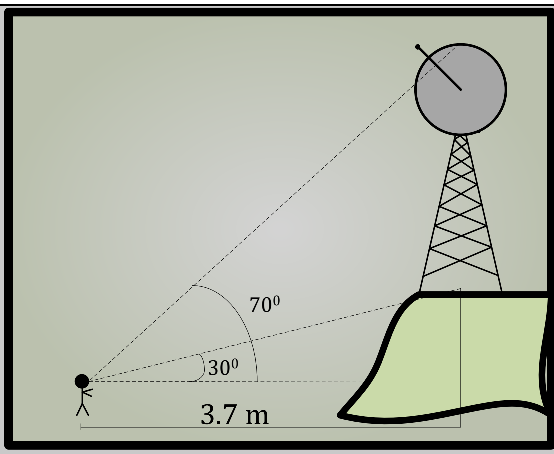
Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

Aprendizaje: Comprende el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

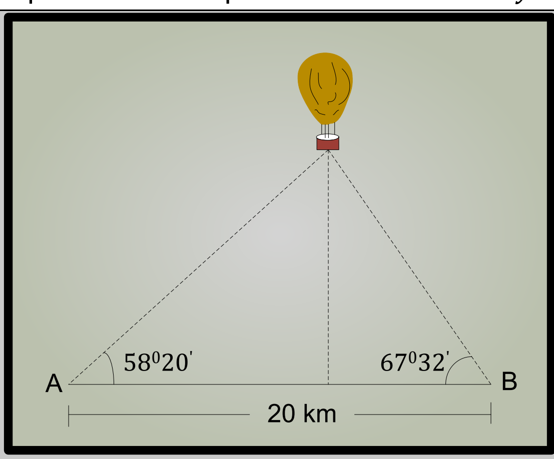
E1.58 Un barco sale de un puerto a las 10:00 a.m. a 10 km/h con dirección al sur de 30°20’O. Una segunda embarcación sale del mismo puerto a las 11:30 h a 12 km/h con dirección norte 45°O. ¿Qué distancia separa a ambos barcos a las 12:30 horas?



E1.59 Una persona se encuentra a 3.7 m de un risco, sobre el cual se localiza una antena. La persona observa el pie de la antena con un ángulo de elevación de 30° y la parte superior de esta con un ángulo de 70°. Determina la altura de la antena.

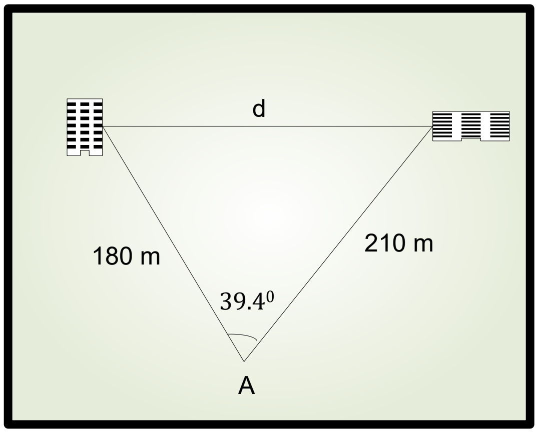


E1.60 La distancia entre dos puntos A y B es de 20 km. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de $58° \ 20' \ y \ 67°32'$. ¿A que altura del suelo se encuentra?

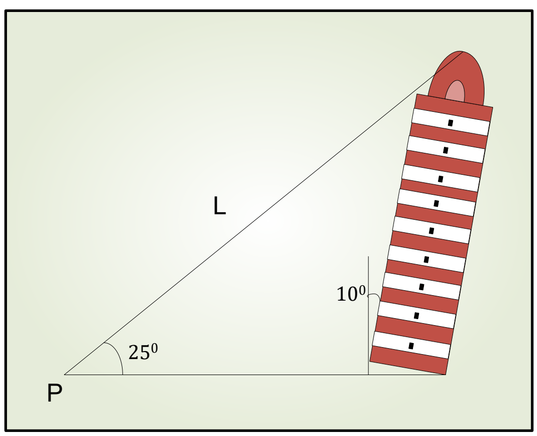


EJERCICIOS SESIÓN 8 Y 9

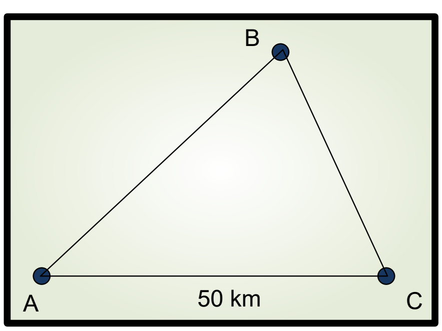
E 1.61 Un ingeniero topógrafo que se le olvidó llevar su equipo de medición, desea calcular la distancia entre dos edificios. El ingeniero se encuentra en el punto A, y los únicos datos que tiene hasta ahora son las distancias de él respecto a los otros edificios, 180 m y 210 m, respectivamente, también sabe que el ángulo formado por los dos edificios y su posición actual "A" es de 39.4° ¿Qué distancia hay entre los dos edificios?



E 1.62 Una torre inclinada 10º respecto de la vertical, está sujeta por un cable desde un punto P a 15 metros de la base de la torre. Si el ángulo de elevación del cable es de 25º, calcula la longitud del cable y la altura de la torre.

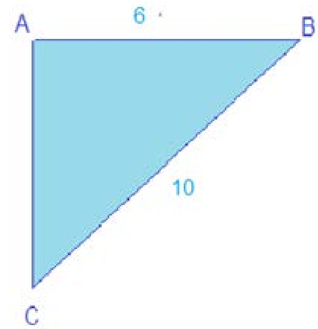


E 1.63 Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos, $\angle A = 46°\ y\ \angle C = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

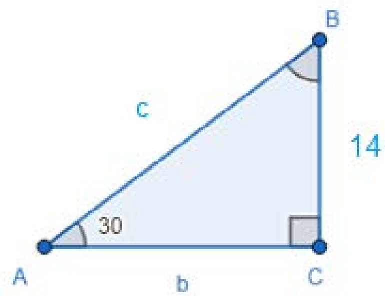


EJERCICIOS DE REPASO

E1.64 Obtén el valor de las razones trigonométricas de los ángulos agudos en el siguiente triángulo.



E1.65 Resuelve el triángulo rectángulo que muestra la siguiente figura



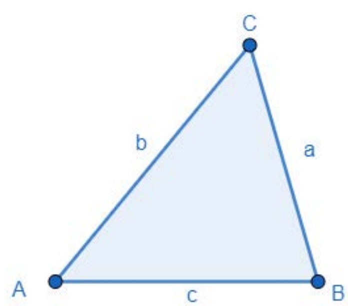
E1.66 Se sitúa un punto a 40 metros de una torre. Si el ángulo de elevación al punto más alto de la torre es de $46°$, encuentra la altura de la torre.

E1.67 Demuestra las siguientes identidades trigonométricas:

a) $tan30° \cdot cot30° = sen^2 30° + cos^2 30°$

e) $sen45° \cdot sec45° = tan45°$

E1.68 Resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo, de acuerdo con los datos proporcionados:



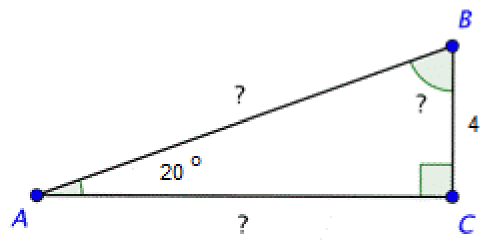
a) $\angle B = 60°, \angle C = 45°, b = 20$

b) $a = 14\ \ b = 17, \angle C = 70°$

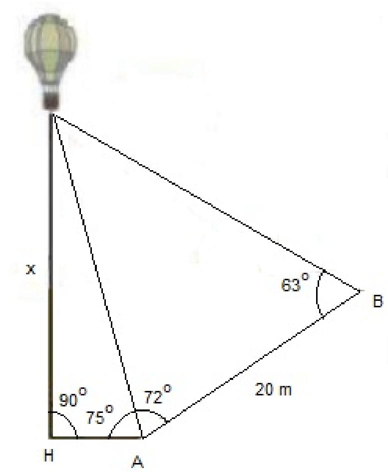
E1.69 Para establecer la distancia desde un punto A en la orilla de una banqueta a un punto B de ésta, una persona selecciona un punto C a 600 metros del punto A,$\angle BAP = 40°\ y \angle BPA = 49°$, obtén la distancia entre A y B.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

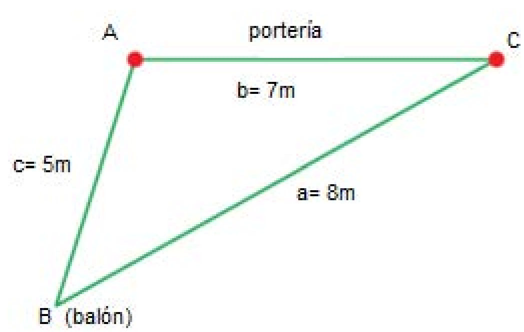
1. Resuelve el siguiente triángulo rectángulo



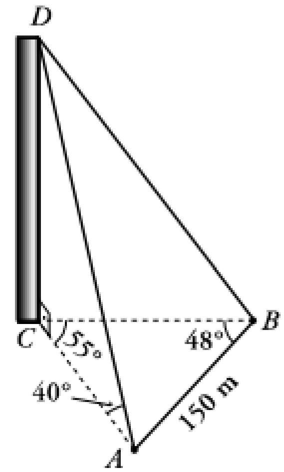
2. Para hallar la altura de un globo, se realizaron las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?



3. En un entrenamiento de futbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



4. Para medir la altura de una torre CD nos hemos situado en los puntos A y B, cuya distancia es de 150 m y hemos tomado las medidas que aparecen en la figura. Determina el valor de la altura de la torre.



5. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{(sen\ 30° + \cos 30°) \cdot \cos 60°}{\cos\ 30° - sen\ 30°} = 1 + sen\ 60°$$

RÚBRICA PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES A LA UNIDAD I DE MATEMÁTICAS III

Temática	Muy bien	Bien	Suficiente	Insuficiente
Razones trigonométricas para ángulos agudos de un triángulo rectángulo	La solución de los ejercicios demuestra completo entendimiento del concepto matemático necesario para resolver el problema **20 puntos**	Opera de manera correcta las razones trigonométricas, aplicando de forma lógica y coherente las propiedades de éstas, en la resolución de problemas **15 puntos**	Opera racionales, mostrando dificultad en la aplicación de sus propiedades, en la resolución de problemas **10 puntos**	No resuelve ejercicios que involucran razones trigonométricas **5 puntos**
Solución de triángulos rectángulos especiales	La solución de los ejercicios demuestra un entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver problemas **20 puntos**	Opera de manera correcta propiedades y valores de las razones trigonométricas para los ángulos de $30°, 45°\ y\ 60°$, en la resolución de problemas **15 puntos**	Utiliza algunas propiedades o valores de las razones trigonométricas para resolver problemas que involucran triángulos rectángulos especiales. **10 puntos**	No resuelve ejercicios que involucran triángulos rectángulos especiales **5 puntos**
Solución de problemas de aplicación: • Ángulo de elevación • Ángulo de depresión • Distancias inaccesibles • Cálculo de áreas	Resuelve de manera correcta los ejercicios planteados, aplicando de forma lógica y coherente la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo en los que están presentes ángulos de elevación, depresión o distancias inaccesibles **20 puntos**	Resuelve ejercicios y problemas que involucran triángulos rectángulos de manera correcta **15 puntos**	Resuelve con dificultad ejercicios y problemas planteados que involucran triángulos rectángulos **10 puntos**	No resuelve ejercicios ni problemas planteados sobre la temática vista **5 puntos**
Identidades trigonométricas fundamentales	Comprende y aplica la deducción de algunas identidades trigonométricas fundamentales **20 puntos**	Aplica las identidades trigonométricas fundamentales para deducir otras identidades importantes **15 puntos**	Utiliza algunas identidades trigonométricas y resuelve con dificultad la deducción de otras **10 puntos**	No resuelve ejercicios que impliquen la deducción o demostración de identidades trigonométricas **5 puntos**
Resolución de triángulos oblicuángulos • Ley de senos • Ley de cosenos • Problemas de aplicación	Resuelve de manera correcta los ejercicios planteados, aplicando de forma lógica y coherente la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo oblicuángulo **20 puntos**	Opera de manera correcta las leyes de senos y cosenos en la resolución de problemas **15 puntos**	Utiliza algunas propiedades para resolver problemas que involucran triángulos oblicuángulos **10 puntos**	No resuelve ejercicios que involucran triángulos oblicuángulos **5 puntos**

PROBLEMA PARA INVESTIGAR

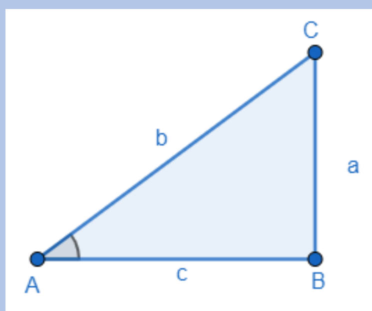
¿Te has preguntado cómo se sabe la distancia que existe de la tierra al sol?

Aristarco de Samos fue un astrónomo y matemático griego que vivió en el siglo III A.C. Su descubrimiento más importante es haber estimado la distancia que existe entre el sol y la tierra.
Se dio cuenta que cuando la superficie lunar estaba iluminada a la mitad, el ángulo que formaba el sol, la luna y la tierra era de $90°$ y con ello imagino un triángulo rectángulo. Además, los ángulos de cualquier triángulo suman $180°$. Con este segundo dato, el problema al que se enfrentó era determinar el ángulo que forman la Tierra y el Sol, como él se encontraba en la tierra como observador, lo pudo medir, estimando que dicho ángulo media $87°$. Con estos datos pudo estimar la distancia que existe entre la tierra y el sol, tomando en cuenta la distancia que existe entre la tierra y la luna.

Investiga cuál es la distancia que existe entre la tierra y la luna y tomando en cuenta las ideas y los datos proporcionados por Aristarco, determina la distancia estimada entre el sol y la tierra.

FORMULARIO DE LA UNIDAD

Razones Trigonométricas



$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$cos\ A = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tan\ A = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{a}{c}$$

$$cot\ A = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a}$$

$$sec\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{c}$$

$$csc\ A = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a}$$

Identidades trigonométricas fundamentales

Recíprocas

$$\operatorname{sen} \propto = \frac{1}{\csc \propto} \quad \cos \propto = \frac{1}{\sec \propto} \quad \tan \propto = \frac{1}{\cot \propto}$$

$$\cot \propto = \frac{1}{\tan \propto} \quad \csc \propto = \frac{1}{\operatorname{sen} \propto} \quad \sec \propto = \frac{1}{\cos \propto}$$

Identidades de cociente

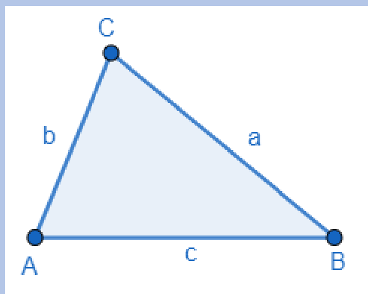
$$\tan \propto = \frac{\operatorname{sen} \propto}{\cos \propto} \quad \cot \propto = \frac{\cos \propto}{\operatorname{sen} \propto}$$

Pitagóricas

$$\boldsymbol{sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1}$$

$$\boldsymbol{1 + tan^2 \propto = sec^2 \propto}$$

$$\boldsymbol{1 + cot^2 \propto = csc^2 \propto}$$

Leyes de senos y cosenos  	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$
	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cosA$
	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$
	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cosC$

RESULTADOS DE EJERCICIOS Y EVALUACIÓN

No. Ejercicio	Respuesta
E 1.6	a) $b = 25.6 \quad < A = 51.30° \quad < B = 38.69°$ b) $c = 18.38 \quad b = 13 \quad < B = 45°$
E 1.7	$sen\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad cos \propto = \frac{2}{\sqrt{5}}$
E 1.8	a) $\text{sen}\theta = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \cos\theta = \frac{1}{4} \quad \tan\theta = \sqrt{15} \quad \text{ctg}\theta = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \sec\theta = 4 \quad \csc\theta = \frac{4}{\sqrt{15}}$ $\text{sen}\alpha = \frac{1}{4} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \text{ctg}\alpha = \sqrt{15} \quad \sec\alpha = \frac{4}{\sqrt{15}} \quad \csc\alpha = 4$ b) $\text{sen}\beta = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \quad \cos\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \tan\beta = \sqrt{11} \quad \text{ctg}\beta = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad \sec\beta = 2\sqrt{3} \quad \csc\beta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \quad \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} \quad \text{ctg}\alpha = \sqrt{11} \quad \sec\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \quad \csc\alpha = 2\sqrt{3}$
E 1.9	$\text{base} = 66.59$
E 1.10	a) $x = 16.90$ b) $x = 11.29$ c) $x = 48.19°$
E 1.11	$\text{perímetro} = 100.21\text{ m}$
E 1.12	$\text{base} = 38.74$
E 1.18	a) $\text{sen } 1470° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ b) $\cos 405° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
E 1.119	$< B = 60°, \; a = 6, \; b = 10.39$
E 1.20	a) $x = \frac{170}{\sqrt{3}}$ $b)\ 3\sqrt{3}$
E 1.29	21 m
E 1.30	288.5 m
E 1.31	11.25 m
E 1.32	8 pisos
E 1.33	15 m
E 1.34	25 m
E 1.40	*Dado que las deducciones o demostraciones no son únicas, se sugiere solicitar una revisión al profesor para verificar los planteamientos realizados.*
E1.46	a) $< A = 80°, c = 14.63, a = 21.13$ b) $< B = 80°, a = 47.37, b = 52.36$ c) $< C = 69°, a = 45.88, b = 20.19$ d) $< C = 90.02, < B = 57.98°, c = 9.43$ e) $< A = 118.81°, < B = 26.18°, c = 19.85$
E 1.52	a) $< A = 31.81°, < B = 34.21°, < C = 113.98°$ b) $< A = 27.18°, < B = 43.26°, < C = 109.56°$ c) $A = 48.34°, < B = 36.71°, < C = 94.95°$ d) $c = 15.30, < B = 65.36°, < C = 46.63°$ e) $a = 46.05, < B = 34.08°, < C = 110.91°$

E 1.61	$134.46\ m$
E 1.62	Longitud del cable = 18.03 m altura de la torre = 7.73 m
E 1.63	36.41 km y 40.42 km
Evaluación	
1	$AB = 11.69\ , AC = 10.98 \quad y \quad < B = 70°$
2	*La distancia del globo al punto A es* $25.20\ m$ *La distancia del globo al punto B es* $26.89\ m$ $x = 24.34\ m$
3	$< B = 60°$
4	*La torre tiene una altura de* $114.18\ m$
5	*Dado que las deducciones o demostraciones no son únicas, se sugiere solicitar una revisión al profesor para verificar los planteamientos realizados*

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc Graw–Hill / Interamericana de México.
De Oteysa, E. et al. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.
Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica*. México: Mc Graw–Hill.
Hirsch, C. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. Edit. Mc Graw–Hill.
Holliday, B. et al. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc Graw–Hill.
Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.
Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*, México: Trillas.
Rees, P. & Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México: Reverté.
Ruiz, Basto Joaquín (2005). Geometría Analítica. México: Grupo Patria Cultural.
Swokowski, E. Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.

Para el profesor:

Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc Graw–Hill / Interamericana de México.
Castañeda de Isla, E. (2000). *Geometría analítica en el espacio*. México: UNAM.
De Oteysa, E. et al. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica.* México: Pearson educación.
Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica.* México: Mc Graw–Hill.
Hirsch, C. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. México: McGraw–Hill.
Holliday, B. et al. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc Graw–Hill.
Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*. México: Trillas.
Ramírez, A. (2013). *Geometría Analítica, una introducción a la geometría*. México: UNAM–Facultad de Ciencias.
Rees, P. & Sparks, F. (1984). *Trigonometría*. México, Reverté.
Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural.
Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* (13ª ed.) México: Cengage Learning.
Matemáticas, C. N. (2009). *Matemáticas Simplificadas*. México: Pearson.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS III

UNIDAD II: Elementos Básicos de Geometría Analítica.

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
JUAN RODRÍGUEZ AGUILAR
LAURA PÉREZ ROSAL
LUIS FERNANDO ARRIETA VELAZCO
MARIBEL SERRATO DUARTE
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

2020- 2021

MATEMÁTICAS III UNIDAD II	**Elementos básicos de geometría analítica**
Propósito: Será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico. Elaborado por: Maribel Serrato Duarte	**Aprendizajes** **Sesión 1:** Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa. **Sesión 2:** Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer. Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones. **Sesión 3:** Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento. Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento. Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos. **Sesión 4:** Localiza los puntos de división de un segmento. **Sesión 5:** Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico **Sesión 6:** Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico

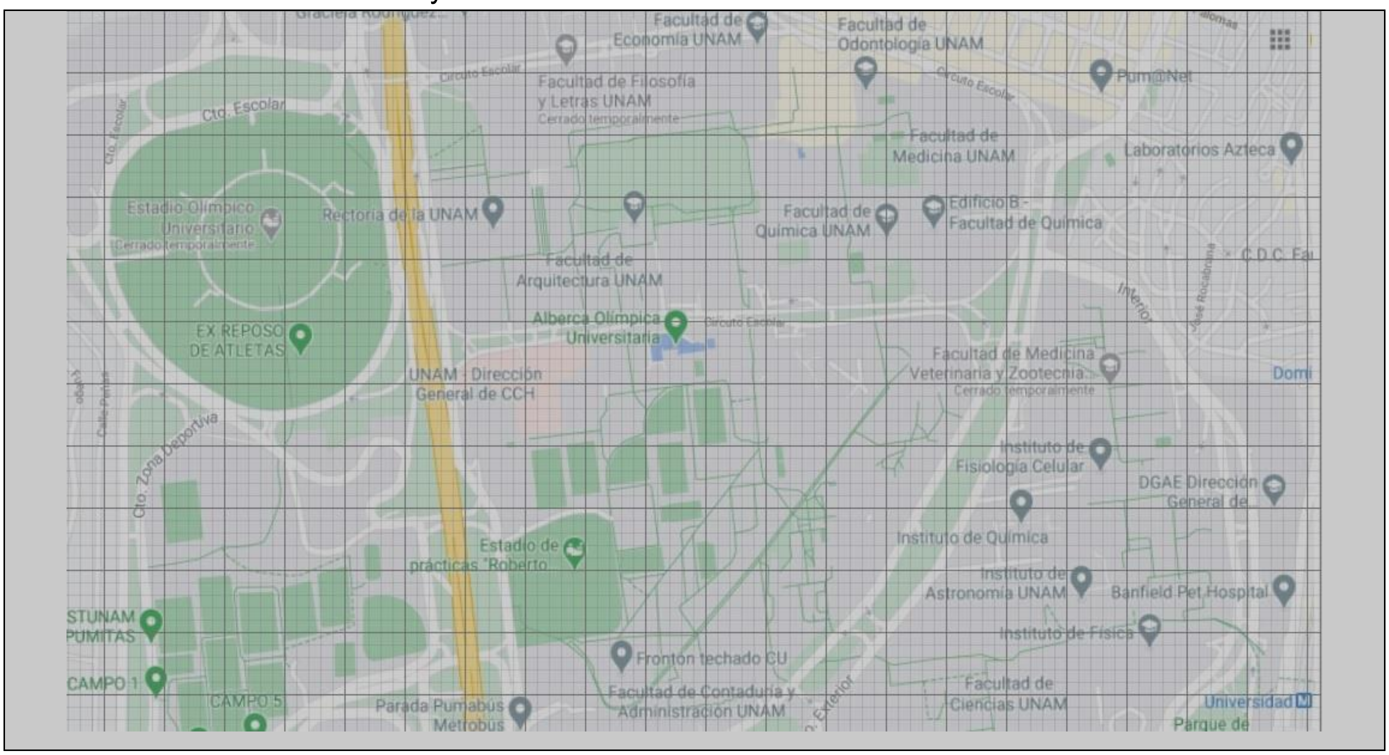
En esta unidad se abordará el plano cartesiano, donde se representará un segmento, determinando su longitud del segmento, ángulo de inclinación, pendiente, así como determinar puntos especiales sobre un segmento, como el punto medio. Además, se da una introducción a lugares geométricos en el plano cartesiano, en sus distintos registros de representación.

SESIÓN 1 (2 HORAS)

Tema: Representación de puntos en el plano de coordenadas rectangulares.

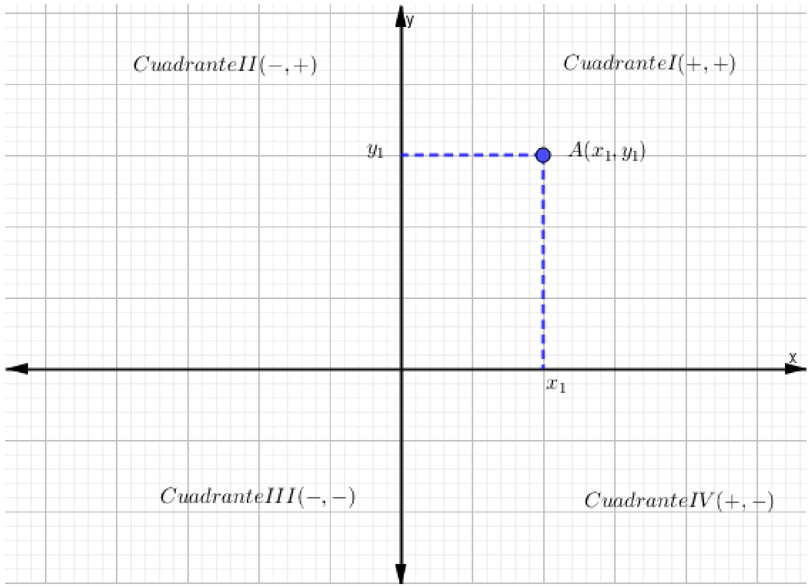
Aprendizaje: Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.

E 2.1. En el siguiente plano establece el sistema de coordenadas donde será tu punto de partida para ubicar al menos a 5 facultades y 3 Institutos en Ciudad Universitaria:



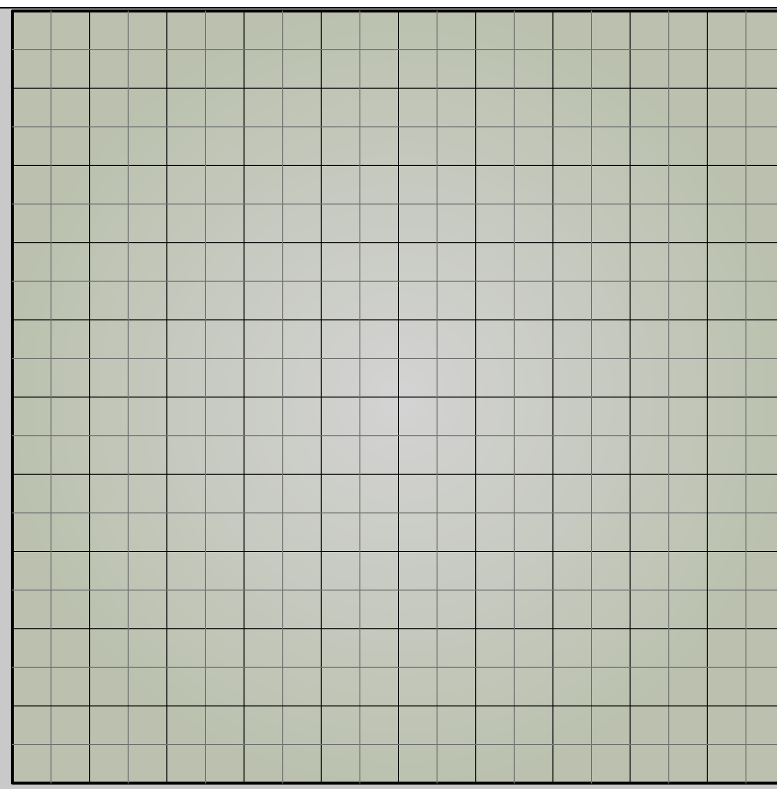
Plano cartesiano

El plano cartesiano llamado en honor a René Descartes, donde dio pauta a la geometría analítica, donde la geometría es álgebra y el álgebra es geometría. El plano cartesiano consiste en dos rectas perpendiculares, donde se puede localizar un punto, es decir, por una pareja ordenada, está comprendida por cuatro cuadrantes, como se muestra a continuación.

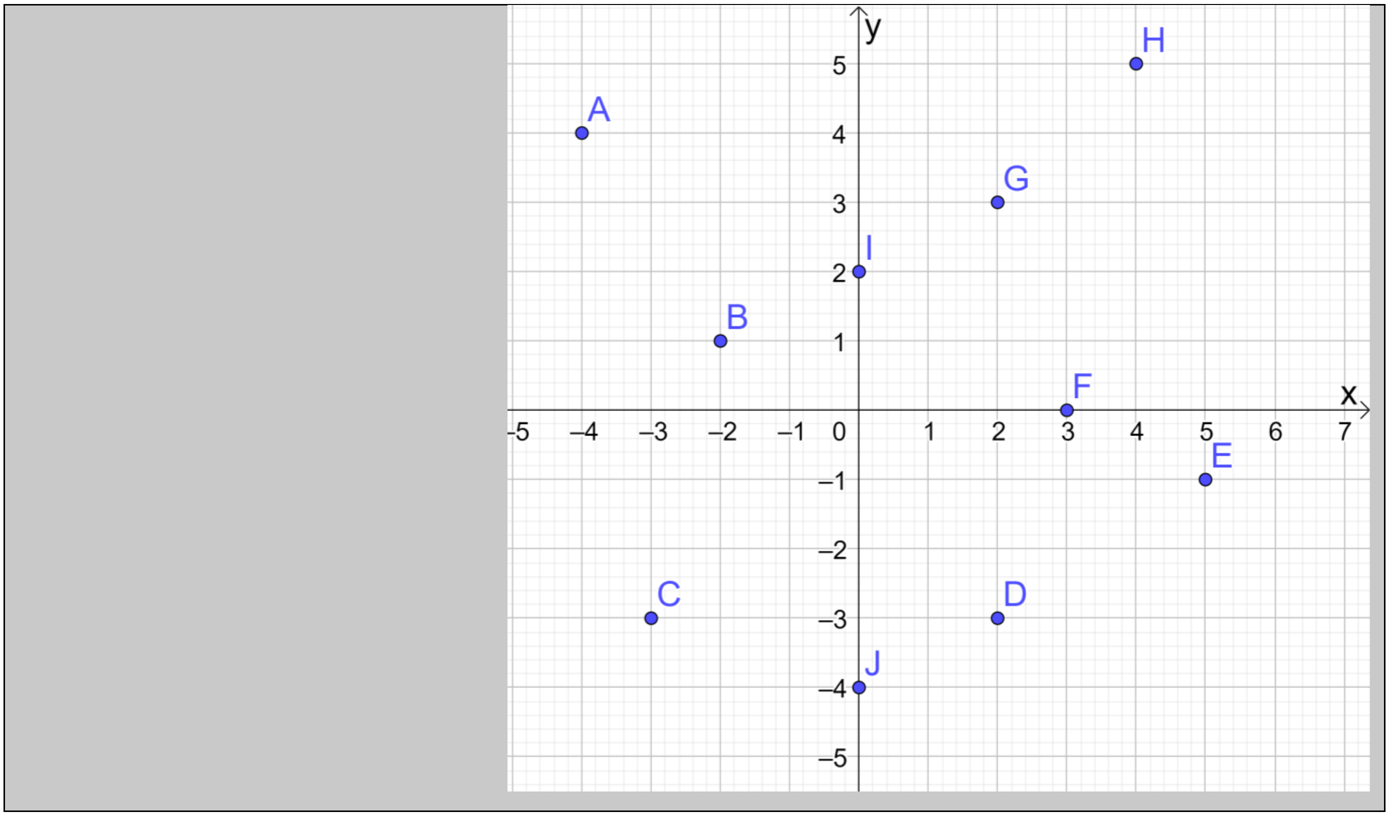


E 2.2. Localiza los siguientes puntos en el plano cartesiano y ajusta la escala para que este se represente adecuadamente:

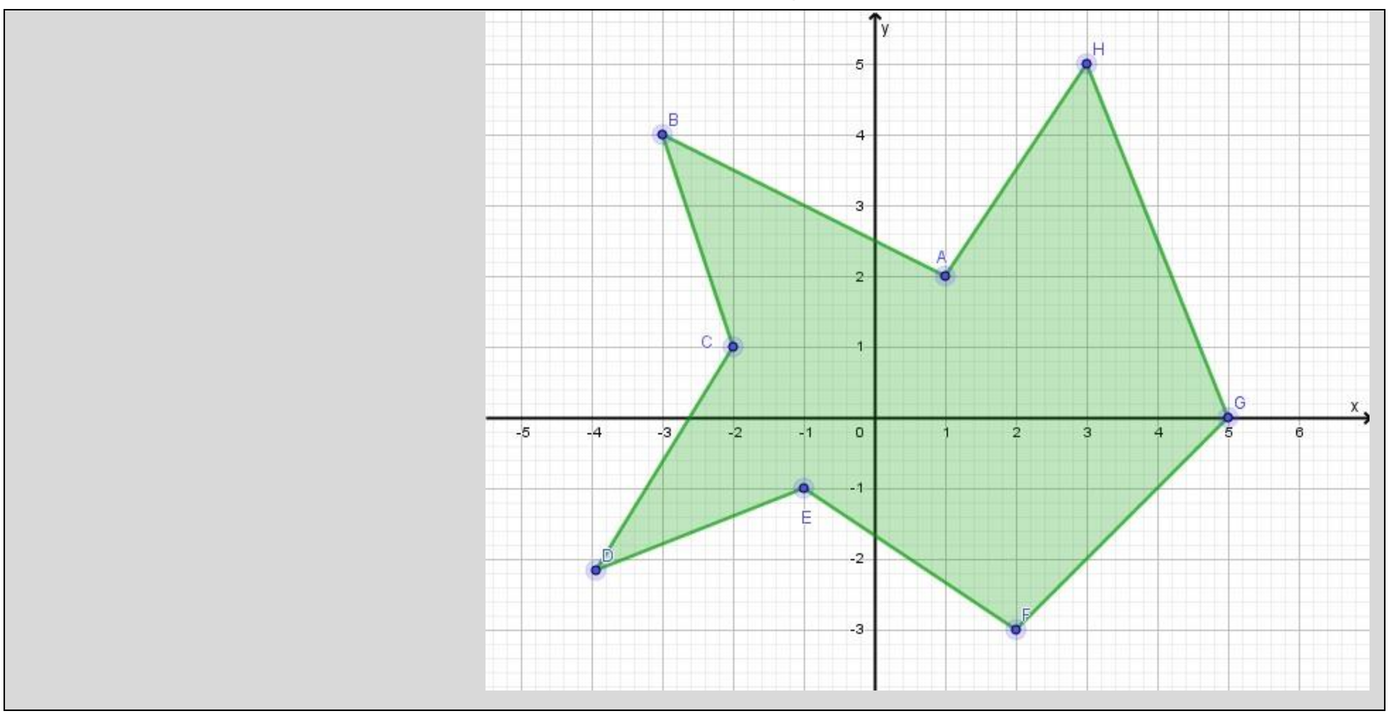
a) A (7, 5)
b) B (-4, 3)
c) C (6, -1)
d) $D\ (-\sqrt{4}, \sqrt{4})$
e) $E\ (\frac{1}{3}, -\sqrt{5})$
f) $F\ (\ \pi\ ,\ \sqrt[3]{8}\ )$
g) $G\ (\ \ 3^2, \sqrt{75}$
h) H (-10, -2)



E 2.3. En el siguiente plano cartesiano hay distintos puntos, indica que coordenadas le corresponden a cada punto.



E 2.4. Determina las coordenadas de los vértices del polígono que se tiene a continuación:



EJERCICIOS SESIÓN 1

E 2.5 Localiza las siguientes coordenadas:

a) $A(7,-3)$

b) $B(-2,-8)$

c) $C(8,9)$

d) $D(5/2,8)$

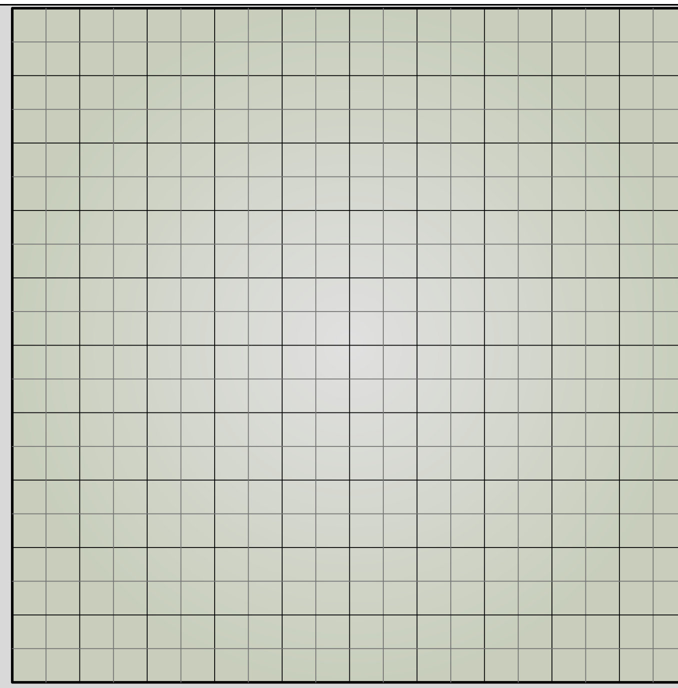
e) $E(-7/4,-3/5)$

f) $F(-11,12)$

g) $G(6,4)$

h) $H(-9,-8)$

i) $I(-7,8)$



SESIÓN 2 (2 HORAS)

Tema: Condiciones necesarias y suficientes para determinar un segmento: Los puntos extremos. Un extremo (punto inicial o final), la longitud y el ángulo de inclinación. Se considera punto inicial el que tiene la menor ordenada. Longitud de un segmento. Ángulo de inclinación. Pendiente

Aprendizaje: Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer. Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones. Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento. Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.

E 2.6. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es un segmento de recta?

____

b) Por dos puntos distintos ¿Cuántos caminos puedes trazar al unirlos?

____

c) ¿cuál es el camino más corto entre dos puntos?

____

d) ¿Qué es un segmento rectilíneo?

____

E 2.7. Un grupo de alumnos acudirán al Palacio de la Escuela de Medicina, que se encuentra frente a la Plaza de Santo Domingo, para ello quedaron en verse en un punto (en la estación del metro Allende) y de ahí acudir juntos al Palacio, de acuerdo con el mapa que se muestra a continuación.

1. ¿Qué rutas se podrían tomar?

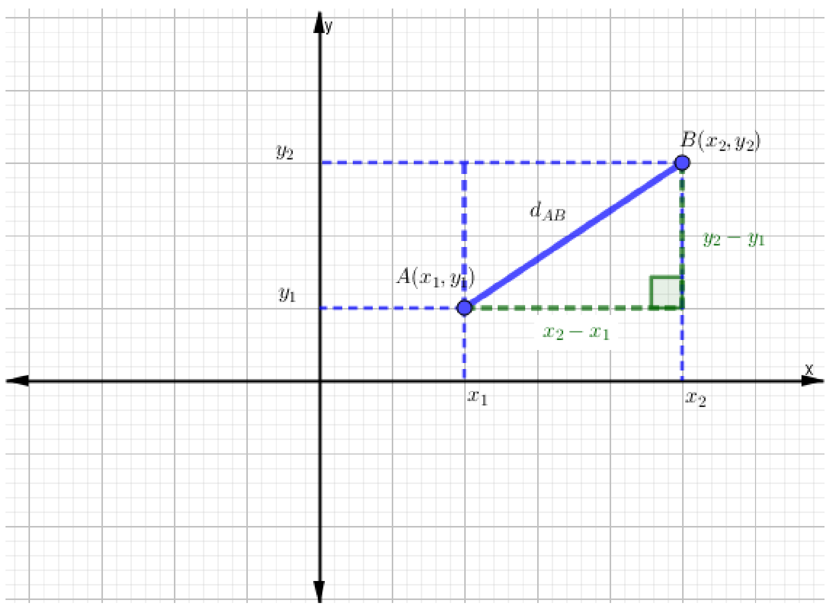
2. Si se considera a cada cuadra como la 1 unidad. ¿Qué distancia tiene cada una de las rutas trazadas?

1. ¿Cuál es la distancia más corta entre el metro Allende y el Palacio de Escuela de Medicina?

2. ¿Hay distancias negativas?

Longitud de un segmento

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos del segmento $\overline{AB}$, como se muestra en la figura:



Se al prolongar las líneas estas se intersecan formando dos triángulos rectángulos, lo cuales son congruentes. Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$d_{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Despejando la distancia

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta se denomina distancia entre dos punto o longitud del segmento AB.

E 2.8. Determinar la longitud del segmento $\overline{AB}$ con A (1,1) y B (4,5). Localiza los puntos en el plano cartesiano.

E 2.9. Se tiene a $\overline{RS}$ si $R(-5,4)$ y $S(3,8)$, determina: la longitud del segmento, pendiente y ángulo de inclinación.

EJERCICIOS SESIÓN 2

E 2.10 Determina la distancia, la pendiente y el ángulo de inclinación para los siguientes puntos, ubícalos en el plano cartesiano.

a) $A\ (-5, 2)$ y $B\ (7, 2)$
b) $C\ (-3, -1)$ y $D\ (1, -3)$
c) $E\ (3, -12)$ y $F\ (10, -4)$
d) $G\ (2, 0)$ y $H\ (2, 5)$

E 2.11 Sean $Q\ (1, -6), R\ (-3, 2) y\ S(4, 7)$ los vértices de un triángulo. Determina la distancia de cada uno de sus lados. Localiza los puntos en el plano cartesiano.

E 2.12 Encuentra las coordenadas del extremo del segmento $\overline{LM}, si\ L(0{,}8)$, se sabe que la distancia entre los puntos es de 13 unidades y tiene como abscisa a 5.

E 2.13 Determina las coordenadas $P\ (x, y)$ el cual se encuentra en el eje "y", que equidista a $R\ (5{,}5)$ y $S\ (4{,}2)$. Localiza los puntos en el plano cartesiano.

SESIÓN 3 (1 HORA)

Tema: Longitud de un segmento. Ángulo de inclinación. Pendiente.

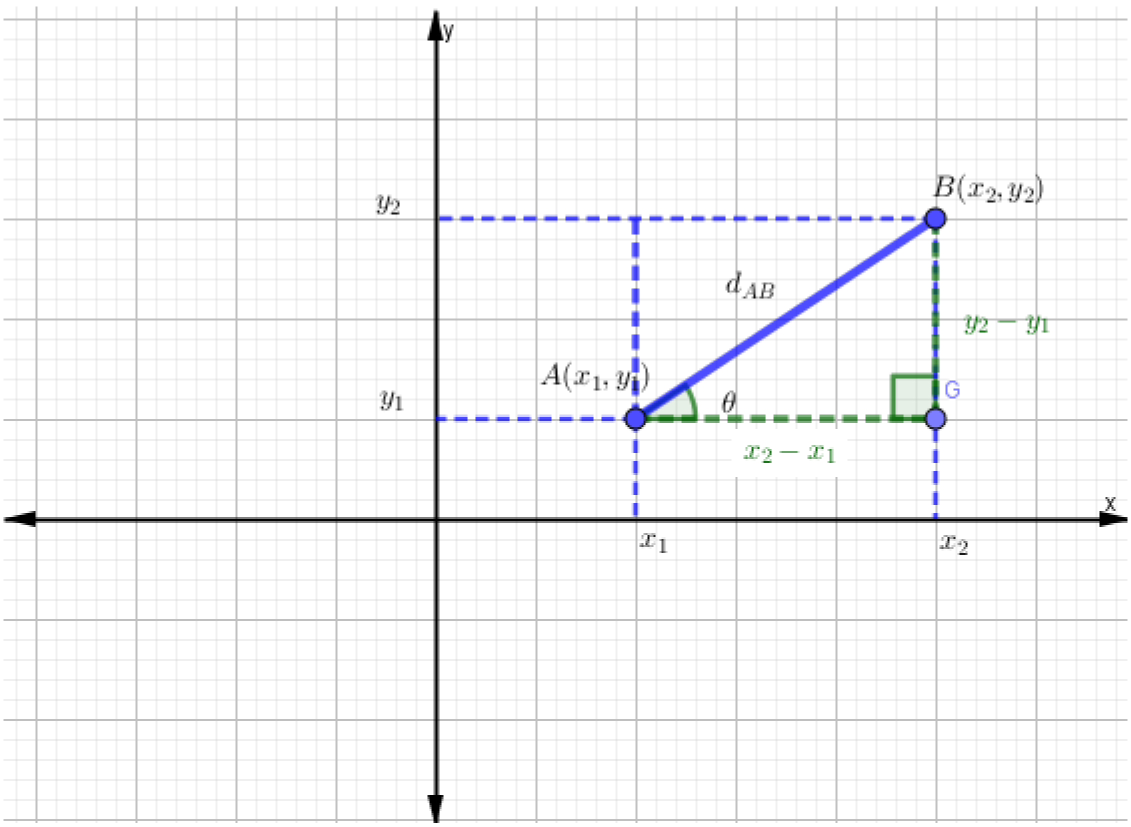
Aprendizaje: Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.

Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.

Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento. Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.

Longitud de un segmento, ángulo de inclinación y su pendiente.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos del segmento $\overline{AB}$, como se muestra en la figura:



Un segmento puede estar en una posición creciente o decreciente, este se determina por el signo de la pendiente, la pendiente se denota por (m), la pendiente no es más que el cociente que se da entre la diferencia de las ordenadas entre la diferencia de las abscisas, es decir,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

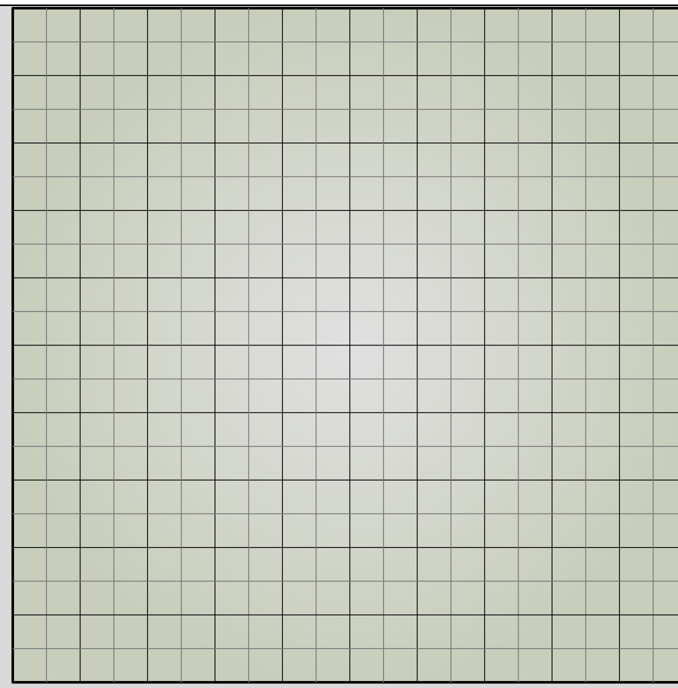
El segmento AB, presenta un ángulo de inclinación, denotado por θ, el cual se mide respecto a la horizontal, debido a que se tiene un triángulo rectángulo están presente las razones trigonométricas, en este triángulo se tienen sus catetos, entonces la razón trigonométrica que esta dada por sus catetos, es la tangente de un ángulo, está dado como

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo tanto, el ángulo de inclinación es

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

E 2.14 Determina la distancia, pendiente y ángulo de inclinación, para el segmento $\overline{LM}$,con $L(-4,-7)$ y $M(3,-2)$.



E 2.15 Determinar el perímetro para el polígono con vértices $N(6,4)$, $\tilde{N}(-2,-4)$, $P(-5,3)$, $Q(-9,2)$ y $R(0,8)$.

E 2.16 Determina el área del triángulo PQS, si tiene como vértices $J(5,0)$, $K\,(,9,-3)$ y $L(3,-7)$.

E 2.17. Determina la suma de sus diagonales y el ángulo de inclinación para cada uno de los lados del cuadrilátero, con vértices $R(1,-2)$, $S(-3,7)$ y $T(5,3)$.

E 2.18. Encontrar el punto $P(x,y)$ que equidista de los puntos $E(-3,2)$, $F(7,0)$ y $G(1,6)$.

EJERCICIOS SESIÓN 3

Resolver los siguientes ejercicios en tu cuaderno, justificar la respuesta.

E 2.19 Determinar la distancia del segmento, pendiente y su ángulo de inclinación, para:

a) $A\ (-3,-6)$ y $B\ (-3,2)$

b) $C\ (3,11)$ y $D\ (2,-7)$

c) $E\ (13,-2)$ y $F\ (-2,-4)$

d) $G\ (2,-8)$ y $H\ (-2,-8)$

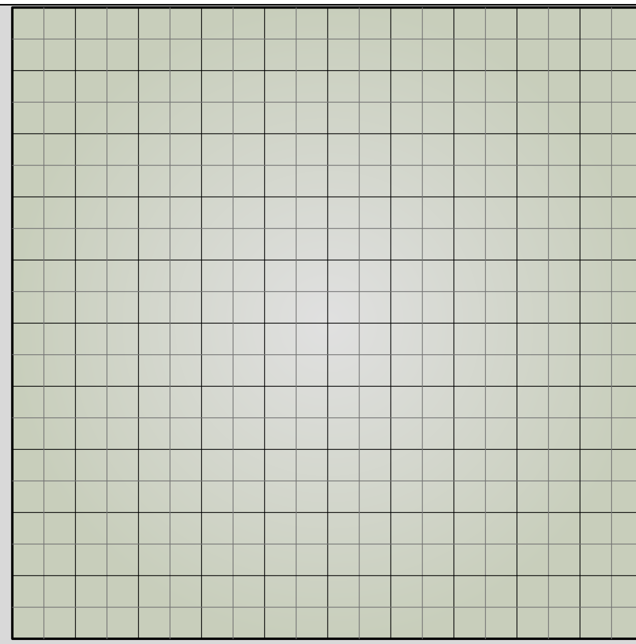
e) $I\ (-5,4)$ y $J\ (1,-7)$

SESIÓN 4 (2 HORAS)

Tema: Puntos especiales de un segmento. Punto que divide al segmento en una razón dada. Punto medio.

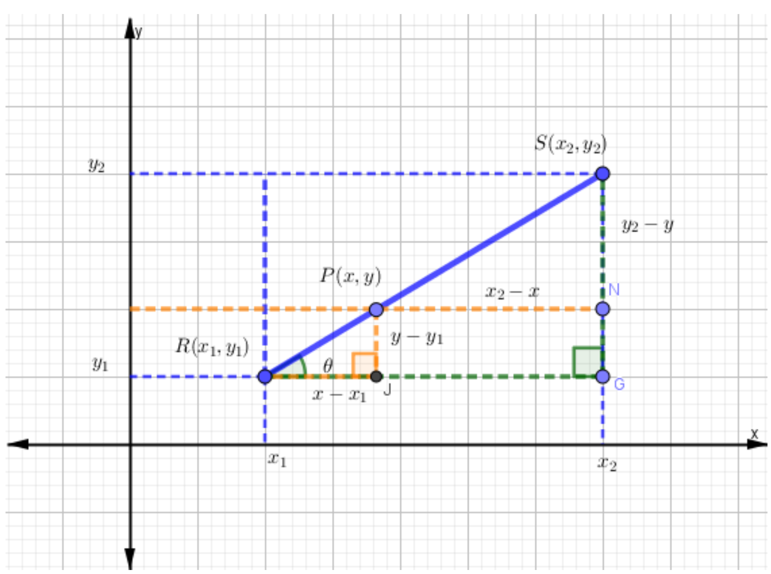
Aprendizaje: Localiza los puntos de división de un segmento.

E 2.20 Sea $P(9,1)$ el punto que divide a $\overline{RS}$ con $R(5,-3)$ y $S(12,4)$. Determinar la razón del segmento, comparando las distancias $r = \frac{\overline{RP}}{\overline{PS}}$. ¿De qué otra forma se puede obtener la razón?



Razón de un segmento. Punto que divide a un segmento en una razón dada.

Sea $P(x,y)$ el cual divide a $\overline{RS}$, si $R(x_1,y_1)$ y $S(x_2,y_2)$, como se tienen en el plano cartesiano



En la figura se tienen los $\Delta RPJ\ y\ \Delta PSN$, con las líneas punteadas se formas paralelas, se tiene lo siguiente:

a) el $\measuredangle PSJ \cong \measuredangle SPN$ por ser ángulos correspondientes
b) el $\measuredangle PJS \cong \measuredangle SNP$ por ser ángulos correspondientes

Por el criterio AA, se concluye que los triángulos $\Delta RPJ \sim \Delta PSN$. Por lo tantos su parte correspondiente son proporcionales:

$$\frac{\overline{RJ}}{\overline{PN}} = \frac{\overline{PJ}}{\overline{SN}}$$

Sustituyendo se tiene

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

o bien

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = \frac{y_2 - y}{y - y_1} = r$$

Donde r representa la razón de un segmento.

Dada la razón r, para determinar las coordenas de $P(x, y)$, se procede de la siguiente manera

Por lo anterior se sabe que $\frac{x-x_1}{x_2-x} = r$ y $\frac{y-y_1}{y_2-y} = r$

Se procede a despejar a x & y de ambas igualdades

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r \qquad\qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

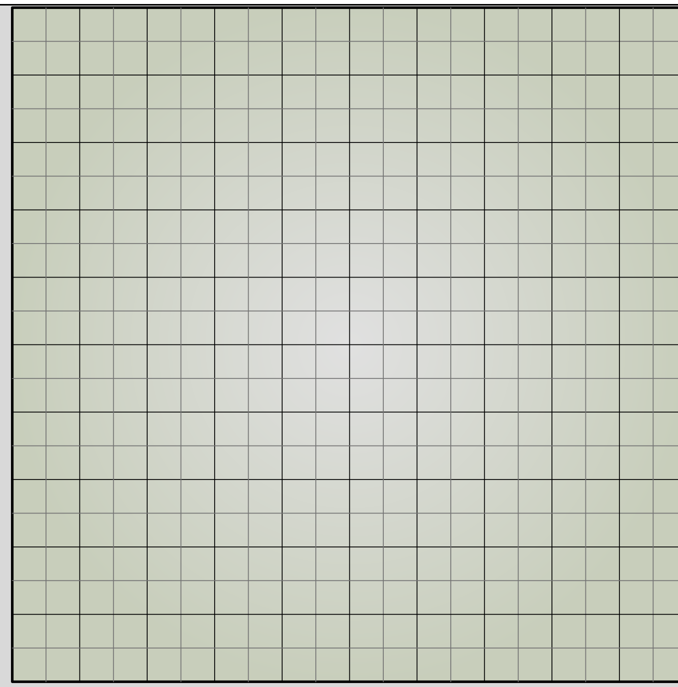
$$\begin{gathered} x - x_1 = rx_2 - rx \\ x + rx = rx_2 + x_1 \\ x(1 + r) = rx_2 + x_1 \\ x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \end{gathered} \qquad\qquad \begin{gathered} y - y_1 = ry_2 - ry \\ y + ry = ry_2 + y_1 \\ y(1 + r) = ry_2 + y_1 \\ x = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r} \end{gathered}$$

Por lo tanto, $P(x, y) = \left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$

E 2.21. Se tiene a $r = \frac{3}{2}$ para el segmento $\overline{LM}$, donde $L\,(-4,2) y\; M(1,-3)$. Determina las coordenadas de $P(x, y)$ que divide a $\overline{LM}$. ¿Cuándo la razón es 1, qué significa?

E 2.22 Determinar las coordenadas de $P\,(x, y)$ que divide al segmento $\overline{UV}$ con $U(-4, 2)$ y $V(6, 3)$ en una razón dada $r = \frac{2}{3}$.

E 2.23 Determinar la razón si $P\ (0,3)$ que divide al segmento $\overline{WZ}\ con\ W(-2,5) y\ Z(6,-3)$.



EJERCICIOS DE SESIÓN 4

E 2.24 Determinar las coordenadas de $P(x, y)$ que divide al segmento a:

a) $\overline{UV}\ con\ U(-3,6) y\ V(7,1)$ en una razón dada $r = \frac{1}{4}$.
b) Si $M(-6, 4)\ y\ N(6, 5)$, con $r = 2$
c) Si $G(-7, 1)\ y\ H(3, -3)$, con $r = 1$

E 2.25 Determinar la razón dada:

a) las coordenadas de $P\ (-5,2)$ que divide al segmento $\overline{EF}\ con\ E(-9, 2) y\ F(2, 2)$.

b) las coordenadas de $P\ (-2, -3)$ que divide al segmento $\overline{EF}\ con\ E(-5, -5) y\ F(1, -1)$.

c) las coordenadas de $P\ (7, 1)$ que divide al segmento $\overline{GH}\ con\ G(1, 4) y\ H(9,0)$.

SESIÓN 5 (2 HORAS)

Tema: Lugares geométricos en el plano cartesiano

Aprendizaje: Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

E 2.26 Sean $A\ (0,4)$ y $B\ (4,0)$ los extremos de un segmento, hallar el lugar geométrico de tal manera que los puntos $P\ (x, y)$ son equidistantes a los extremos del segmento.

Lugar geométrico.
Se entiende como lugar geométrico como el conjunto de todos los puntos en el plano cartesiano que cumplen una condición.
A partir de los conceptos de la geometría euclidiana, se definen de manera analítica los conceptos como mediatriz, bisectriz, recta, altura. etc.

Ejemplo: Determinar el lugar geométrico de tal manera que los puntos $P(x, y)$ equidistan de los puntos $R(x_1, y_1)$ y $S(x_2, y_2)$.
Sol. Al ser equidistantes, significa que las distancias son iguales, es decir, $d_{RP} = d_{SP}$

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

Se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad, quedando

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2$$

Se desarrollan los binomios, y agrupando términos semejantes

$$x_1^2 - 2x_1x + x^2 + y_1^2 - 2y_1y + y^2 = x_2^2 - 2x_2x + x^2 + y_2^2 - 2y_2y + y^2$$
$$2y_2y - 2y_1y = x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x - y_1^2 - 2x_2x + y_2^2$$
$$2y(y_2 - y_1) = 2x(x_1 - x_2) + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$$
$$y = \frac{2x(x_1 - x_2) + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2(y_2 - y_1)}$$

Describe una recta llamada mediatriz del segmento $\overline{RS}$.

E 2.27 Determinar el lugar geométrico de tal manera que los puntos $P(x, y)$ se encuentran a 4 unidades por debajo del eje x.

E 2.28 Hallar el lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $A\ (2{,}3)$ es siempre igual a 5.

E 2.29 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P\ (x, y)$ de tal manera que siempre equidistan de dos puntos dados $A\ (5, -3)$ y $B\ (3, 1)$.

E 2.30 Determina la gráfica para el lugar geométrico dado $y = -\frac{5}{4}\ x + 12$.

EJERCICIOS DE LA SESIÓN 5

Resolver los siguientes ejercicios.

E 2.31 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P\ (x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $R\ (2, 2)$ es siempre igual a 5.

E 2.32 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $L(4{,}8)$ y $M(12{,}3)$.

E 2.33 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P(x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $T(-1, 2)$ es siempre igual a su distancia al eje x.

E 2.34 Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto $P\ (\ x\ , y\ )$, cuya distancia al eje $x$es siempre igual a su distancia al punto $T\ (\ 0\ , 7\ )$.

SESIÓN 6 (1 HORA)

Tema: Lugares geométricos en el plano cartesiano

Aprendizaje: Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

E 2.35 Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto $P\ (\ x\ ,y\ )$, cuya distancia al eje y, es siempre igual a su distancia al punto $M\ (\ -5, 0\ )$.

E 2.36 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P(x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $V\ (3, 5)$ es siempre igual a su distancia al eje y.

E 2.37 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $K(-5,6)$ y $L(7, -4)$.

EJERCICIOS 6

E 2.38 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(9,0)$ y $B(6,8)$.

E 2.39 Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P\ (x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $C(12, -5)$ es siempre igual a 8.

E 2.40 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P(x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $D(4, -9)$ es siempre igual a su distancia al eje y.

EJERCICIOS DE REPASO DE LA UNIDAD.

Instrucciones: Resolver los siguientes ejercicios y anexar el procedimiento que te conllevan a la solución de manera ordenada.

E 2.41 Dado el segmento RS, donde $R\ (-4, 1)$ y $S\ (8, 5)$. Determinar:

a) La distancia del segmento.
b) La pendiente.
c) El ángulo de inclinación.
d) Hallar la razón si $P(-1,2)$ divide a RS.
e) Las coordenadas de $P(x, y)$, si este divide al RS en $r = \frac{3}{5}$.

E 2.42 Los vértices del triángulo que tiene por vértices $A(4,1), B(-2,-2)$ y $C(\ 0, -7)$.

a) Calcular los puntos medios de cada uno de sus lados.
b) Obtener su perímetro.

E 2.43 El cuadrilátero que tiene como vértices a $A(0, 5), B(-4, -1), C(3, -3)$ y $D(8, 1)$, determina:

a) El perímetro.
b) Las pendientes de cada lado.

E 2.44 Obtener el perímetro para el cuadrilátero que tiene como vértices a:

$$P\ (-2,2), \qquad Q\left(-\frac{1}{2}, -2\right), \qquad R\ \left(\frac{11}{2}, -1\right) y\ S\ (4,3)$$

E 2.45 Obtener el perímetro del polígono, que tiene como vértices a J$(-2, 3), K(-1, -1), L\ (4, -3), M(6, 1)$ y $N(3, 4)$.

E 2.46 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P\ (x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $Q(3, -5)$ es siempre igual a 7.

E 2.47 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P\ (x, y)$ de tal manera que su distancia al punto $Q(0, 11)$ es siempre igual a su distancia al eje x.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Instrucciones: Resolver los siguientes ejercicios y responde cada uno de sus incisos.

1 Determinar la distancia para $\overline{RS}$, donde $R\ (4{,}9)$ y $S\ (11,-3)$.

2 Obtener la pendiente y su ángulo de inclinación a $\overline{LM}$, con $L\ (3,-11)$ y $M\ (2,-11)$.

3 Sea $\overline{EF}$, con extremos $E\ (7,5)$ y $F\ (-13,10)$, determinar:

a) La distancia
b) La pendiente
c) Ángulo de inclinación

4 Determinar la razón del segmento $\overline{UV}$, donde $U\ (-4,-5)$ y $V\ (11{,}5)$, donde $P\ (-1,-3)$ divide al segmento.

5 Hallar las coordenadas del punto P (x, y) que divide al segmento $\overline{JK}$, con $J\ (5{,}0)$ y $K\ (13,-4)$ dada su razón $r=\frac{1}{3}$.

6 Sea $\overline{CD}$, con extremos $C\ (9,-1)$ y $D\ (3,-4)$, determinar:

a) Las coordenadas de $P(x,y)$, si $r=\frac{2}{3}$
b) La razón si $P\ (5,-3)$ divide al segmento CD.
c) El punto medio.

7 Se tiene al cuadrilátero $ABCD$, con $A\ (-2{,}2), B\ (6,3), C\ (9,-1)$ y $D\ (3,-4)$, determinar:

a) Los puntos medios de cada uno de los lados del cuadrilátero.
b) El perímetro.
c) Encontrar la razón del segmento CD, si $P\ (5,-3)$ divide al segmento.

8 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P\ (x,y)$ de tal manera que su distancia al punto $R(-5,1)$ es siempre igual a 2.

9 Hallar la ecuación del lugar geométrico $P\ (x,y)$ de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $S(-7,6)$ es siempre igual a su distancia al eje y.

PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES A LA UNIDAD II DE MATEMÁTICAS III

CURSO:	Matemáticas III			
UNIDAD II:	Elementos básicos de la geometría analítica			
Objetivo:	Evaluar los aprendizajes correspondientes a los temas de elementos básicos de la geometría analítica			
Porcentaje	100			
Criterios	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Total**
Representa la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.	Ubica los puntos en el plano cartesiano. Identifica las coordenas del punto a partir del plano cartesiano. **10 puntos**	Ubica los puntos en el plano cartesiano. Tiene dificultad en representar las coordenas del punto a partir del plano cartesiano. **8 puntos**	Tiene dificultades en ubicar un punto en el plano cartesiano. Tiene dificultad en representar las coordenas del punto a partir del plano cartesiano. **5 puntos**	
Localiza un segmento en el plano cartesiano y proporciona la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.	A partir de las condiciones necesarias y suficiente localiza un segmento en el plano cartesiano. **10 puntos**	A partir de las condiciones necesarias y suficientes tiene dificultad para localiza un segmento en el plano cartesiano. **8 puntos**	A partir de las condiciones necesarias y suficiente presenta dificultades para localizar un segmento a partir del ángulo de inclinación. **5 puntos**	
Deduce la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplica en diferentes situaciones.	A partir de dos puntos en el plano cartesiano, deduce la fórmula de la longitud o distancia entre dos puntos. Aplica la fórmula de la longitud de un segmento en diversas situaciones. **10 puntos**	A partir de dos puntos en el plano cartesiano, deduce la fórmula de la longitud o distancia entre dos puntos. Tiene dificultad en aplica la fórmula de la longitud de un segmento en diversas situaciones. **8 puntos**	A partir de dos puntos en el plano cartesiano, deduce la fórmula de la longitud o distancia entre dos puntos. Tiene dificultad en aplica la fórmula de la longitud de un segmento. **5 puntos**	

Comprende el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.	A partir de la representación gráfica de un segmento comprende el concepto de ángulo de inclinación. **10 puntos**	A partir de la representación gráfica de un segmento comprende con dificultad el concepto de ángulo de inclinación. **8 puntos**	A partir de la representación gráfica de un segmento no comprende el concepto de ángulo de inclinación. **5 puntos**	
Calcula el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.	A partir de los extremos de un segmento, obtiene su ángulo de inclinación. **10 puntos**	A partir de los extremos de un segmento, se le dificulta obtener su ángulo de inclinación al emplear la calculadora. **8 puntos**	A partir de los extremos de un segmento, tiene errores al ordenar y aplicar la ley de los signos al obtener el ángulo de inclinación. **5 puntos**	
Localiza un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.	A partir de las condiciones necesarias y suficientes localiza un segmento dado uno de los extremos y su longitud o ángulo de inclinación. **10 puntos**	A partir de las condiciones necesarias y suficientes localiza un segmento bajo errores dado uno de los extremos y su longitud. **8 puntos**	A partir de las condiciones necesarias y suficientes presenta dificultades para localizar un segmento dado uno de los extremos. **5 puntos**	
Localiza los puntos de división de un segmento.	Determina las coordenadas del punto que divide a un segmento dada su razón y lo ubica en el plano cartesiano. **20 puntos**	Determina las coordenadas del punto que divide a un segmento dada su razón y tiene dificultades para localizarlo en el plano cartesiano. **15 puntos**	Presenta dificultades para determinar las coordenas punto que divide a un segmento dada su razón y no lo localiza en el plano cartesiano. **10 puntos**	
Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.	A partir del registro de representación obtiene la expresión del lugar geométrico y lo gráfica. **20 puntos**	A partir del registro de representación obtiene con errores la expresión del lugar geométrico y lo gráfica. **15 puntos**	A partir del registro de representación tiene dificultad para obtener la expresión del lugar geométrico y su gráfica. **10 puntos**	

PROBLEMA PARA INVESTIGAR

Giovanni Ceva fue un matemático italiano que se dedicó a la geometría, pero aún más a la geometría sintética del triángulo. En 1678 realizo la formulación de un teorema, llamado el teorema de Ceva, el cual fue publicado en ese mismo año en De lineis rectis. Este teorema es considerado como el teorema dual del Teorema de Menelao (del siglo I a. de C.)

a) Investigar el Teorema de Ceva y de Menelao. ¿Por qué se considera el teorema dual de del teorema de Menelao?

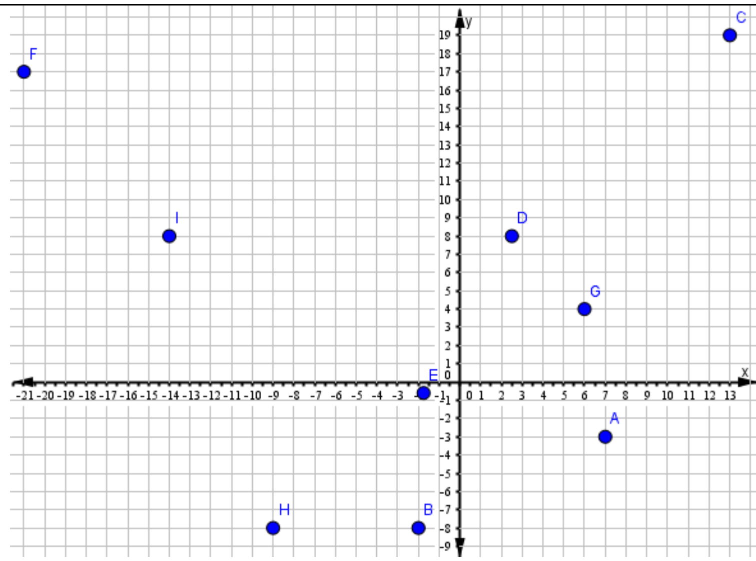
b) Considera un triángulo cualquiera con vértices A, B y C, ubícalos en el plano cartesiano, considera un punto concurrente puedes apoyarte para comenzar de las medianas del triángulo y aplica el Teorema de Ceva. Posteriormente, toma otro punto concurrente este puede estar en el interior del triángulo o en el exterior y compara las razones.

c) Emplea GeoGebra para ubicar los vértices del triángulo y así mostrar el teorema.

FORMULARIO DE LA UNIDAD

Distancia entre dos puntos, denotado por d_{RS}.	$d_{RS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \ (y_2 - y_1)^2}$
Pendiente de un segmento, denotado por m.	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Ángulo de inclinación, denotado por θ.	$\tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\tan\theta = m$
Razón de un segmento dado un punto que divide al segmento, denotada por r.	$r = \dfrac{\overline{RP}}{\overline{PS}}$ $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ ó $r = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$
Coordenadas de $P(x, y)$ dada su razón r.	$P(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}\right)$

RESULTADOS DE EJERCICIOS Y EVALUACIÓN.

E 2.1	
E 2.10	a) $d_{AB} = 12,\ m_{AB} = 0\ \ y\ P_m(x,y) = (1,2)$ b) $d_{CD} = \sqrt{5},\ \ m_{CD} = -\frac{1}{2}\ \ y\ P_m(x,y) = (-1,-2)$ c) $d_{EF} = \sqrt{113},\ m_{EF} = \frac{8}{7}\ \ y\ P_m(x,y) = \left(\frac{13}{2},-8\right)$ d) $d_{GH} = 5\ , m_{GH} = -5/0$ es vertical y $P_m(x,y) = \left(2,\frac{5}{2}\right)$
E 2.11	$d_{QR} = 4\sqrt{5}\ , d_{QS} = \sqrt{178}\ y\ d_{RS} = \sqrt{74}$
E 2.12	$M\ (5{,}20)$
E 2.13	$P\ (0{,}5)$
E 2.19	a) $\mathrm{d_{AB}} = 8, m_{AB} = - -\frac{8}{0}$, es decir, está en posición vertical y $\theta = 90°$ b) $d_{CD} = 11\sqrt{3},\ m_{CD} = 18\ y\ \theta = 86°\ 49'12.61''$ c) $d_{EF} = \sqrt{229},\ m_{EF} = \frac{2}{15}\ \ y\ \theta = 7°\ 35'40.72''$ d) $d_{GH} = 4, m_{GH} = 0\ \ y\ \theta = 0°$ e) $d_{IJ} = \sqrt{157},\ m = -\frac{11}{6}\ \ y\ \theta = -61°23'22.35''$
E 2.24	a) $P(x,y) = (-1,5)$, b) $P(x,y) = \left(2,\frac{14}{3}\right)$, c) $P(x,y) = (-2,-1)$
E 2.25	a) $r = \frac{4}{7}$, b) $r = 1$, c) $r = 3$
E 2.31	$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 3 = 0$ es una circunferencia
E 2.32	$16x - 10y - 73 = 0$ es una recta
E 2.33	$x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ es una parábola
E 2.34	$x^2 - 14y + 49 = 0$ es una parábola

E 2.38	$-6x + 16y - 19 = 0$
E 2.39	$x^2 + y^2 - 24x + 10y + 105 = 0$ es una circunferencia
E 2.40	$y^2 + 18y - 8x + 97 = 0$ es una parábola
E 2.41	a) $d_{RS} = 4\sqrt{10}$, b) $m_{RS} = \frac{1}{3}$, c) $\theta = 18° \, 26' 5.82''$, d) $r = \frac{1}{3}$, e) $P(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
E 2.42	a) $\mathrm{P}_{\mathrm{AB}} \left(1, \frac{1}{2}\right), P_{BC}\left(-1, -\frac{9}{2}\right), P_{AC}(2, -3)$ b) $7\sqrt{5} + \sqrt{29} \approx 21.0376$
E 2.43	**a)** $\mathbf{2\sqrt{13} + \sqrt{53} + \sqrt{41} + 4\sqrt{5} = 29.8386}$ **b)** $\boldsymbol{m_{AB} = \frac{3}{2}\,,\ m_{BC} = -\frac{2}{7},\ m_{CD} = \frac{4}{5}\ y\ m_{AD} = -\frac{1}{2}}$
E 2.44	$\frac{\sqrt{73}}{2} + \sqrt{37} + \frac{\sqrt{73}}{2} + \sqrt{37} \approx 20.7095$
E 2.45	$\sqrt{17} + \sqrt{29} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{26} \approx 23.3220$
E 2.46	$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0$
E 2.47	$x^2 - 22y + 121 = 0$
Evaluación	
1	$d_{RS} = \sqrt{193}$
2	$m_{LM} = 0 \ y \ \theta = 0°$
3	a) $d_{EF} = 5\sqrt{17}$, b) $m_{EF} = -\frac{1}{4}$, c) $\theta = -14° \, 2'10.48''$
4	$r = 1/4$
5	$P(x, y) = (7, -1)$
6	a) $P(x, y) = \left(\frac{27}{5}, -\frac{14}{5}\right)$, b) $r = \frac{1}{2}$, c) $P(x, y) = \left(6, -\frac{5}{2}\right)$
7	a) $P_{AB} = \left(2, \frac{5}{2}\right), P_{BC} = \left(\frac{15}{2}, 1\right), P_{CD} = \left(6, -\frac{5}{2}\right) \ y \ P_{AD} = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$ b) $\sqrt{69} + 5 + 3\sqrt{5} + \sqrt{61} \approx 27.8250$
8	$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 21 = 0$
9	$y^2 - 12y + 14x + 85 = 0$

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

Swokowski, E. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning.

De Oteyza, E. (2011). *Geometría Analítica*. México: Pearson.

Pérez, J. (2016). *Geometría analítica e introducción al cálculo vectorial*. Colombia: Fondo Editorial ITM.

Bravo, G., Martínez, O. (2013). *Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano*. Consultado el 21 de septiembre de 2019 de http://prometeo.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC/?tema=8&subtema=1&pagina=0

Soto, E. (2010). *Geometría Analítica*. Recuperado el 19 de septiembre de 2019 de https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/coordenadas-de-un-punto/2/

Para el profesor:

Swokowski, E. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Cengage Learning.

De Oteyza, E. (2011). *Geometría Analítica*. México: Pearson.

Lehmann. (2001*). Geometría analítica*. México. Limusa.

Pérez, J. (2016). *Geometría analítica e introducción al cálculo vectorial*. Colombia: Fondo Editorial ITM.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS III

UNIDAD III: La recta y su Ecuación Cartesiana

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
JUAN RODRÍGUEZ AGUILAR
LAURA PÉREZ ROSAL
LUIS FERNANDO ARRIETA VELAZCO
MARIBEL SERRATO DUARTE
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

2020- 2021

MATEMÁTICAS III UNIDAD III	LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA
Propósito: Será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico. Elaborado por: Luis Fernando Arrieta Velazco	Aprendizajes **Sesión 1:** • Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen. • Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante. **Sesión 2, 3, 4:** Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones. **Sesión 5:** • Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes. **Sesiones 6 y 7:** • Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones. • Dada la ecuación de una recta el alumno es capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella. **Sesión 8 y 9:** • Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica). **Sesión 10, 11 y 12:** Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

SESIÓN 1 (2 HORAS)

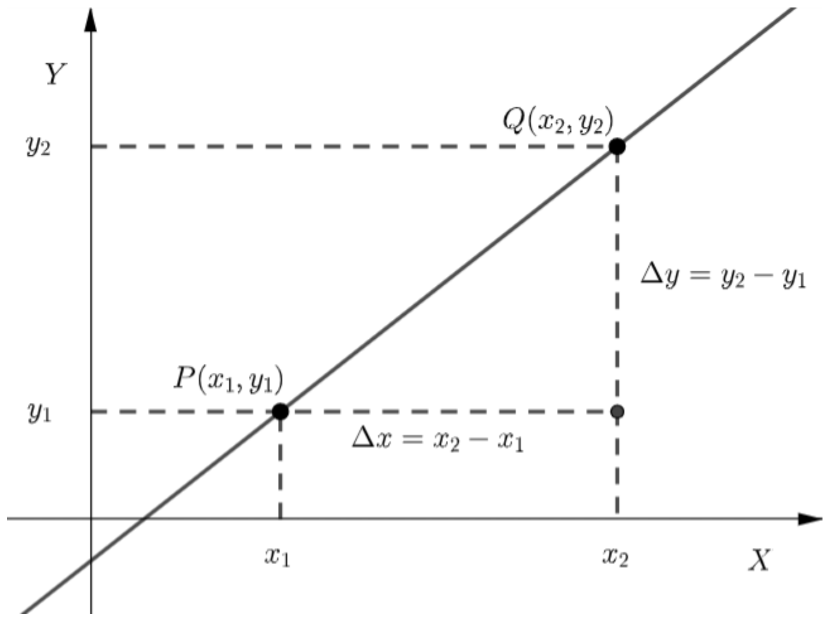
Tema: Ecuación de la recta dados: Dos puntos.

Aprendizaje: Describe a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen. Entiende a la pendiente de una recta, como un invariante.

ECUACIÓN DE LA RECTA.

DEFINICIÓN:

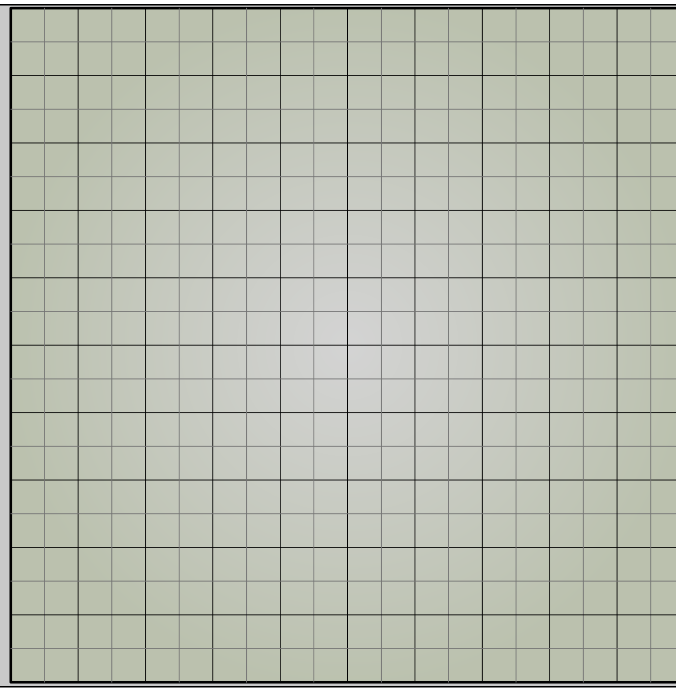
Se llama línea recta al lugar geométrico de todos los puntos contenidos en el plano tales que, tomados dos puntos cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta, el valor de la pendiente m, es siempre constante.



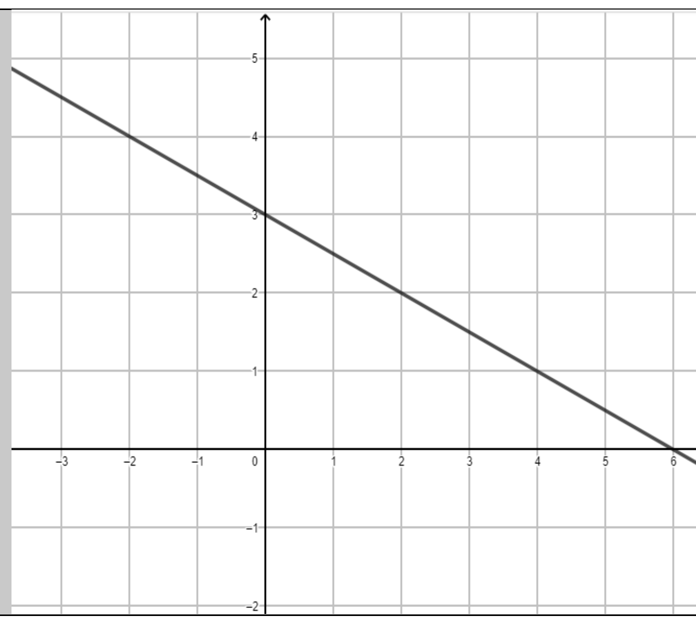
La pendiente de la recta se denota por m y se calcula mediante:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

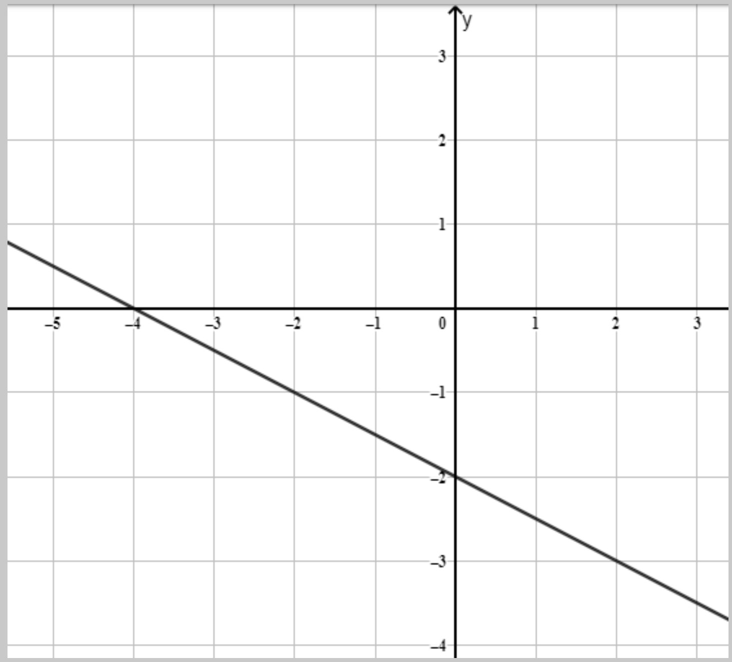
E 3.1 Dados los siguientes puntos $A(-2,-7)$, $B(2,3)$, $C(4,7)$ y $D(6,13)$, calcula la pendiente entre los puntos, y, ¿cuántas rectas se pueden trazar?



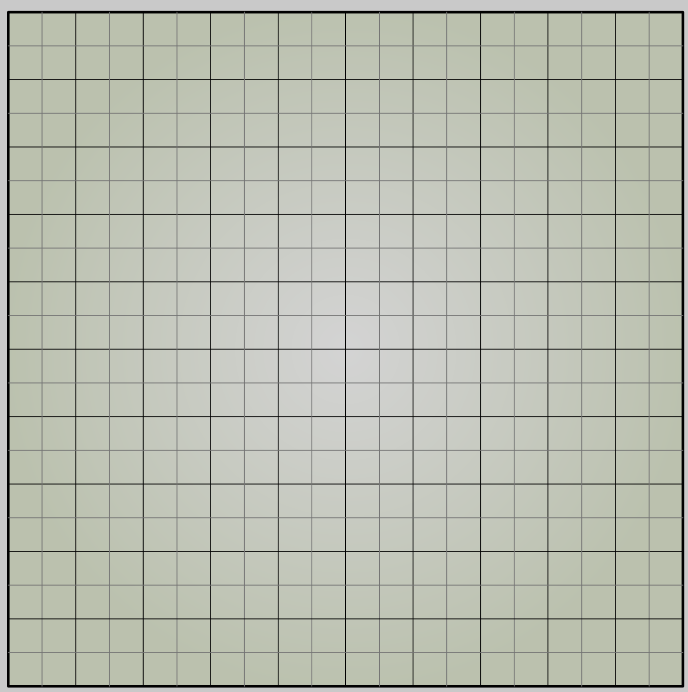
E 3.2 Dada la siguiente gráfica identifica 4 puntos que pertenezcan a la recta. Toma dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta y calcula su pendiente.



E 3.3 De la gráfica siguiente, identifica cual la abscisa y la ordenada al origen.



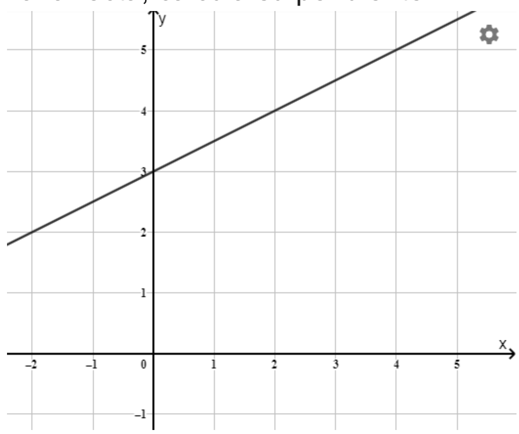
E 3.4 A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de $20°C$ y la temperatura a una altitud de $1\ km$ es $10°C$, exprese la temperatura T (en $°C$) en términos de la altitud h (en km). (Suponga que la relación entre T y h es lineal.) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente? ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 25 km?



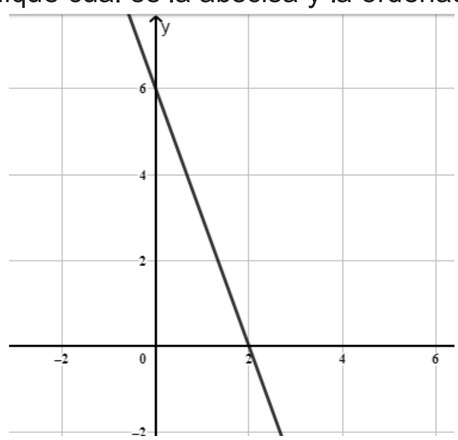
EJERCICIOS SESIÓN 1

E 3.5 Dados los siguientes puntos $A(-2,-10)$, $B(0,-2)$, $C(3,10)$ y $D(5,15)$, calcula la pendiente entre los puntos, y, ¿cuántas rectas se pueden trazar?

E 3.6 Dada la siguiente gráfica, identifica 4 puntos que pertenezcan a la recta. Tomando dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, calcula su pendiente.



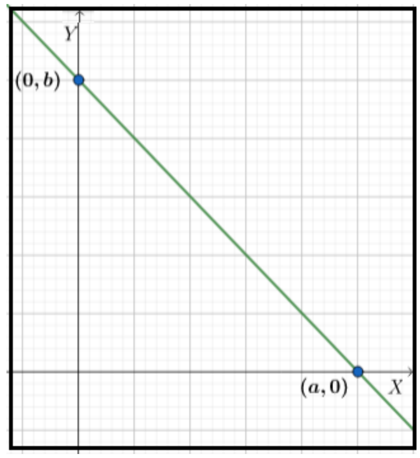
E 3.7 De la gráfica siguiente indique cual es la abscisa y la ordenada al origen.



E 3.8 Un automóvil tiene 56 meses de uso. En un lote de autos usados te informan que su valor comercial actual es de $37 600 pero hace 14 meses era de $43 200. Si el valor del auto decrece linealmente con el tiempo.
a) ¿Cuál fue el valor del auto cuando era nuevo?
b) ¿Cuánto se deprecia el auto mensualmente?
c) ¿A los cuántos meses de uso el auto ya no tendrá valor comercial?
D ¿Cuál será el valor del auto después de 8 años de uso?

E 3.9 Una casa que tiene cuatro años de uso tiene un valor de $480000, pero cuando era nueva su valor era de $300,000. Gil valor de la casa varía realmente con el tiempo, calcula:
a) La ecuación que expresa el valor de la casa en términos del tiempo.
b) El valor de la casa dentro de 20 años.
c) La variación del valor de la casa por año.

E 3.10 De la gráfica siguiente indique cual es la abscisa y la ordenada al origen.



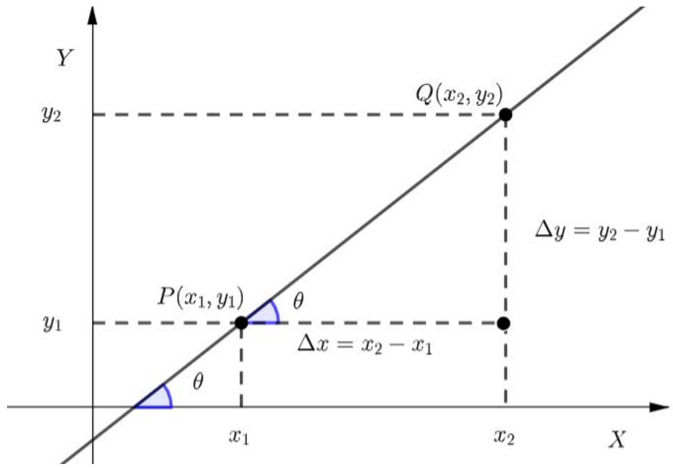
SESIÓN 2 (2 HORAS)

Tema: Ecuación de la recta dados: Dos puntos. Un punto y la pendiente. La pendiente y la ordenada al origen. Un punto y el ángulo de inclinación.

Aprendizaje: Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.

DEFINICIÓN

El ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje coordenado X en su dirección positiva, y se mide a partir del eje X en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj.



De la figura podemos observar que

$$tan\ \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por lo que:

$$tan\ \theta = m$$

Por lo tanto:

$$\theta = tan^{-1}(m)$$

E 3.11 Dada la ecuación de la recta $2x - y - 8 = 0$ realiza su gráfica y determina su ángulo de inclinación.

E 3.12 Dada la ecuación de la recta $4x + 2y + 3 = 0$, realiza su gráfica y determina su ángulo de inclinación.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO DOS PUNTOS

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

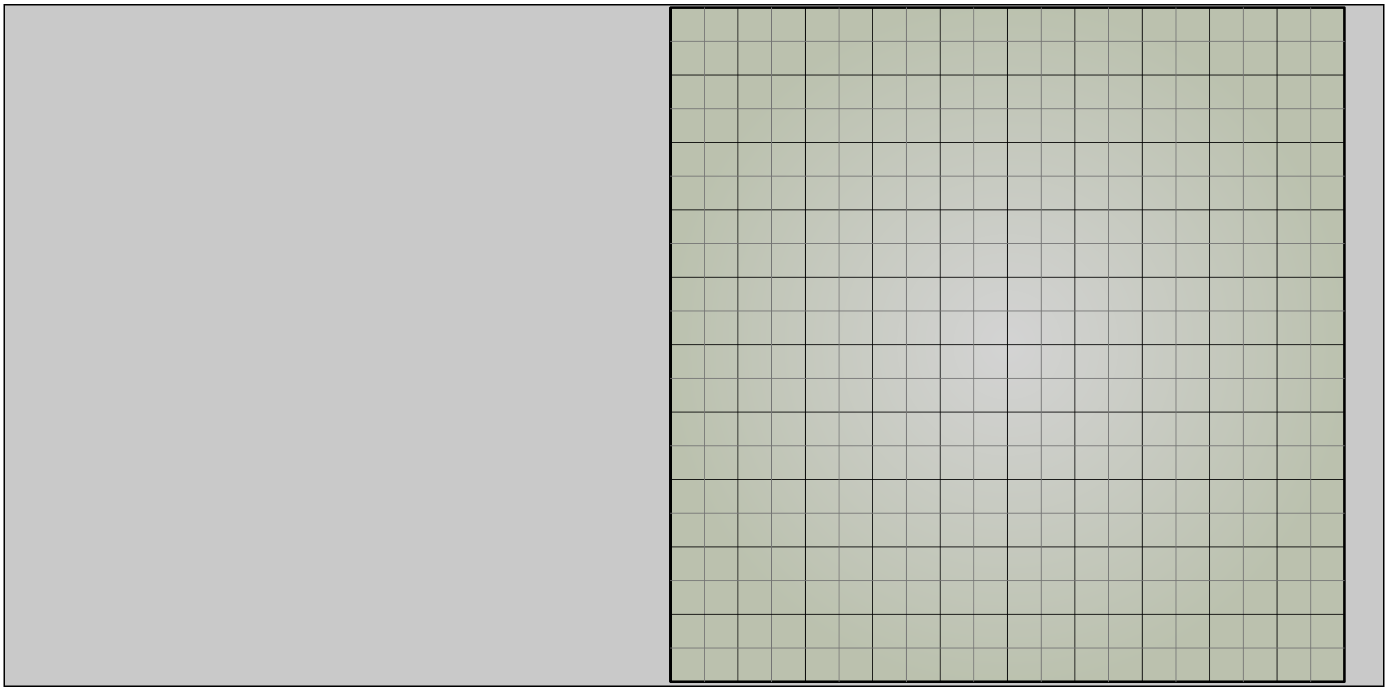
E 3.13 Verificar si los puntos indicados pertenecen a la recta dada y elabora la gráfica de cada una de ellas:

a) $P(1,8)\ y\ Q(4,20);\ y\ =\ 4x\ +\ 4$

b) $P(-1,-9)\ y\ Q(3,11);\ y\ =\ 5x - 4$

E 3.14 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-4,7)$ y $B(2,-3)$.

E 3.15 Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax - By + 13 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C\ (-7. -1)$ y $D\ (1.2)$.



EJERCICIOS SESIÓN 2

E 3.16 Dada la ecuación de la recta $5x + 6y - 7 = 0$ realiza su gráfica y determina su ángulo de inclinación.

E 3.17 Dada la ecuación de la recta $3x - 6y + 1 = 0$ realiza su gráfica y determina su ángulo de inclinación.

E 3.18 Verificar si los puntos indicados pertenecen a la recta dada:
a) $P(2, -1) y Q(5, -7); y = -2x + 3$
b) $P(-2, 3)\ y\ Q(2, -9);\ y\ =\ -3x - 3$

E 3.19 Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-5, -3)$ y $B(2,\ 6)$.

E 3.20 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5, -4)$ y el punto de intersección entre las rectas $2x + 2y - 12 = 0$ y $-3x + 4y + 32 = 0$.

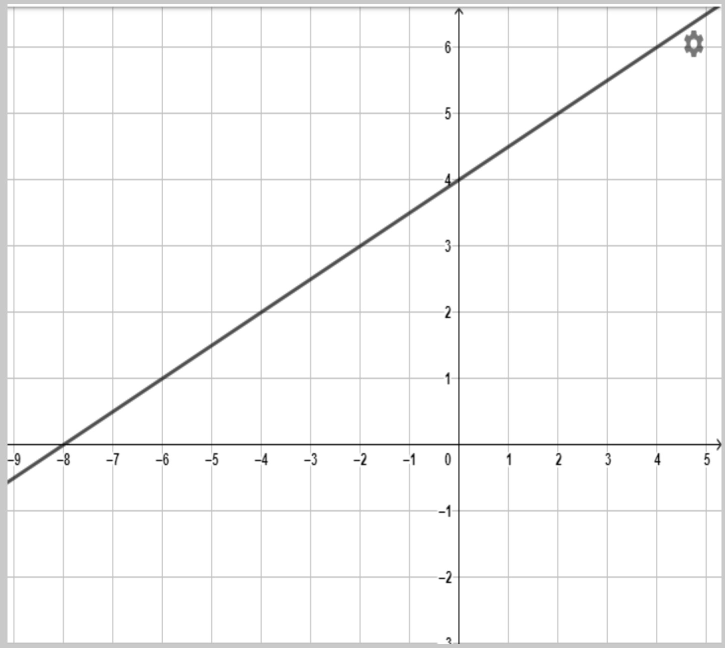
E 3.21 Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación $Ax + By - 6 = 0$ de una recta, si debe pasar por los puntos $C\ (-4. -1)$ y $D\ (2.2)$.

SESIÓN 3 (1 HORA)

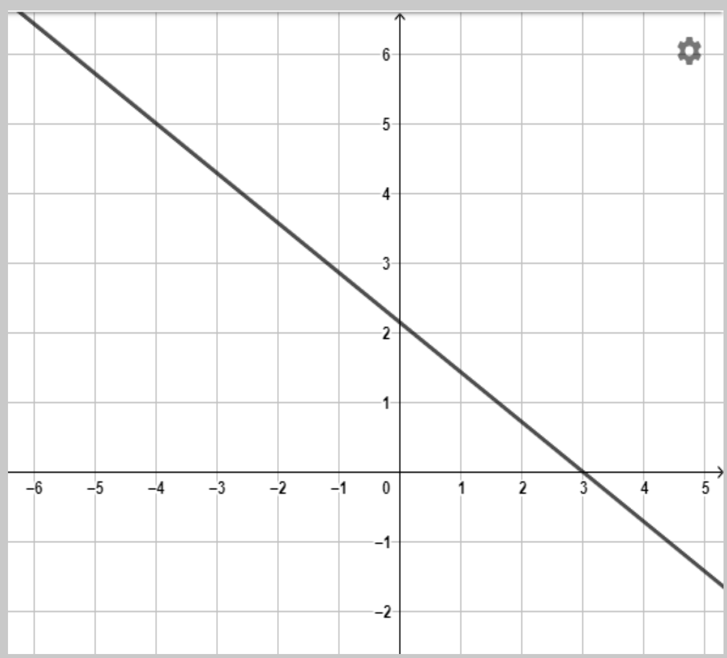
Tema: Ecuación de la recta dados: Dos puntos. Un punto y la pendiente. La pendiente y la ordenada al origen. Un punto y el ángulo de inclinación.

Aprendizaje: Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.

E 3.22 Dada la gráfica siguiente, determina la pendiente y su ángulo de inclinación.



E 3.23 Dada la gráfica siguiente, determina la ecuación de la recta que la representa.



ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y SU PENDIENTE

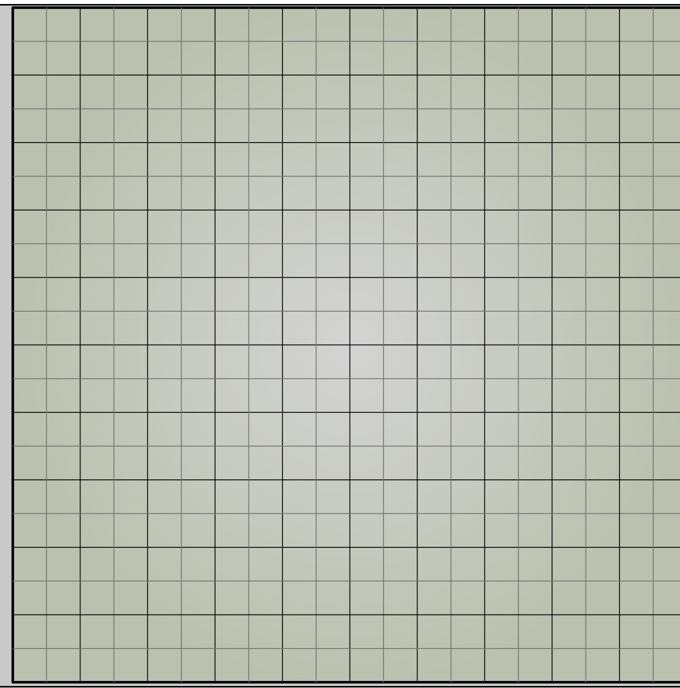
La ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ y con pendiente m es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

E 3.24 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,5)$ y cuya pendiente es 3. Realiza su gráfica.

E 3.25 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-1,-4)$ y cuya pendiente es $3/5$. Realiza su gráfica.

E 3.26 Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -2, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

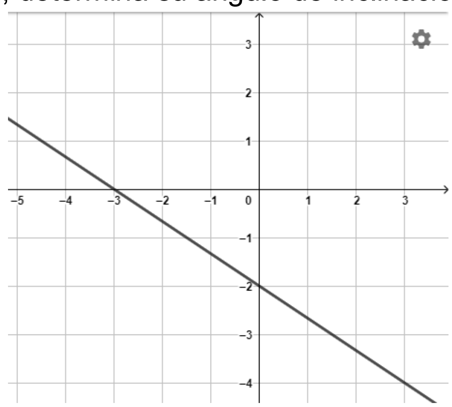


EJERCICIOS SESIÓN 3

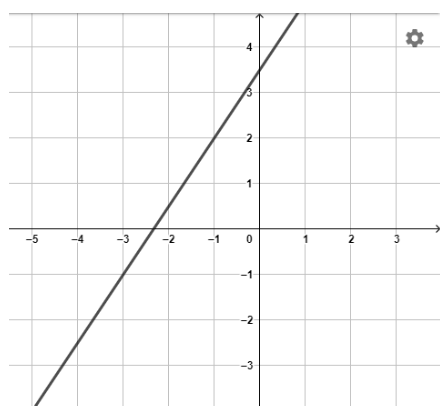
E 3.27 Encontrar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = -\frac{2}{5}$ y pasa por el punto de intersección entre las rectas $2x + 2y - 12 = 0$ y $-3x + 4y + 32 = 0$

E 3.28 Encontrar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = \frac{6}{5}$ y pasa por el origen.

E 3.29 Dada la gráfica siguiente, determina su ángulo de inclinación.



E 3.30 Dada la gráfica siguiente, determina la ecuación de la recta que la representa.



E 3.31 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5, -9)$ y cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$.

E 3.32 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-6, -3)$ y cuya pendiente es $\frac{7}{11}$.

SESIÓN 4 (2 HORAS)

Tema: Ecuación de la recta dados: Dos puntos. Un punto y la pendiente. La pendiente y la ordenada al origen. Un punto y el ángulo de inclinación.

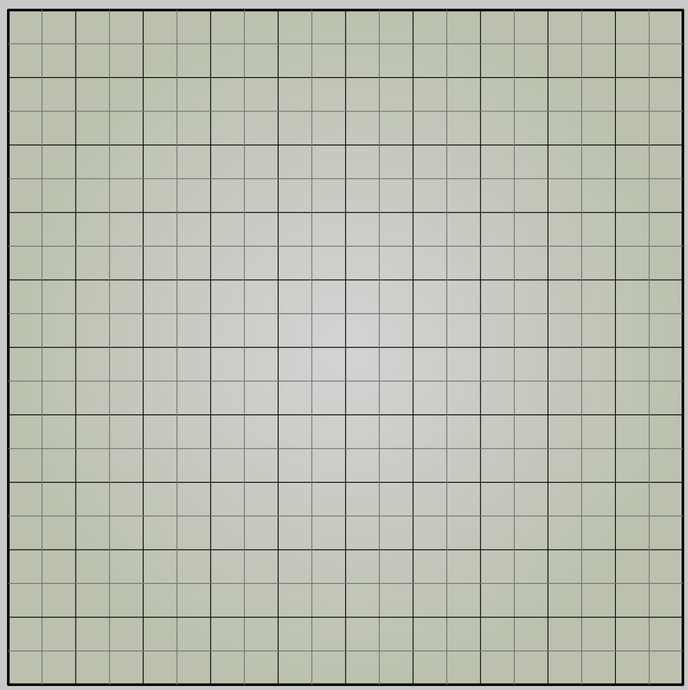
Aprendizaje: Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADA LA PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN.

La ecuación de la recta cuya pendiente es m y que corta al eje de las ordenadas en el punto $P(0, b)$, donde b es la ordenada al origen es:

$$y = mx + b$$

E 3.33 Determina la ecuación de la recta con $m = 4$ y ordenada al origen $b = 5$.



E 3.34 Determina la ecuación de la recta con pendiente $m = -5$ y corta al eje y en $(0, -4)$.

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN

Recordemos que el ángulo de inclinación está relacionado con la pendiente de la recta entonces:

$$m = \tan(\theta)$$

E 3.35 Determina la ecuación de la recta que corta al eje y en el punto $P(0,3)$ y tiene un ángulo de inclinación $60°$ y elabora su grafica.

E 3.36 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $Q(-4,-5)$ y tiene un ángulo de inclinación $45°$.

E 3.37 Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es - 3 y cuya intercepción con el eje Y es -3.

EJERCICIOS SESIÓN 4

E 3.38 Hallar la ecuación de la recta con pendiente 8 y ordenada al origen -7

E 3.39 Determina la ecuación de la recta que tiene pendiente $m = -\frac{2}{7}$, y corta al eje y en $(0, -3)$.

E 3.40 Determina la ecuación de la recta con pendiente $m = 6$ y ordenada al origen $b = -5$.

E 3.41 Determina la ecuación de la recta que corta al eje de las abscisas en 5 y tiene un ángulo de inclinación 135°.

E 3.42 Hallar la ecuación de la recta cuyo ángulo de inclinación es $45°$, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x - 4y + 14 = 0$ y $x + 5y - 8 = 0$.

E 3.43 Determina la ecuación de la recta que corta al eje x en el punto $P(8, 0)$ y tiene un ángulo de inclinación $135°$.

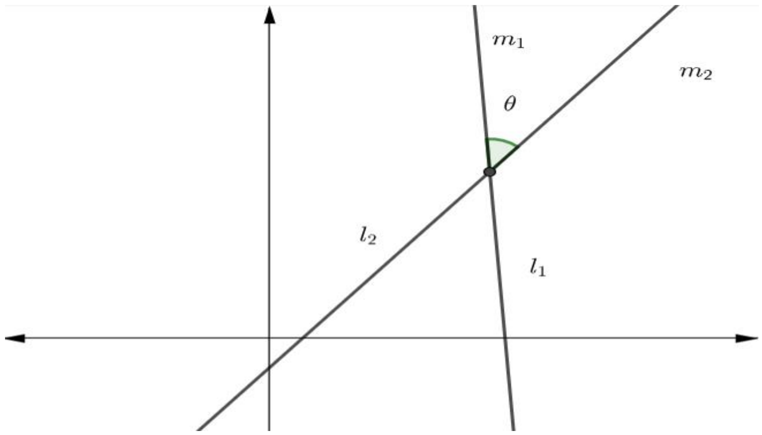
SESIÓN 5 (2 HORAS)

Tema: Ecuación de la recta dados: Un punto y el ángulo de inclinación.

Aprendizaje: Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Supongamos que las rectas l_1y l_2 tienen pendientes m_1y $m_2$respectivamente que forman el ángulo θ, como se muestra en la figura.



En donde el ángulo se calcula con la fórmula:

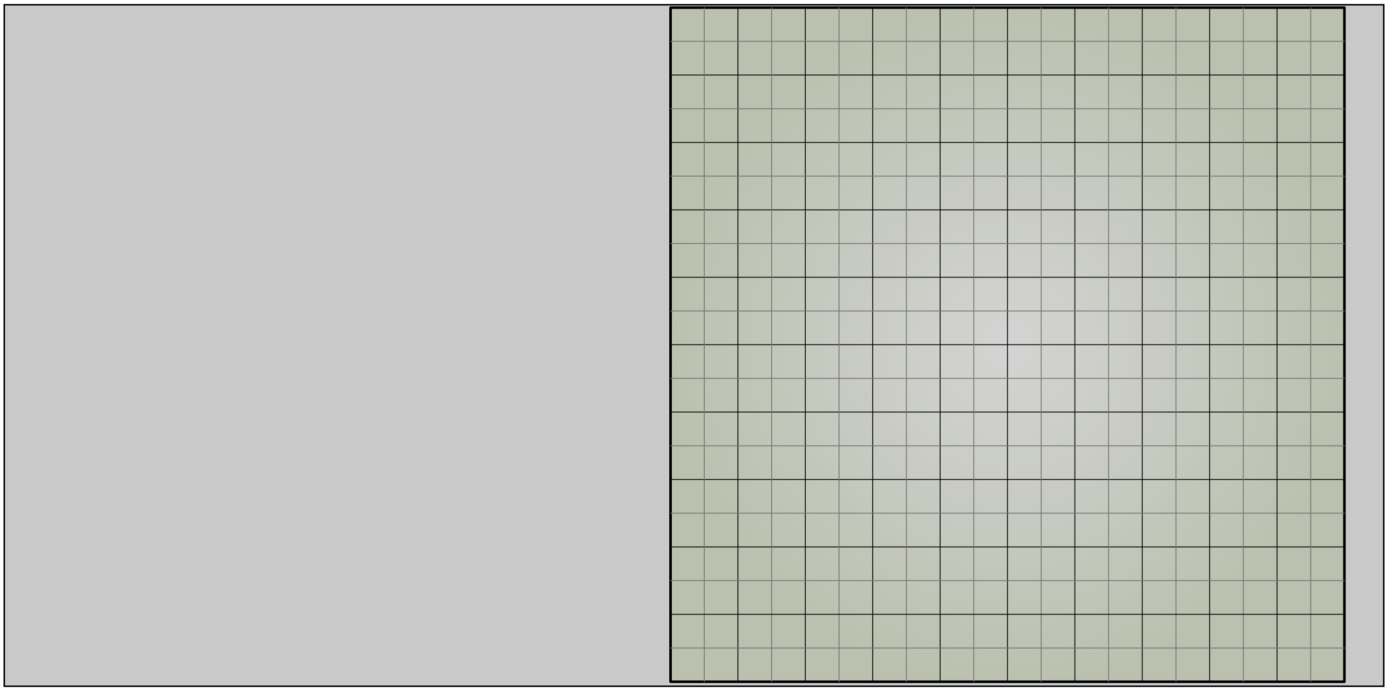
$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \text{ con } m_1 m_2 = -1$$

E 3.44 Calcular el ángulo formado por las rectas, $3x - y + 5 = 0$ y $x + y + 3 = 0$.

E 3.45 Calcular el ángulo formado por las rectas, $2x + 3y - 1 = 0$ y $6x - 4y + 5 = 0$.

E 3.46 Calcular el ángulo formado por las rectas, $5x + 2y = 0$ y $10x + 4y - 7 = 0$.

E 3.47 Las ecuaciones de los lados de un triángulo son: $3x - 4y + 13 = 0$, $4x + 3y - 16 = 0$ y $x + 7y - 4 = 0$. Hallar sus ángulos y comprobar en GeoGebra resultados.



EJERCICIOS SESIÓN 5

Para los ejercicios E.3.48 al E.3.50 considere las ecuaciones de los lados de un triángulo son $l_1: 3x - 4y + 13 = 0$, $l_2: 4x + 3y - 16 = 0$ y $l_3: x + 7y - 4 = 0$. Hallar:

E 3.48 El ángulo formado entre las restas l_1 y l_2 y comprobar en GeoGebra resultado.

E 3.49 El ángulo formado entre las restas l_2 y l_3 y comprobar en GeoGebra resultado.

E 3.50 El ángulo formado entre las restas l_1 y l_3 y comprobar en GeoGebra resultado.

E 3.51 Calcular el ángulo formado por las rectas, $5x + 2y + 5 = 0$ y $10x + 4y - 7 = 0$.

E 3.52 Calcular el ángulo formado por las rectas, $3x + 2y - 6 = 0$ y $2x - 3y + 2 = 0$.

SESIÓN 6 (1 HORA)

Tema: Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

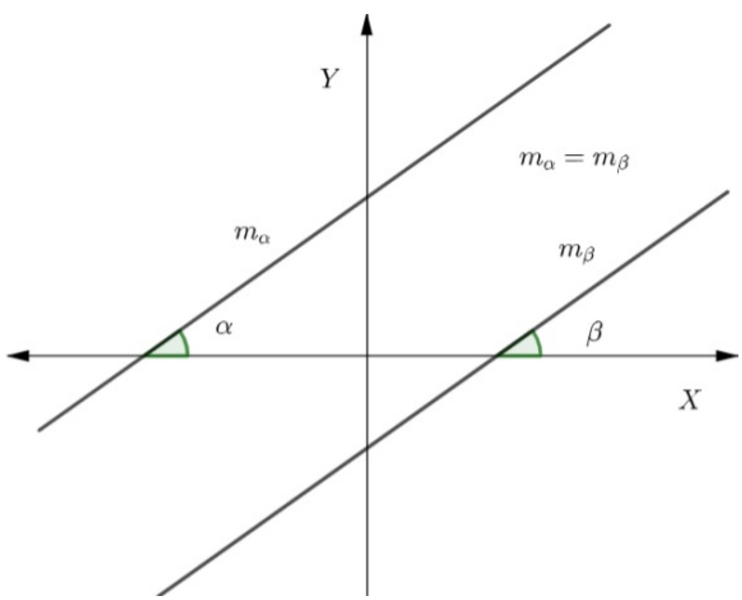
Aprendizaje: Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones. Dada la ecuación de una recta, determina las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.

CONDICIÓN DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD DE DOS RECTAS.

PARALELISMO

Si dos rectas no verticales son paralelas sus inclinaciones son iguales y, por consiguiente, sus pendientes también lo son. Sí $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son las inclinaciones de dos rectas paralelas, entonces la $tan\,\alpha = tan\,\beta$, es decir:

$$m_\alpha = m_\beta$$

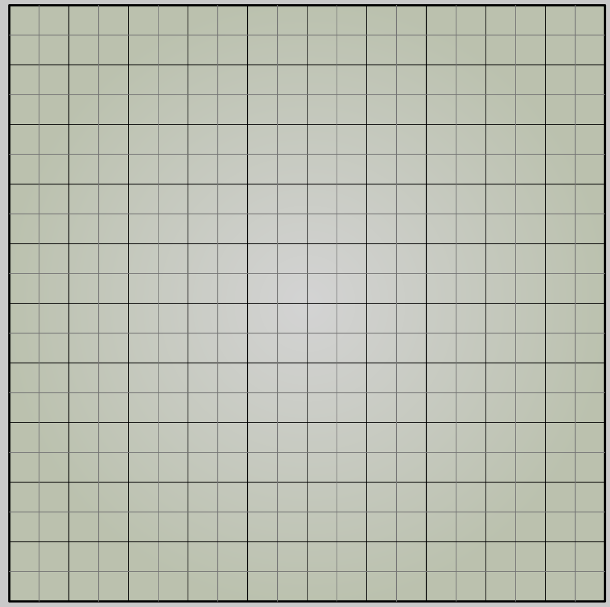


PERPENDICULARIDAD

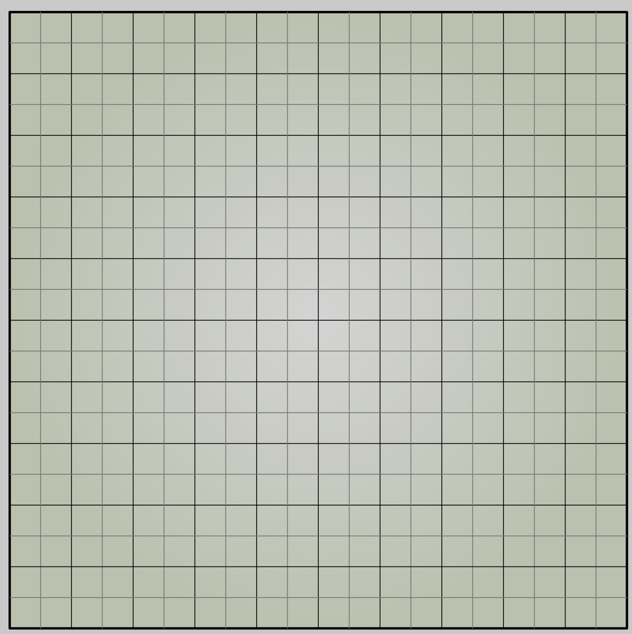
La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares (ninguna vertical) es que el producto de sus pendientes sea -1, es decir:

$$m_1 m_2 = -1$$

E 3.53 La recta L_1, pasa por los puntos $(-4,-3)$ y $(2,1)$, mientras que la recta L_2 pasa por los puntos $(-3,2)$ y $(-1,-4)$. Determina si L_1 y L_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.



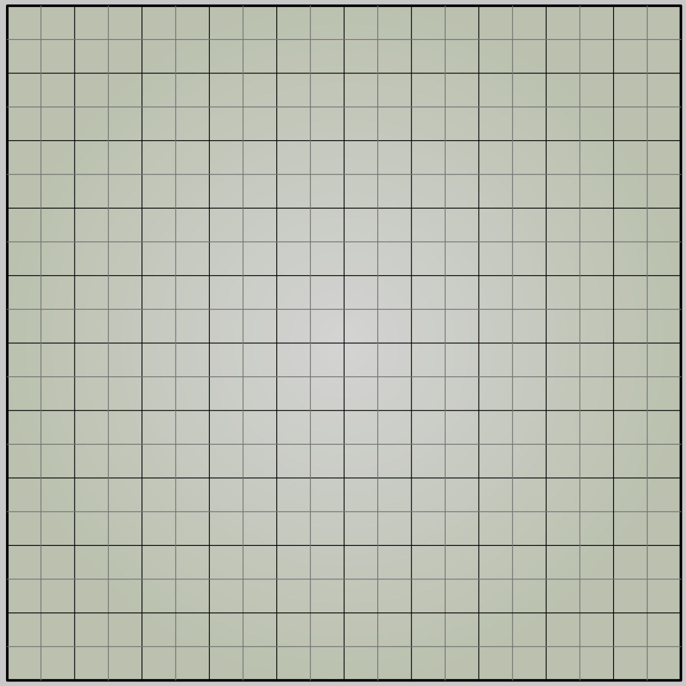
E 3.54 La recta r_1, pasa por los puntos $(-3,\ 1)$ y $(2,-3)$, la recta r_2 pasa por los puntos $(-1,3)$ y $(4,-1)$. Determina si r_1 y r_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.



E 3.55 La recta l_1, pasa por los puntos $(2,\ 1)$ y $(5,-1)$, la recta l_2 pasa por los puntos $(-1,4)$ y $(5,-3)$. Determina si l_1 y l_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

E 3.56 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2.3) y es paralela a la recta determinada por los dos puntos $(0,-3)$ y $(5,2)$.

E 3.57 Hallar la ecuación de la mediatriz (perpendicular en su punto medio) del segmento $(-4. -3)$, $(3, -7)$.



EJERCICIOS SESIÓN 6

Para los ejercicios E.3.58 y E.3.59 sea el triángulo rectángulo cuyos vértices son $A(-6, 0)$, $B(2, -4)$ y $C(-4, 4)$.

E 3.58 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto B y es paralela a la recta l_1 que pasa por los puntos A y C.

E 3.59 Determina la ecuación de la mediatriz del segmento BC.

E 3.60 La recta L_1, pasa por los puntos $(-3.5,\ -1.5)$ y $(-2, -1.5)$, mientras que la recta L_2 pasa por los puntos $(-1.5, -1.5)$ y $(-3.5, -0.5)$. Determina si L_1 y L_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos. Utilizando las pendientes de las rectas.

E 3.61 La recta L_1, pasa por los puntos $(0.5\ ,2.5)$ y $(2.5, 0.5)$, mientras que la recta L_2 pasa por los puntos $(-0.5,\ 5.5)$ y $(2.5, 2.5)$. Determina si L_1 y L_2 son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos. Utilizando las pendientes que cada una de las rectas.

E 3.62 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento $(-5.\ 0)$, $(0,\ 8)$.

SESIÓN 7 (2 HORAS)

Tema: Condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

Aprendizaje: Determina cuándo dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones

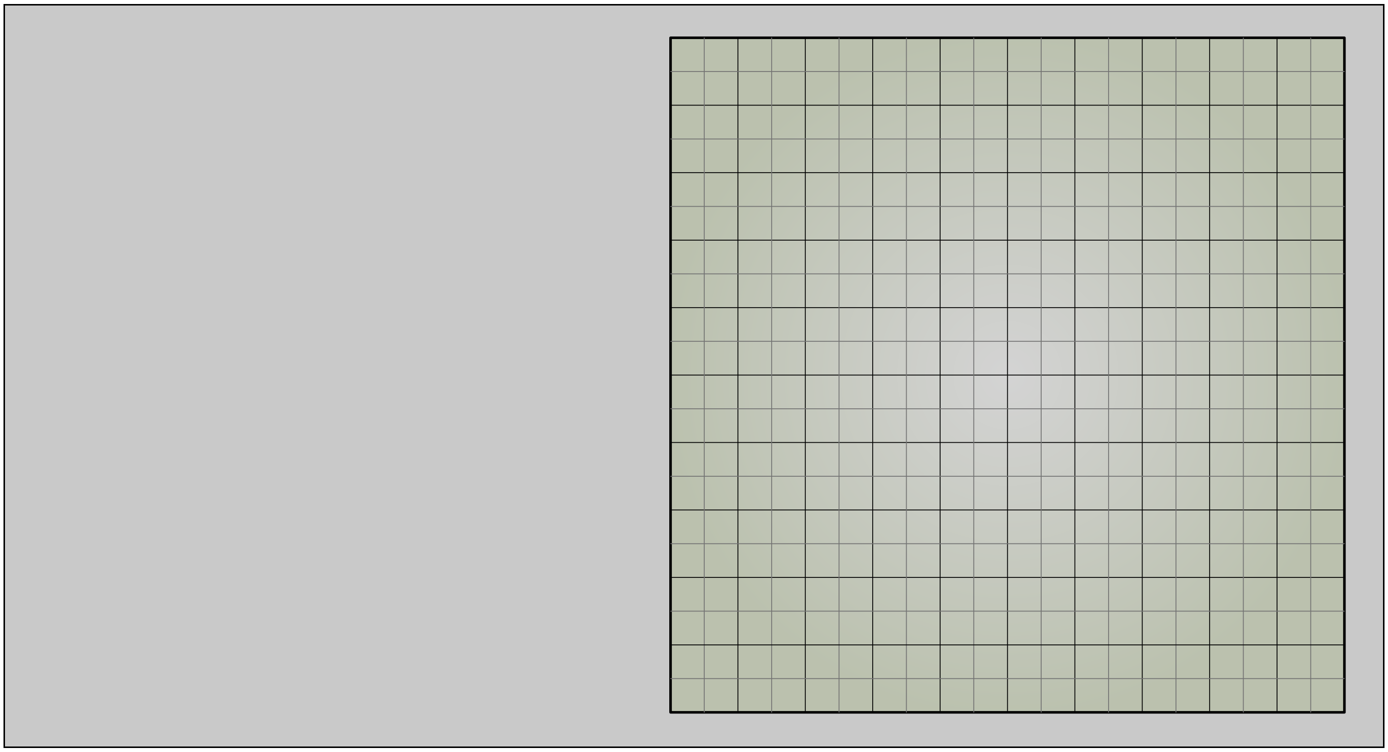
E 3.63 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento delimitado por las intersecciones de los ejes coordenados y la recta $7x - 3y - 21 = 0$.

E 3.64 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, -5)$ y es paralela a la recta $3x - 6y + 7 = 0$.

E 3.65 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,7)$ y es perpendicular a la recta $5x + 7y - 9 = 0$.

E 3.66 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(4, -5)$ y es paralela a la recta $3x - 5y + 15 = 0$.

E 3.67 Determinar la ecuación algebraica de la recta que paso por el origen y es perpendicular a la recta $x - y - 4 = 0$



EJERCICIOS SESIÓN 7

E 3.68 Determinar la ecuación algebraica de la recta que paso por el origen y es paralela a la recta $5x - 3y - 4 = 0$.

E 3.69 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $6x + 5y + 30 = 0$.

E 3.70 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(7, 0)$ y es paralela a la recta $2x - 6y + 5 = 0$.

E 3.71 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, 5)$ y es perpendicular a la recta $x + 4y - 9 = 0$.

E 3.72 Se quiere encontrar el cateto faltante de un triángulo rectángulo que está representado por la recta l_1 que pasa por el punto $(-6,2)$ y es perpendicular al cateto que representa la recta l_2: $5x + 3y + 24 = 0$ y la hipotenusa es l_3: $x - 13y + 100 = 0$. Grafique cada una de las rectas y en GeoGebra compruebe que es un triángulo rectángulo.

E 3.73 Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(7, 13)$ y es perpendicular a la recta $ax + by - 12 = 0$. La recta $ax + by - 12 = 0$ pasa por los puntos $A(-4, 2)$ y $B(4, 4)$.

SESIÓN 8 (2 HORAS)

Tema: Ecuación de la recta en su forma ordinaria o canónica, general y simétrica

Aprendizaje: Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).

FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA.

FORMA ORDINARIA O CANÓNICA.

La ecuación de la forma:

$$y = mx + b$$

se le llama ecuación ordinaria o canónica de la recta.

FORMA GENERAL

La ecuación de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

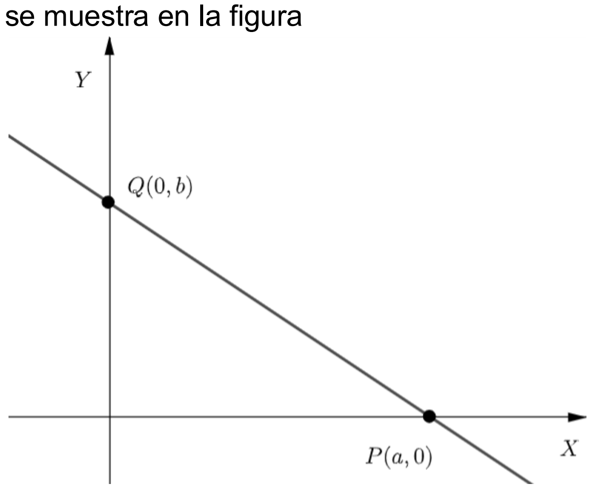
se le llama ecuación general de la recta, donde A, B y C son números reales y donde A y B no pueden ser nulos o (iguales a cero) simultáneamente. Con esta ecuación es posible determinar todas las rectas posibles, sin excepción.

FORMA SIMÉTRICA

Si conocemos las intersecciones de una recta con los ejes coordenados podemos demostrar que esa recta está determinada por la ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Donde a es la abscisa en el origen (valor de x cuando $y = 0$) y b es la ordenada en el origen (valor de y cuando $x = 0$), como se muestra en la figura



De acuerdo con la figura tenemos que:

$$m = \frac{b-0}{0-a} \text{ entonces } m = -\frac{b}{a}$$

Por la ecuación de la recta en la forma punto pendiente y considerando el punto $Q(0, b)$ tenemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sustituimos el punto Q y la pendiente m tenemos:

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0)$$

$$y - b = -\frac{b}{a}x$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación anterior por a resulta

$$a(y - b) = -bx$$
$$ay - ab = -bx$$
$$bx + ay = ab$$

Al dividir ambos miembros de la ecuación anterior por ab resulta

$$\frac{bx + ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$$

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Para los ejercicios del 1 al 5 considere que los vértices $A(-6,-2), B(6,6)\ y\ C(14,-6)$ de un triángulo. Halla:

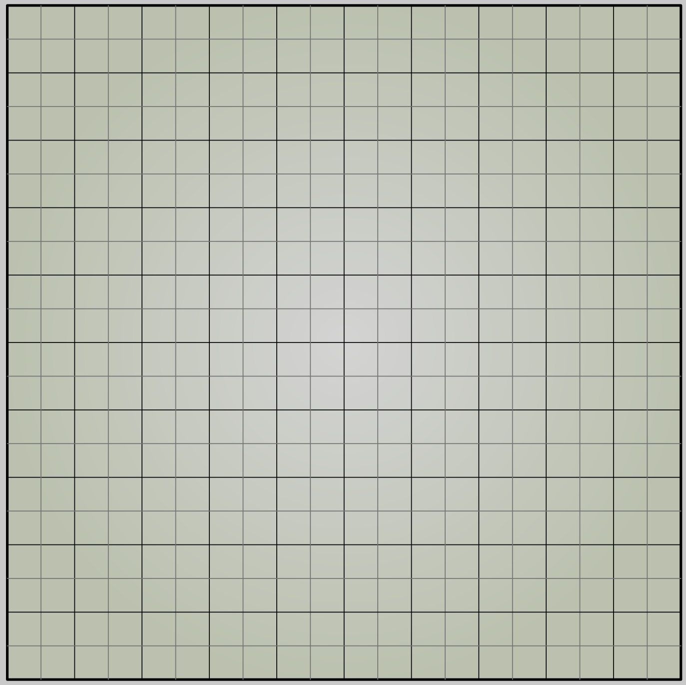
E 3.74 La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B en forma ordinaria.

E 3.75 Hallar la ecuación de la recta en forma general que pasa por el punto C y es perpendicular a la recta que está determinada por los puntos A y B.

E 3.76 Hallar la ecuación de la recta en forma simétrica que pasa por el punto A y es paralela a la recta que está determinada por los puntos B y C.

E 3.77 Dada la siguiente ecuación $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$ represente la ecuación en forma general y simétrica. Realiza la gráfica.

E 3.78 Hallar la ecuación de la recta en forma ordinaria y general a partir de la siguiente ecuación $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$ y elabore su gráfica.



EJERCICIOS SESIÓN 8

E 3.79 Hallar la ecuación de la recta en forma ordinaria cuya pendiente es -3, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $6x+5y=5$ y $4x+5y=0$.

E 3.80 Determinar la ecuación de la recta en forma general que tiene pendiente $m=-\frac{2}{5}$, y corta al eje y en (0, -3).

E 3.81 Determinar la ecuación de la recta en forma simétrica que corta al eje de las abscisas en 2 tiene un ángulo de inclinación 120°.

E 3.82 Hallar la ecuación de la mediatriz en forma canónica del segmento $\overline{AB}$ donde $A(-3,2)$ y $B(3,-7)$.

E 3.83 Dada la siguiente ecuación $3x-6y+5=0$ represéntela en forma ordinaria y simétrica.

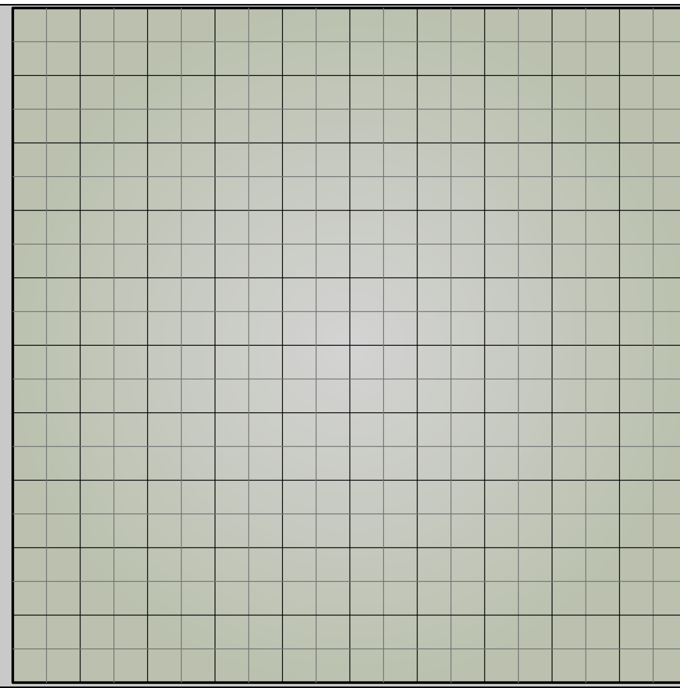
E 3.84 Hallar la ecuación de la recta en forma ordinaria y general a partir de la siguiente ecuación $\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{3}{4}}=1$ y elabore su grafica.

SESIÓN 9 (1 HORA)

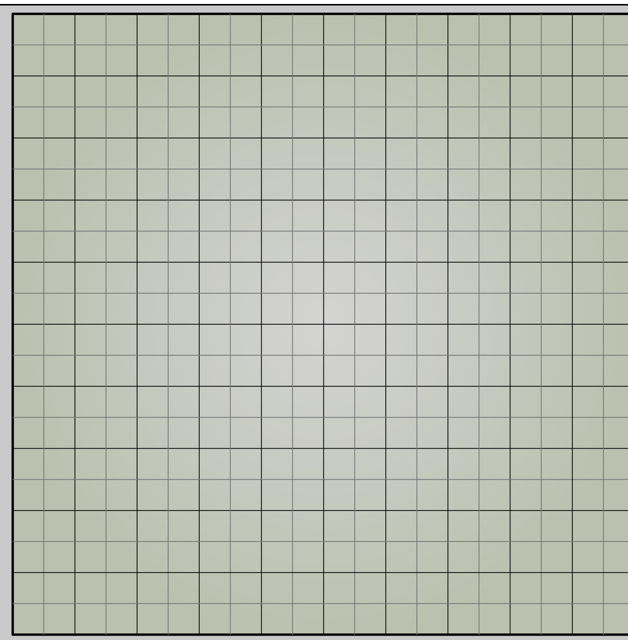
Tema: Ecuación de la recta en su forma ordinaria o canónica, general y simétrica.

Aprendizaje: Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica)

E 3.85 Transforma la ecuación $4x + 2y - 15 = 0$ a la forma ordinaria y elabora su gráfica.



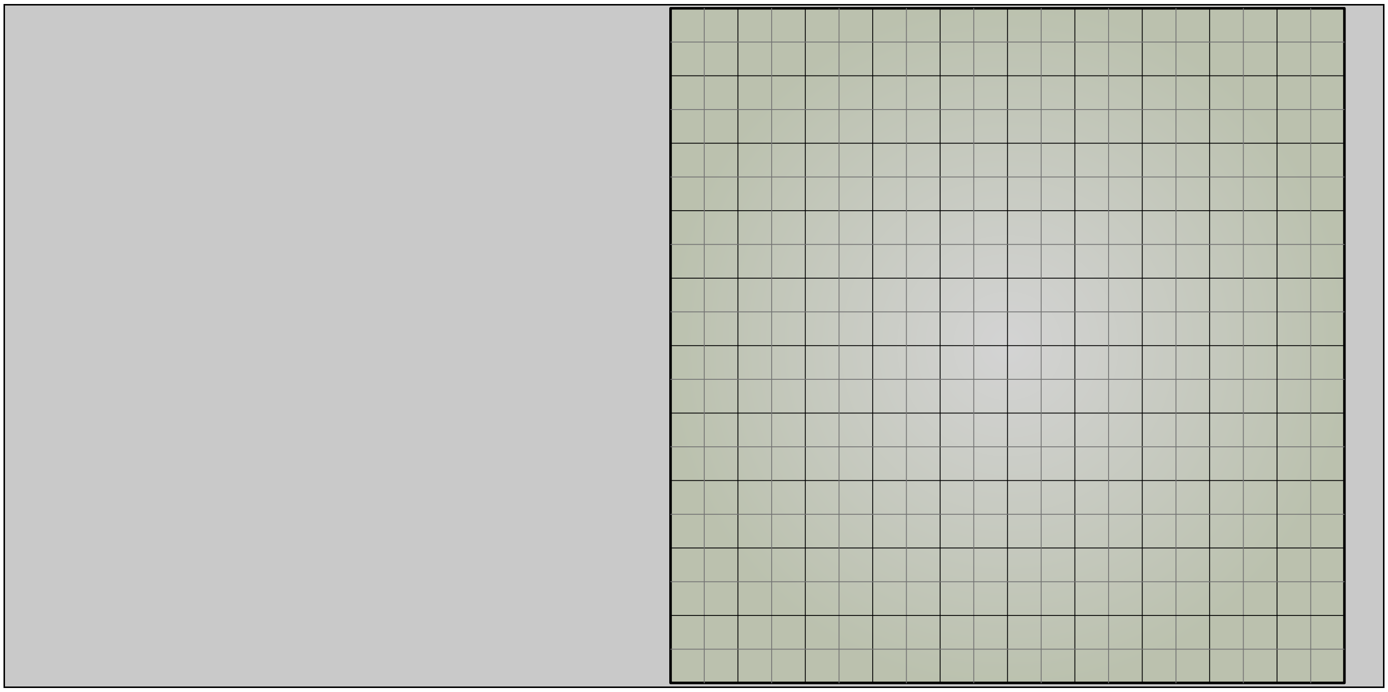
E 3.86 Transforma la ecuación $4x + y + 16 = 0$ a la forma simétrica y elabora su gráfica.



E 3.87 Transforma la ecuación $y = \frac{3}{5}x + 6$ a la forma general y elabora su gráfica.

E 3.88 Dada la siguiente ecuación $y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$ represente la ecuación en forma general y simétrica. Traza la gráfica.

E 3.89 Hallar la ecuación de la recta en forma ordinaria y general a partir de la siguiente ecuación $\frac{x}{-3}+\frac{y}{5}=1$ y elabore si gráfica.



EJERCICIOS SESIÓN 9

E 3.90 Transforma la ecuación $y=-5x+7$ a la forma general y elabora su grafica.

E 3.91 Transforma la ecuación $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1$ a la forma general y elabora su grafica.

E 3.92 Transforma la ecuación $4x-3y=-1$ a la forma ordinaria y elabora su grafica.

E 3.93 Dada la siguiente ecuación $y=-\frac{1}{7}x+\frac{2}{3}$ represente la ecuación en forma general y simétrica. Represente la gráfica.

E 3.94 Dada la siguiente ecuación $y=5x-\frac{5}{7}$ represente la ecuación en forma simétrica y simétrica. Represente la gráfica.

E 3.95 Transforma la ecuación $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$ a la forma ordinaria y elabora su gráfica.

SESIÓN 10 (2 HORAS)

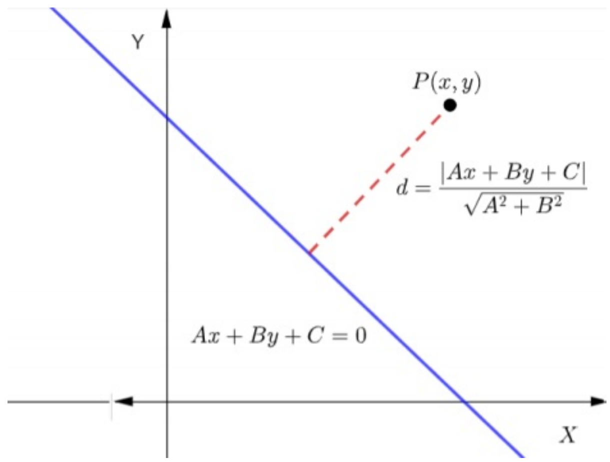
Tema: Intersección entre dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Ecuaciones de rectas notables de un triángulo.

Aprendizaje: Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

La fórmula para calcular la distancia dirigida de un punto $P(x_1, y_1)$ a una recta l determinada por la ecuación $Ax + By + C = 0$ es:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Encontrar la distancia dirigida del punto $P(9, -3)$ a la recta $3x - 4y - 24 = 0$.

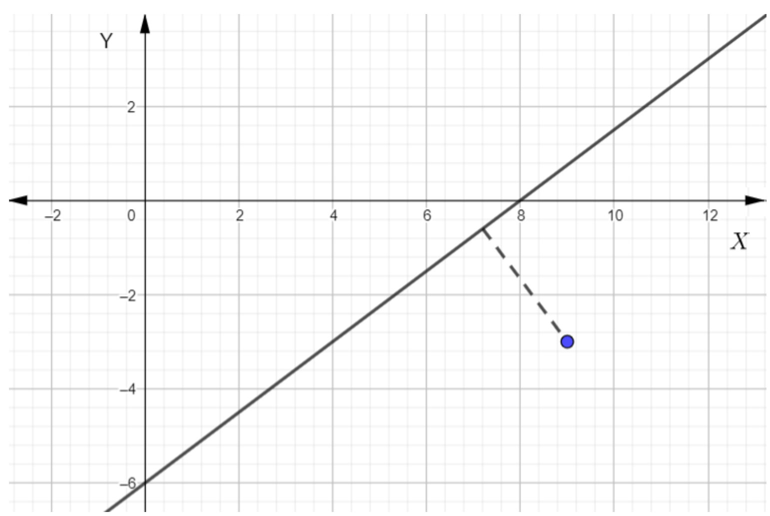
Con base en la ecuación de la recta $A = 3$, $B = -4$ y $C = -24$, y con el punto P, $x = 9$ y $y = -3$. Entonces:

$$d = \frac{|3(9) - 4(-3) - 24|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{|27 + 12 - 24|}{5}$$

$$d = \frac{|15|}{5}$$

$$d = 3$$



E 3.96 Encontrar la distancia del punto $P(5,-2)$ a la recta $4x+3y+4=0$.

E 3.97 Calcular la distancia entre las rectas, $10x+4y+6=0$ y $10x+4y-7=0$.

E 3.98 Halla el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta que tiene como ecuación $5x + 4y + 20 = 0$.

E 3.99 Hallar la medida de las alturas del triángulo formado por las rectas $5x - 9y + 25 = 0$, $2x + 8y + 10 = 0$ y $7x - y - 23 = 0$. Traza la gráfica.

EJERCICIOS SESIÓN 10

E 3.100 Encontrar la distancia del punto $P(5,-2)$ a la recta $-5x+11y-7=0$.

E 3.101 Calcular la distancia entre las rectas paralelas, $2x-13y+8=0$ y $2x-13y-5=0$.

E 3.102 Halla el área del triángulo rectángulo formado por los ejes coordenados y la recta que tiene como ecuación $-2x + 4y + 7 = 0$.

E 3.103 Hallar la medida de las alturas del triángulo formado por las rectas $x+y+8=0$, $x-y+4=0$ y $3x-y-4=0$ y traza la gráfica.

E 3.104 Encontrar el área del triángulo formado entre las rectas $y=x+2$, $y=-0.2x-0.4$ y $y=-2x+5$.

SESIÓN 11 (2 HORAS)

Tema: Intersección entre dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Ecuaciones de rectas notables de un triángulo.

Aprendizaje: Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

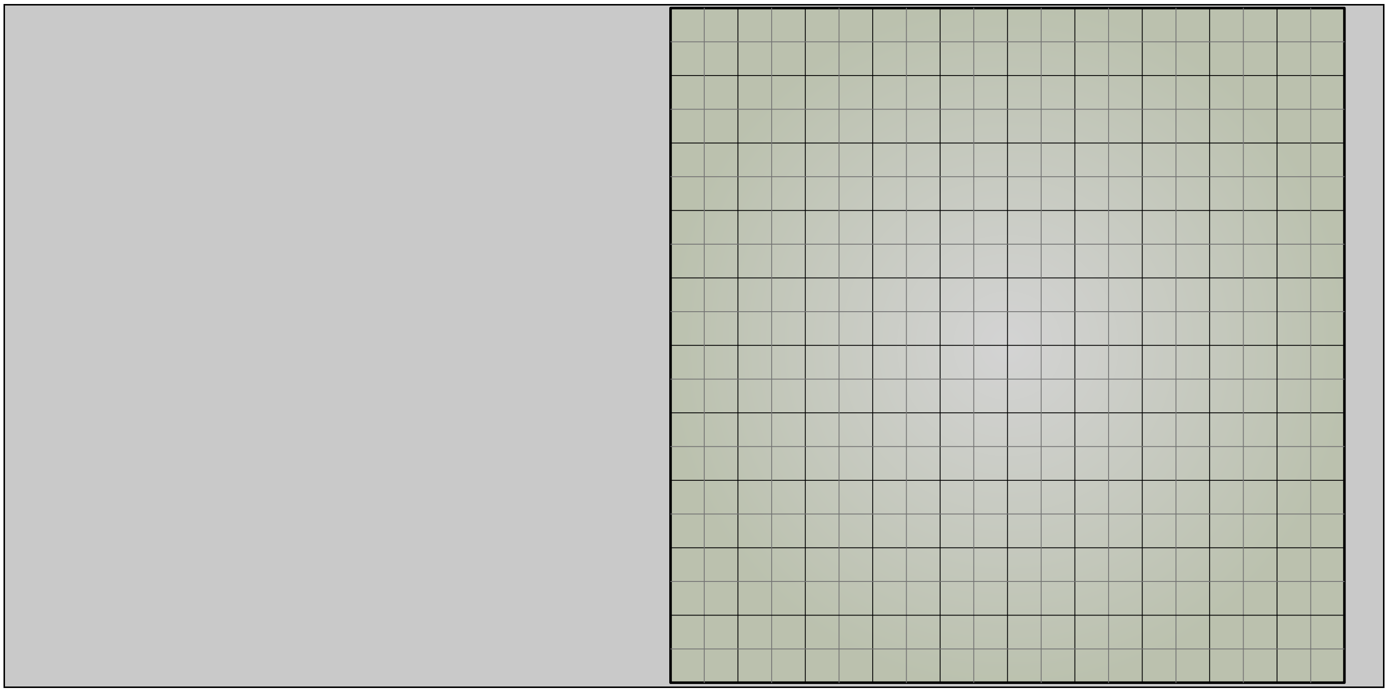
E 3.105 En el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,3)$. Hallar las ecuaciones de sus mediatrices.

E 3.106 Encuentra circuncentro de las mediatices del ejercicio 1.

E 3.107 Encuentre los puntos de intersección de las rectas $l_1: 11x + 12y - 50 = 0$, $l_2: -5x + 2y - 22 = 0$ y $l_3: x + 16y + 70 = 0$ representan los vértices de un triángulo.

E 3.108 Del ejercicio 3 encuentre las medianas del triángulo que representan los puntos de intersección de las ecuaciones.

E 3.109 Encuentra el punto de intersección de las medianas del ejercicio 3, llamado Baricentro.



EJERCICIOS SESIÓN 11

E 3.110 Encuentre los puntos de intersección de las rectas $l_1: 8x + 17y - 45 = 0$, $l_2: 4x - 3y - 6 =$ 043 y $l_3: 2x - 7y + 45 = 0$ representan los vértices de un triángulo.

Del ejercicio anterior:

E 3.111 encuentre las medianas del triángulo que representan los puntos de intersección de las ecuaciones.

E 3.112 Encuentra el punto de intersección de las medianas del ejercicio anterior llamado Baricentro.

E 3.113 En el triángulo de vértices $A(-2,\ 3), B(16, 6)$ y C(4, -2). Halla las ecuaciones de sus mediatrices.

E 3.114 Encuentra el punto de intersección de las mediatices del ejercicio E.3.65, llamado Circuncentro.

SESIÓN 12 (1 HORA)

Tema: Intersección entre dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Ecuaciones de rectas notables de un triángulo.

Aprendizaje: Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

E 3.115 En el triángulo de vértices $A(6,6)$, $B(-2,3)$ y $C(8,-5)$. Halla las ecuaciones de sus alturas.

E 3.116 Encuentra el punto de intersección de las alturas (ortocentro).

Considere el triángulo de vértices $A(-2;\ 3)$, $B(16;\ 6)$ y $C(4;\ -2)$ para los ejercicios 4 al 6.

E 3.117 El ortocentro del triángulo.

E 3.118 El baricentro del triángulo.

E 3.119 El circuncentro del triángulo.

E 3.120 Recta de Euler.

EJERCICIOS SESIÓN 12

E 3.121 En el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,3)$. Hallar:

a) Las ecuaciones de sus lados.
b) La ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.
c) La ecuación de Euler

E 3.122 En el triángulo de vértices $A(-3,-2)$, $B(5,3)$ y $C(9,1)$. Hallar:

a) Las ecuaciones de sus lados.
b) La ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.
c) La ecuación de Euler.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada problema, resuelve cada uno de ellos, anotando claramente el procedimiento realizado, no se permite el uso de formulario o smartphone, se ordenado y cuidadoso con tu escritura.

1.- En el triángulo de vértices $A(2,1)$, $B(4,7)$ y $C(6,3)$. Halla:

a) Las ecuaciones de sus lados.

b) La ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC.

c) Las ecuaciones de las medianas y su punto de intersección, llamado Baricentro.

d) Las ecuaciones de sus mediatrices y su punto de intersección llamado Circuncentro.

2.- Hallar la distancia de la recta:

a) $3x + 4y + 12 = 0$ al punto $P(3,-1)$
b) $3x - 4y - 9 = 0$ al punto $P(-2,5)$

3.- Hallar el área del triángulo formado por las rectas $2x+2y+16=0$, $2x-2y+8=0$ y $6x-2y-8=0$ y traza la gráfica.

RÚBRICA PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES A LA UNIDAD III DE MATEMÁTICAS III

CURSO:	**MATEMÁTICAS III**			
UNIDAD 3:	**La recta y su Ecuación Cartesiana**			
OBJETIVO:	Evaluar los aprendizajes correspondientes al tema de la recta y su ecuación cartesiana.			
Porcentaje:	100			
Criterios	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Total**
Recta y su ecuación cartesiana				
Obtiene la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.	A partir de dos condiciones se encuentra la ecuación de la recta dados: • Dos puntos. • Un punto y la pendiente. • La pendiente y la ordenada al origen. • Un punto y el ángulo de inclinación. de manera correcta el proceso algebraico. **Puntos: 20**	A partir de las diferentes condiciones: • Dos puntos. • Un punto y la pendiente. • La pendiente y la ordenada al origen. • Un punto y el ángulo de inclinación. sólo encuentra la ecuación de la recta por dos de los puntos anteriores u obtiene de manera parcialmente correcta la ecuación de la recta o presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 15**	A partir de dos condiciones no puede obtener de manera correcta la ecuación de la recta, presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Determina el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.	A partir de las pendientes de dos rectas que se cortan, obtiene de manera correcta el ángulo que se forma cuando las dos rectas se intersecan. **Puntos: 20**	A partir de las pendientes de dos rectas que se cortan, obtiene de manera parcialmente correcta el ángulo que se forma cuando las dos rectas se intersecan, con algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 15**	A partir de las pendientes de dos rectas que se cortan, no puede obtener el ángulo que se forma cuando las dos rectas se intersecan., presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	

Determina cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.	Aplica de manera correcta el criterio cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos. **Puntos: 20**	Aplica de manera parcialmente correcta el criterio cuando dos retas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos. Presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 15**	Aplica de manera incorrecta el criterio cuando dos retas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).	A partir de la ecuación de la recta en sus diferentes formas: • ordinaria o canónica general y simétrica transitar de una a otra forma e identificar cada una de ella. **Puntos: 20**	A partir de la ecuación general de la recta en sus diferentes formas: • ordinaria o canónica general y simétrica transita de manera parcialmente correcta la ecuación de la recta en sus diferentes formas con algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 15**	A partir de la ecuación general de la recta en sus diferentes formas: • ordinaria o canónica general y simétrica transita de manera errónea de una forma a otra presentando errores y no identifica cada una de ellas. **Puntos: 15**	
Resuelve problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.	Aplica de manera correcta la ecuación de la recta, identifica adecuadamente cómo utilizar la ecuación ordinaria o canónica, general y simétrica para obtener información que le permita resolver el problema planteado. **Puntos: 20**	Aplica de manera parcialmente la ecuación de la recta identifica adecuadamente cómo utilizar la ecuación ordinaria o canónica, general y simétrica para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 15**	Aplica de manera incorrecta la ecuación de la recta, identifica adecuadamente cómo utilizar la ecuación ordinaria o canónica, general y simétrica para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
			Total:	

PROBLEMA PARA INVESTIGAR

En los años 325 – 265 a de C, durante el reinado de Ptolomeo I, vivió en Alejandría (actualmente Egipto) un matemático y geómetra griego llamado EUCLIDES, el cual es considerado el padre de la geometría.

Euclides, en su libro los elementos, define la recta como “Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”, conjuntamente se encuentran los siguientes postulados propuestos por Euclides:

1.- De acuerdo con lo anterior investiga cuales son los postulados de Euclides.

2.- ¿Quién fue el que realizó una conexión entre la geometría y el algebra, al demostrar cómo aplicar los métodos de una disciplina en la otra?

3.- Con lo aprendido en esta unidad resuelve el siguiente problema:

Demuestra que la recta que pasa por los puntos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $Q\left(\frac{1}{3},0\right)$ corta a la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es uno en el punto de coordenadas $R=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

3.- Con ayuda de GeoGebra trata de resolver el siguiente problema:

a) Encuentre los valores de las constantes a y b tales que las rectas $ax+3y-11=0$ y $y-x+by-8=0$ se corta en el punto $P(2,5)$.

FORMULARIO DE LA UNIDAD.

Pendiente de la Recta	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Ángulo de inclinación de la recta	$m = tan\,\theta$
Ecuación de la recta dados	
Dos puntos	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Un punto y la pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
La pendiente y la ordenada al origen	$y = mx + b$
Un punto y el ángulo de inclinación	$y = tan\,\theta \cdot x + b$
Ángulo entre dos rectas	$tan\,\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ con $m_1 \cdot m_2 \neq -1$
Condiciones para que dos rectas sean:	
Paralelas	$m_1 = m_2$
Perpendiculares	$m_1 \cdot m_2 = -1$
Ecuación de la recta en forma:	
Ordinaria o canónica	$y = mx + b$
General	$Ax + By + C = 0$
Simétrica	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
Distancia de una recta a un punto	$d = \frac{\lvert Ax + By + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

RESULTADOS DE EJERCICIOS Y EVALUACIÓN.

E.3.5	Pendientes: $m_{AB} = m_{BC} = m_{AC} = 4$ $m_{AD} = 3.57$ $m_{BD} = 3.4$ $m_{CD} = 2.5$ Se pueden trazar 4 rectas distintas	E.3.62	Paralelas
E.3.6	Pendiente: $m = 0.5$	E.3.68	$10x + 16y - 39 = 0$
E.3.7	Abscisa es 2 Ordenada al origen es 6	E.3.69	$5x - 3y = 0$
E.3.8	a) \$60 000 b) \$400 c) 150 d) \$21 600	E.3.70	$10x - 12y - 11 = 0$
E.3.9	a) $y = 45\,000x + 300\,000$ b) \$1 200 000 c) 45 000	E.3.71	$2x - 6y + 5 = 0$
E.3.10	Abscisa a Ordenada al origen b	E.3.72	$4x - y + 5 = 0$
E.3.16	Ángulo de inclinación $\emptyset = 140.2°$	E.3.73	$3x - 5y - 28 = 0$
E.3.17	Ángulo de inclinación $\emptyset = 26.56°$	E.3.79	$4x + y - 41 = 0$
E.3.18	a) P no pertenece Q si pertenece b) P si pertenece Q si pertenece	E.3.80	$y = -3x + 5.5$
E.3.19	$9x - 7y + 24 = 0$	E.3.81	$4x + 10y + 30 = 0$
E.3.20	$y = 0.7x - 7.3$	E.3.82	$\frac{x}{\frac{35}{17}} + \frac{y}{\frac{35}{10}} = 1$
E.3.21	$-3x + 6y - 6 = 0$	E.3.83	$y = 0.7x - 2.5$
E.3.27	$y = -0.4x + 1.2$	E.3.84	Forma canónica. $y = 0.5x + 0.83$ Forma simétrica. $\frac{x}{-\frac{5}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{6}} = 1$
E.3.28	$y = \frac{6}{5}x$	E.3.90	$5x + y - 7 = 0$
E.3.29	Ángulo de inclinación $\emptyset = 146.3°$	E.3.91	$3x - 5y + 15 = 0$

E.3.30	$y = 1.4x + 3.5$	E.3.92	$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$
E.3.31	$y = -0.5x - 6.5$	E.3.93	$3x + 21y - 14 = 0$
E.3.32	$y = 0.6x + 0.8$	E.3.94	$\frac{x}{\frac{1}{7}} + \frac{y}{-\frac{5}{7}} = 1$
E.3.38	$y = 8x - 7$	E.3.95	$2x - 5y - 10 = 0$
E.3.39	$y = -\frac{2}{7}x - 3$	E.3.100	$d = 4.47u$
E.3.40	$y = 6x - 5$	E.3.101	$d = 0.99u$
E.3.41	$y = -x + 5$	E.3.102	Área=$3.06u^2$
E.3.42	$y = x + 4$	E.3.103	Alturas: $6.32u$ $7.07u$ $14.14u$
E.3.43	$y = -x + 8$	E.3.104	Área= $9u^2$
E.3.48	90°	E.3.110	Vértices: $A(-5,5), B\ (8, 8.7)$ y $C(2.6, 1.4)$
E.3.49	23.4°	E.3.111	Medianas: $7x + 2y - 21 = 0$ $8x + 10y - 13 = 0$ $21x - 10y - 84 = 0$
E.3.50	66.6°	E.3.112	$d = 0.8\,u$
E.3.51	0°	E.3.113	Baricentro (3.3, -1.3)
E.3.52	90°	E.3.114	Mediatrices: $35x + 10y - 122 = 0$ $21x - 10y - 58 = 0$ $8x + 10y - 91 = 0$
E.3.58	46°	E.3.120	Circuncentro (1.1, 8.2)
E.3.59	$2x - y - 8 = 0$	E.3.121	a) Las ecuaciones de sus lados. $4x + 2y - 30 = 0$ $61x - 21y - 97 = 0$ $21x - 41y - 3 = 0$ b) La ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al lado BC. $20x + 10y - 47 = 0$ c) Recta de Euler $10x + 31y - 153 = 0$
E.3.60	$3x - 4y + 3 = 0$	E.3.122	a) Las ecuaciones de sus lados. $5x - 8y + 1 = 0$ $x + y - 8 = 0$ $x - 12y - 21 = 0$ b) La ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular al lado AB. $8x + 5y - 67 = 0$ c) Recta de Euler $87x - 17y + 317 = 0$
E.3.61	Ninguna de las dos		

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

Cuéllar, J. (2012). *Matemáticas III*. México: McGraw Hill.

Stewart, J. (2012). *Precálculo*. (6a ed.). México, México: Cengage Learning.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.

Swokowski, E. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

Para el profesor:

Swokowski, E. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.

Stewart, J. (2012). *Precálculo*. (6a ed.). México, México: Cengage Learning.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS III

UNIDAD IV: La Parábola y su Ecuación Cartesiana

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
JUAN RODRÍGUEZ AGUILAR
LAURA PÉREZ ROSAL
LUIS FERNANDO ARRIETA VELAZCO
MARIBEL SERRATO DUARTE
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

2020- 2021

MATEMÁTICAS III UNIDAD IV	LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA
Propósito: Será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades. Elaborado por: Laura Pérez Rosal Juan Rodríguez Aguilar	Aprendizajes **Sesión 1:** Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico, reconoce la simetría de esta curva e identifica los elementos que la definen. **Sesión 2:** Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él. **Sesión 3:** Identifica los elementos que definen la parábola y reconoce la simetría de esta curva. **Sesión 4:** Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana. **Sesión 5:** Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa. **Sesión 6:** Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos. **Sesión 7:** Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas. **Sesión 8 y 9:** Resuelve problemas de aplicación y valoran su conocimiento sobre parábola.

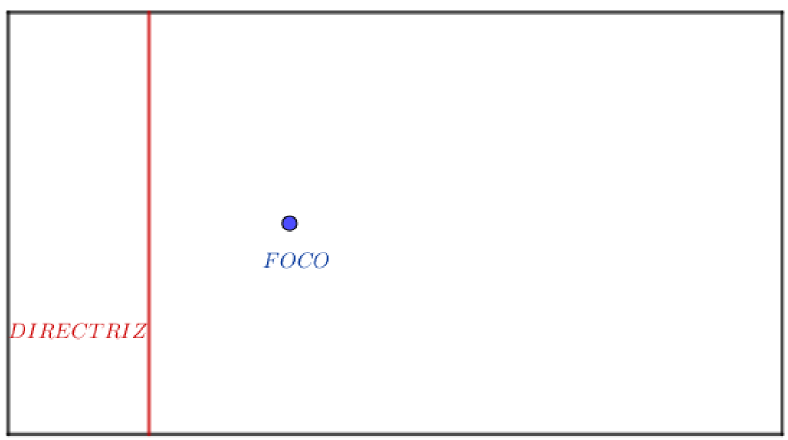
En esta unidad se trabajará con parábola, inicialmente como lugar geométrico, identificando sus elementos y características. Por medio de la resolución de algunos problemas y ejercicios se buscará que el alumno obtenga la definición de la parábola e identifique sus elementos. Se trabajará con algunos problemas, para que el alumno pueda aplicar los conocimientos adquiridos en cada una de las cónicas.

SESIÓN 1 (2 HORA)

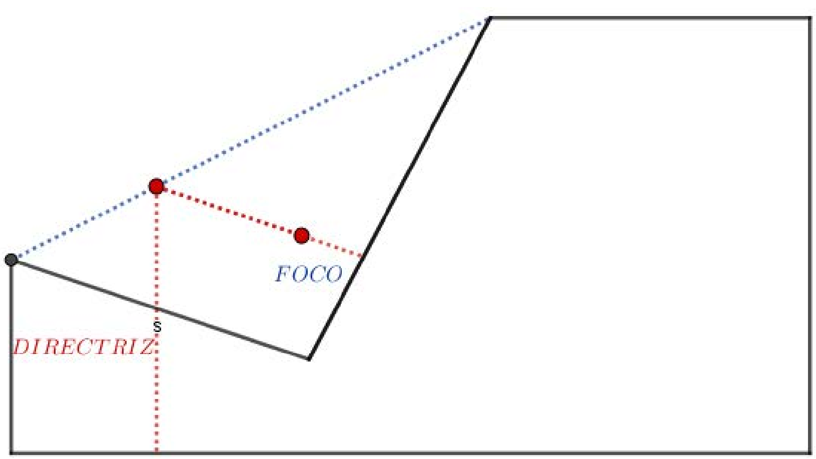
Tema: La parábola como lugar geométrico

Aprendizaje: Obtiene por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico. Reconoce la simetría de esta curva e identifica los elementos que la definen. Identifica los elementos que definen la parábola

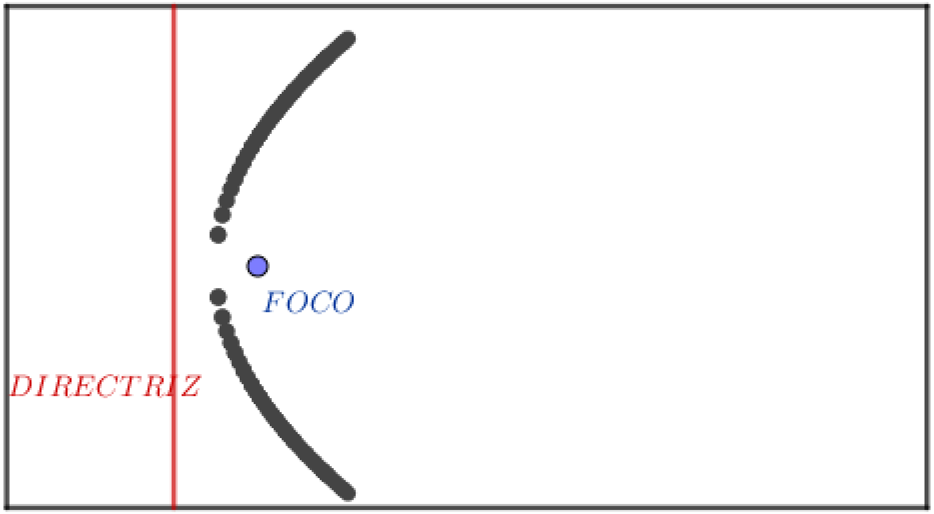
E 4.1 En una hoja de papel encerado o papel albanene tamaño carta, dibuja una recta (Directriz) que sea paralela a uno de los lados más pequeños de la hoja. También, traza un punto a la derecha de esta recta (Foco), situado aproximadamente al centro.



Haz coincidir los puntos de la directriz con el Foco, marcando el doblez para cada uno de ellos



A medida que vayas realizando más dobleces se formará una figura como la que se muestra, que corresponde a una parábola.



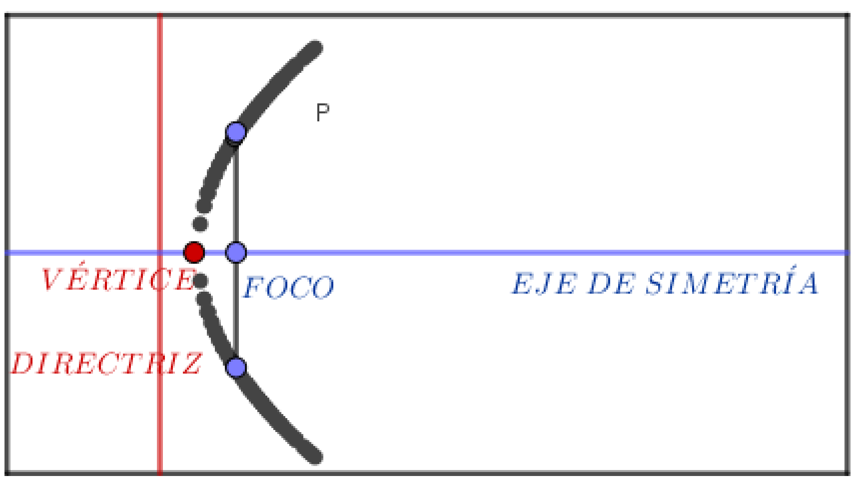
Compara tu construcción con las de tus compañeros, ¿en qué se parecen y en que difieren?

____
____
____

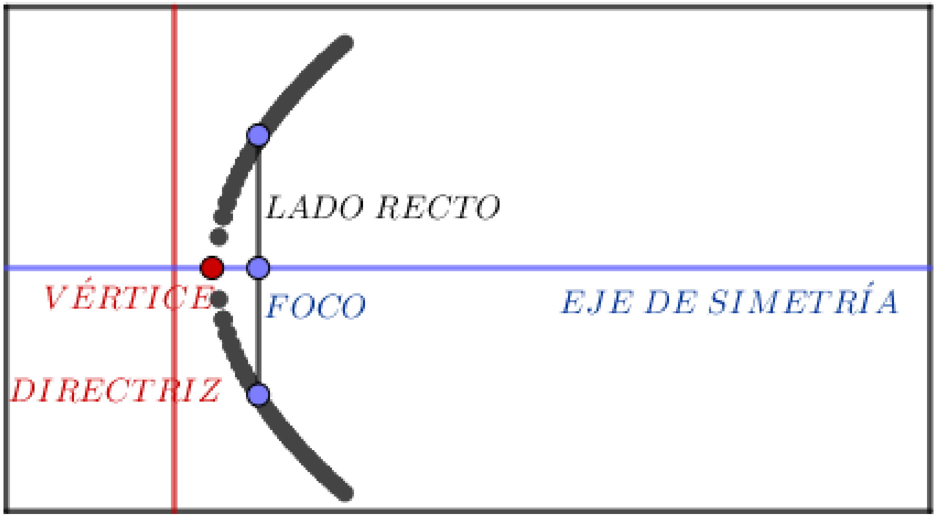
¿Por qué razones se dan estas diferencias?

____
____
____

Realiza un doblez que sea perpendicular a la directriz y que contenga al Foco. Esta recta se llama eje de simetría y divide a la parábola en dos partes iguales. Localiza el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. Este punto se llama Vértice.



Sobre el eje de simetría, mide la distancia que hay de la Directriz al vértice y del vértice al foco. Esta distancia se le llama distancia focal y la identificaremos con la letra P.
Ahora realiza un doblez perpendicular al eje de simetría que contenga al Foco. El segmento que se forma en la parte interna de la parábola se llama Lado Recto. La Longitud del Lado Recto (LLR), es equivalente a cuatro veces la distancia focal, es decir, $LLR = |\, 4\, p\, |$.



Toma un punto P de la parábola. Ahora mide la distancia del punto P a la recta directriz y del punto P al foco. ¿Qué observas?

Ahora toma otro punto de la parábola y realiza la misma acción, en este caso, ¿qué observas?

De acuerdo con estas observaciones, ¿qué sucederá si tomas cualquier otro punto de la parábola?

Ahora sitúa el Vértice de la parábola en el origen de un sistema de coordenadas, es decir, el Vértice tendrá coordenadas (0,0); considera un punto arbitrario de la parábola, un punto P de coordenadas (x, y). De acuerdo con lo observado anteriormente, la distancia de este punto P a la recta Directriz es la misma que de este punto al Foco. Dado que se situó el Vértice en el origen, la recta Directriz tiene ecuación $x = -p$ y el Foco tiene coordenadas $(p, 0)$.

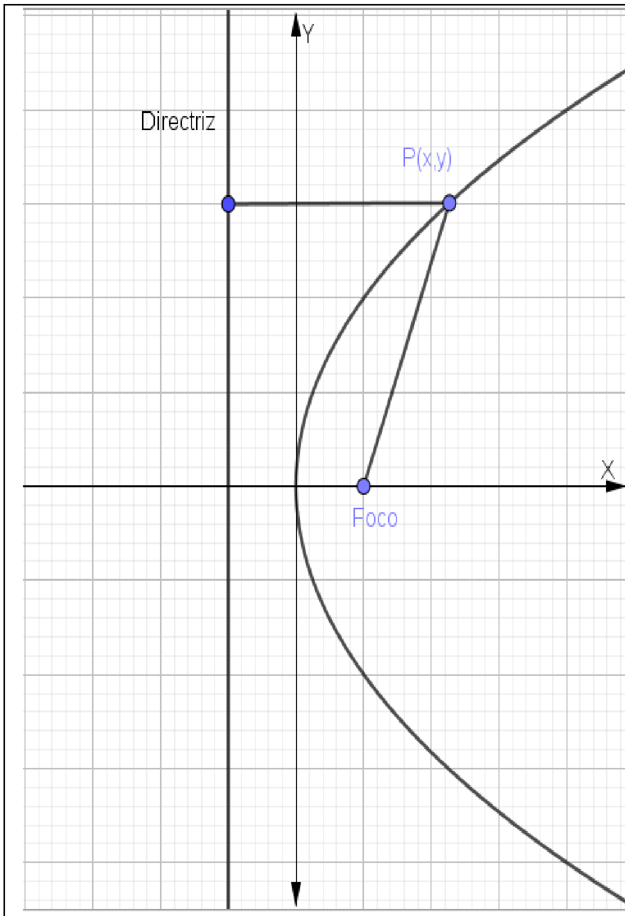
Nota: Se recomienda el uso de GeoGebra para verificar la construcción.

LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

La parábola se define como: El lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano cartesiano, de tal manera que su distancia a una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama Foco y la recta fija Directriz de la parábola.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN.

Dado que el Vértice se ubica en el origen, el Vértice tiene coordenadas $(0,0)$. Como existe la misma distancia del Vértice a la Directriz que del Vértice al Foco, entonces el Foco tiene coordenadas $(0, p)$. Como estamos situando un punto P cualquiera en la parábola, asumiremos que tiene coordenadas (x, y).



De acuerdo con la definición que se había establecido anteriormente, la distancia del punto P de la parábola debe estar a la misma distancia del Foco que de la Directriz, es decir, $d\ P\ Foco = d\ P\ Directriz.$

$$d\ P\ Foco = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 2xp + p^2 + y^2}$$
$$d\ P\ DIRECTRIZ = \left|\frac{(x)(1) + (y)(0) + p}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}}\right| =$$
$$= |x + p|$$

Igualando los resultados anteriores

$$\sqrt{x^2 - 2xp + p^2 + y^2} = |x + p|$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\left(\sqrt{x^2 - 2xp + p^2 + y^2}\right)^2 = (|x + p|)^2$$
$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

Simplificando

$$x^2 - x^2 + y^2 + p^2 - p^2 = 2xp + 2xp$$
$$y^2 = 4px$$

Que es la ecuación correspondiente

EJERCICIOS SESIÓN 1

E 4.2 Deduce la ecuación de la parábola considerando que el vértice se localiza en el origen y el foco se encuentra a la izquierda del vértice.

E 4.3 Deduce la ecuación de la parábola considerando que el vértice se localiza en el origen y el foco se encuentra verticalmente arriba del vértice.

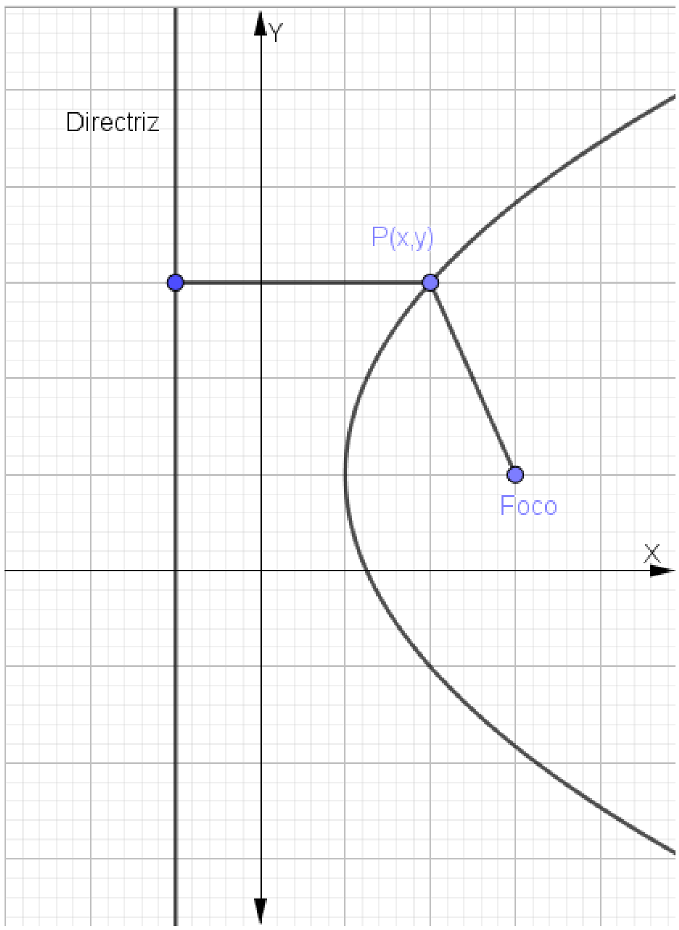
E 4.4 Deduce la ecuación de la parábola considerando que el vértice se localiza en el origen y el foco se encuentra verticalmente abajo del vértice.

SESIÓN 2 (2 HORAS)

Tema: La parábola como lugar geométrico

Aprendizaje: Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE FUERA DEL ORIGEN.



Obtengamos la ecuación de esta parábola cuyo vértice se encuentra fuera del origen, Foco de coordenadas $(3,1)$ y recta Directriz $x = -1$. De acuerdo con la definición que se había establecido anteriormente, la distancia del punto P de la parábola debe estar a la misma distancia del Foco que de la Directriz, es decir, $d\ P\ Foco = d\ P\ Directriz$.

$$d\ P\ Foco = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}$$

$$d\ P\ DIRECTRIZ = \left|\frac{(x)(1)+(y)(0)+1}{\sqrt{(1)^2+(0)^2}}\right|$$

$$= |x+1|$$

Igualando los resultados anteriores

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x+1|$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad

$$\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = (|x+1|)^2$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Simplificando

$$(y-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x-3)^2$$

$$(y-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 6x - 9$$

$$(y-1)^2 = 8x - 8$$

Factorizando obtenemos la ecuación buscada

$$(y-1)^2 = 8(x-1)$$

Esta ecuación es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

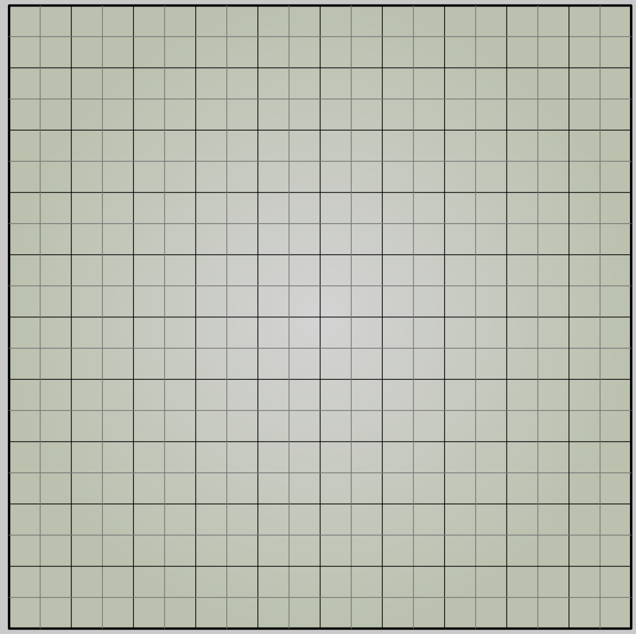
Las coordenadas del Vértice son $(1,1)$

$4p = 8$, así que $p = \frac{8}{4} = 2$

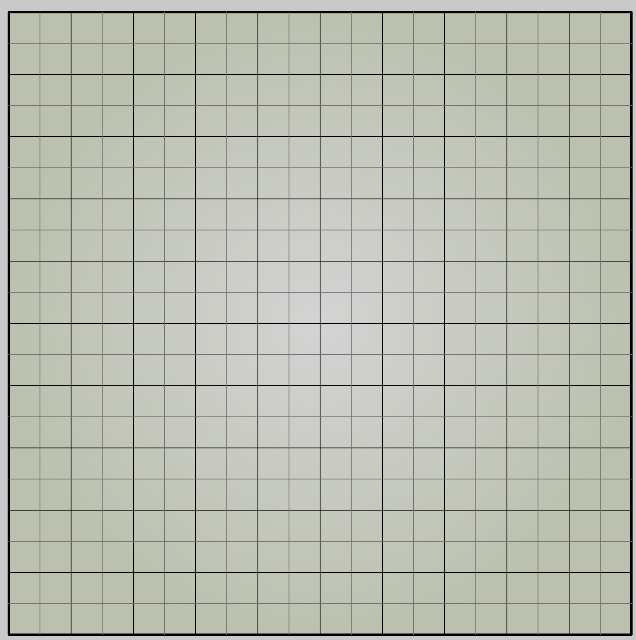
E 4.5 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(0,2)$ y de la recta $y + 2 = 0$. Gráfica.

E 4.6 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(2,0)$ y de la recta $x + 2 = 0$. Gráfica.

E 4.7 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(6,2)$ y del eje Y. Gráfica.



E 4.8 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(4, -4)$ y del eje X. Gráfica.



EJERCICIOS SESIÓN 2

E 4.9 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(-4, -2)$ y de la recta $y = 2$. Gráfica.

E 4.10 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(3,3)$ y de la recta $x = -1$. Gráfica.

E 4.11 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(-2, -3)$ y de la recta $y = -5$. Gráfica.

E 4.12 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de coordenadas (x, y) que se encuentran a la misma distancia del punto $A(-4,3)$ y del eje Y. Gráfica.

Nota: Verifica tus resultados con GeoGebra y realizar las gráficas correspondientes.

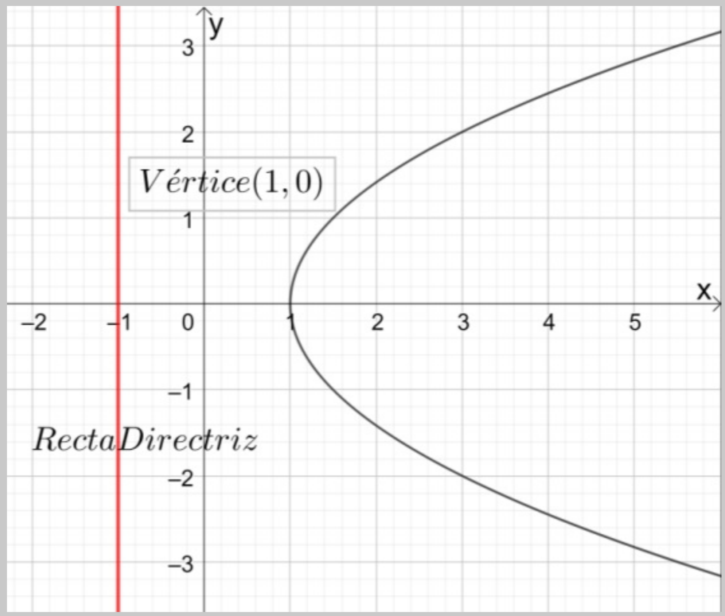
SESIÓN 3 (2 HORAS)

Tema: Elementos que determinan la parábola: foco, directriz, eje de simetría, vértice y lado recto

Aprendizajes: Identifica los elementos que definen la parábola. Reconoce la simetría de esta curva.

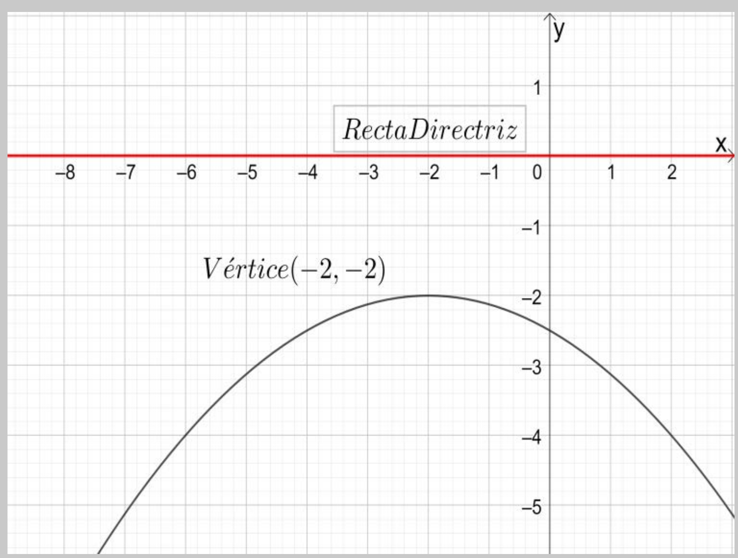
E 4.13 Identifica y traza en la gráfica los elementos que definen a la parábola. Completa los datos de la tabla.

Coordenadas del vértice:
Coordenadas del foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto



E 4.14 Identifica y traza en la gráfica los elementos que definen a la parábola. Completa los datos de la tabla.

Coordenadas del vértice:
Coordenadas del foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto



E 4.15 Dadas las coordenadas del vértice y el foco, realiza un bosquejo de la parábola y traza los elementos restantes. Completa los datos de la tabla.

Coordenadas del vértice: $(-1,2)$

Coordenadas del foco: $(-1,4)$

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

Lado Recto:

E 4.16 Dadas las coordenadas del foco y la ecuación de la recta directriz, realiza un bosquejo de la parábola y traza los elementos restantes. Completa los datos de la tabla.

Coordenadas del vértice:

Coordenadas del foco: $(0,-5)$

Ecuación de la recta directriz: $y=-1$

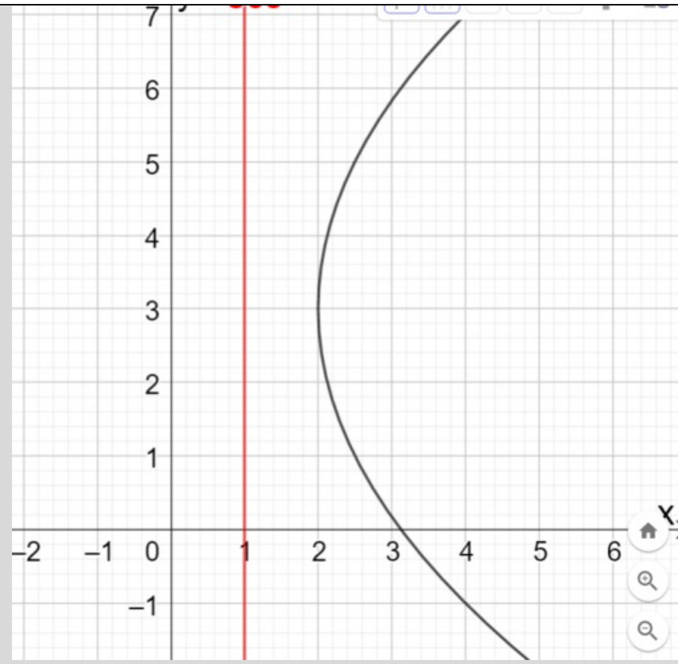
Ecuación del eje de simetría:

Lado Recto:

EJERCICIOS SESIÓN 3

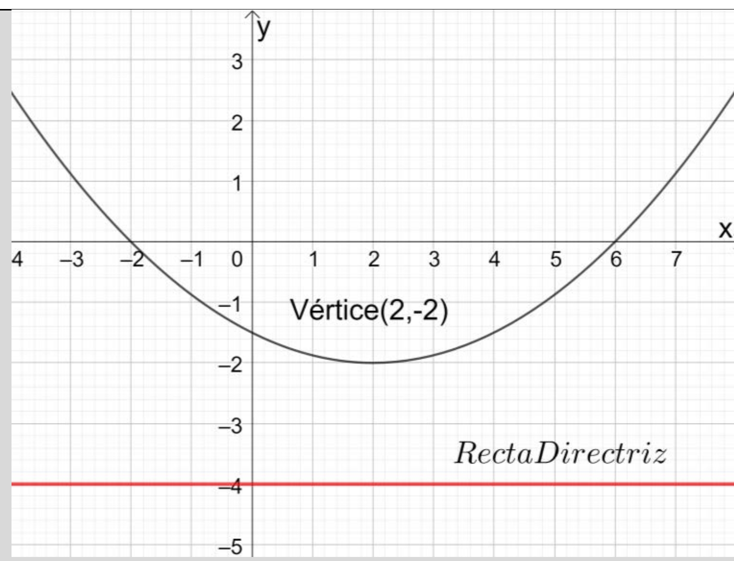
E 4.17. Identifica y traza en la gráfica los elementos que definen a la parábola. Completa los datos de la tabla.

Solución:
Coordenadas del vértice:
Coordenadas del foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto:



E 4.18. Identifica y traza en la gráfica los elementos que definen a la parábola. Completa los datos de la tabla.

Solución:
Coordenadas del vértice:
Coordenadas del foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto:



E 4.19. Dadas las coordenadas del vértice y la ecuación de la recta directriz, realiza un bosquejo de la parábola y traza sus elementos. Completa los datos de la tabla.

Solución:
Coordenadas del vértice: $(-3,3)$
Coordenadas del foco:
Ecuación de la recta directriz: $y = 1$
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto:

E 4.20. Dadas las coordenadas del foco y la ecuación de la recta directriz, realiza un bosquejo de la parábola y traza sus elementos. Completa los datos de la tabla.

Solución:
Coordenadas del vértice:
Coordenadas del foco:$(-4,0)$
Ecuación de la recta directriz: $x = -6$
Ecuación del eje de simetría:
Lado Recto:

E 4.21. Dadas las coordenadas del foco y el vértice, realiza un bosquejo de la parábola y traza los elementos restantes. Completa los datos de la tabla.

Solución:

Coordenadas del vértice: $(6,2)$

Coordenadas del foco: $(6,0)$

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

Lado Recto:

SESIÓN 4 (1 HORA)

Tema: Vértice, eje de simetría, foco, lado recto de una parábola

Aprendizaje: Determina el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.

E 4.22 Dada la ecuación de la parábola $y^2 = -6x$, determinar los elementos que se solicitan.

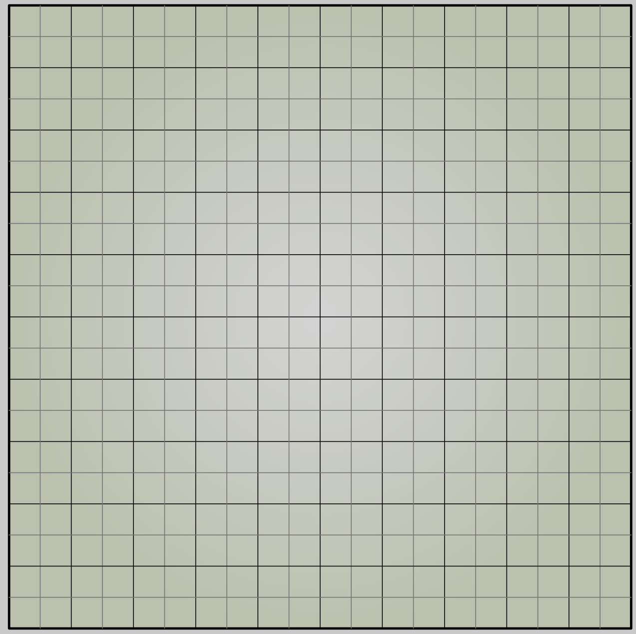
Vértice:
Foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Longitud del lado recto:

E 4.23 Dada la ecuación de la parábola $x^2 = -12\, y$, determinar los elementos que se solicitan.

Vértice:
Foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Longitud del lado recto:

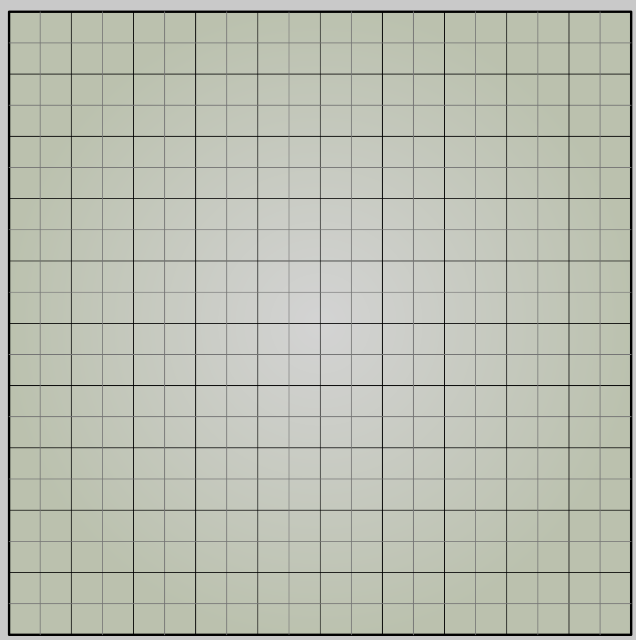
E 4.24 Dada la ecuación de la parábola $(y-3)^2 = 12\,(x-2)$, determinar los elementos que se solicitan.

Vértice:
Foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Longitud del lado recto:



E 4.25 Dada la ecuación de la parábola $(x-7)^2 = -8\,(y+10)$, determinar los elementos que se solicitan.

Vértice:
Foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Longitud del lado recto:



E 4.26 Dada la ecuación de la parábola $(y + 4)^2 = 3\,(x + 4)$, determinar los elementos que se solicitan.

Vértice:
Foco:
Ecuación de la recta directriz:
Ecuación del eje de simetría:
Longitud del lado recto:

EJERCICIOS SESIÓN 4

E 4.27 Dada la ecuación de la parábola $(x - 2)^2 = -3\left(y + \frac{3}{2}\right)$, determinar las coordenadas del vértice y foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto.

E 4.28. Dada la ecuación de la parábola $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 3\left(y - \frac{1}{3}\right)$, determinar las coordenadas del vértice y foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto.

E 4.29. Dada la ecuación de la parábola $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 4\left(y + \frac{5}{2}\right)$, determinar las coordenadas del vértice y foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto.

E 4.30. Dada la ecuación de la parábola $(y - 3)^2 = 12\,(x - 6)$, determinar las coordenadas del vértice y foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto.

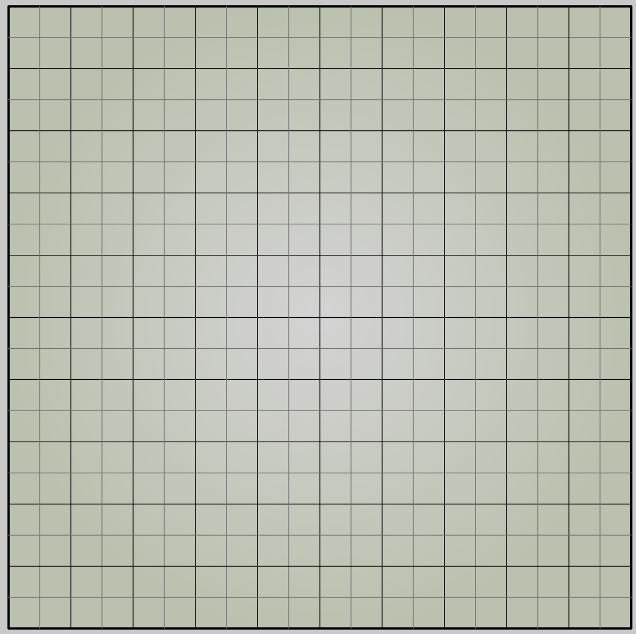
E 4.31. Dada la ecuación de la parábola $(x - 8)^2 = -6\,y$, determinar las coordenadas del vértice y foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto.

SESIÓN 5 (2 HORAS)

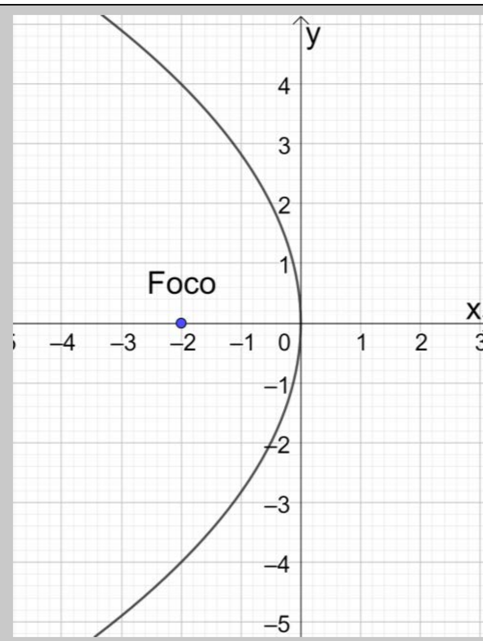
Tema: Representación algebraica y gráfica de una parábola

Aprendizaje: Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa

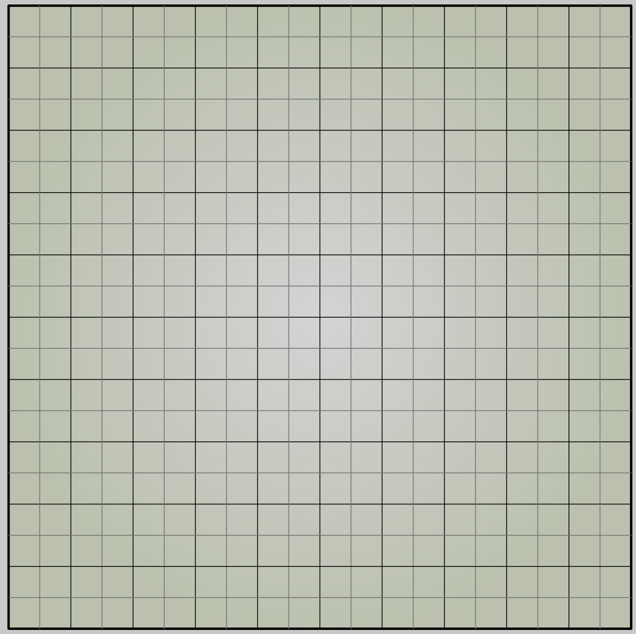
E 4.32 Graficar la parábola de ecuación $y^2 = 4x$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



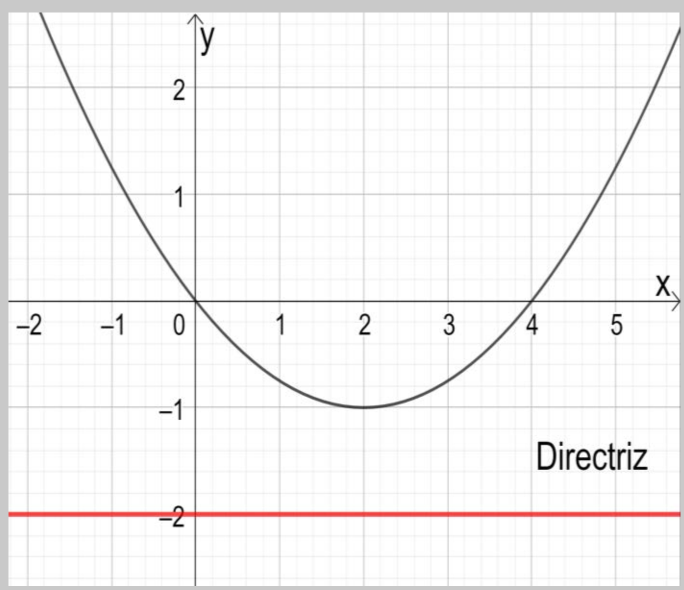
E 4.33 Hallar la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra a continuación y traza todos sus elementos. Escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



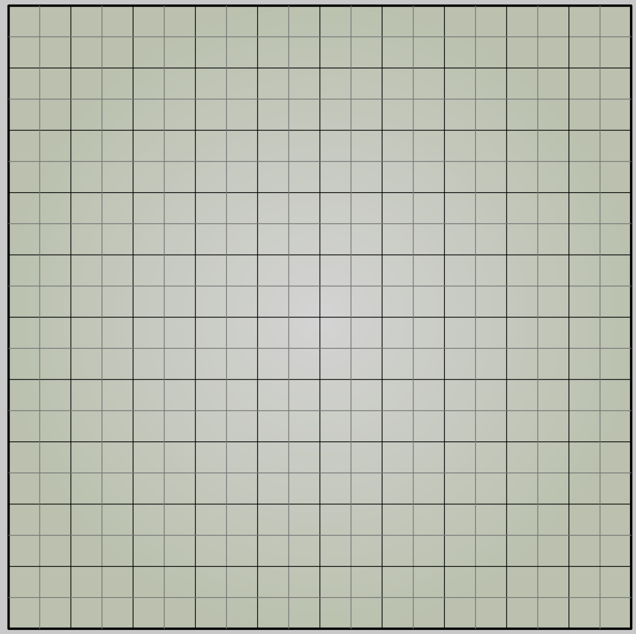
E 4.34 Graficar la parábola de ecuación $x^2 = -6y$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



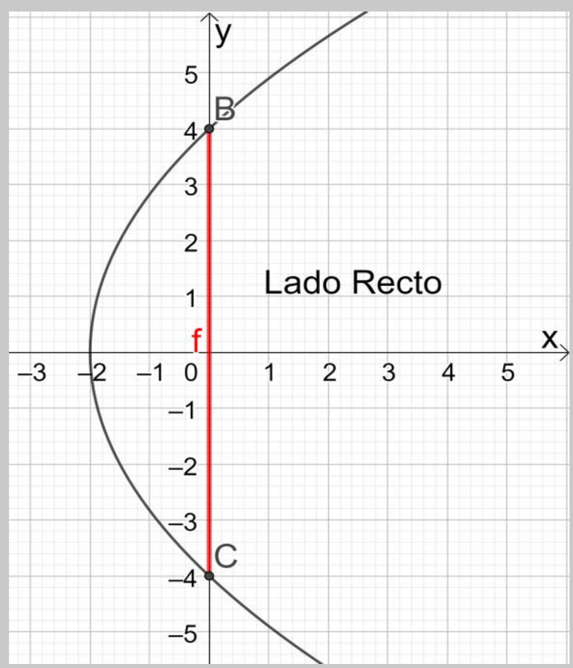
E 4.35 Hallar la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra a continuación y traza todos sus elementos. Escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



E 4.36 Graficar la parábola de ecuación $(y+1)^2 = -2(x+3)$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



E 4.37 Hallar la ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra a continuación y traza todos sus elementos. Escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.



Nota: Se recomienda el uso de GeoGebra para verificar los resultados y realizar las gráficas correspondientes.

EJERCICIOS SESIÓN 5

E 4.38 Graficar la parábola de ecuación $x^2 = 2y$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.

E 4.39 Graficar la parábola de ecuación $(x - 4)^2 = -3y$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.

E 4.40 Graficar la parábola de ecuación $(y - 7)^2 = -12\,(x + 3)$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.

E 4.41 Graficar la parábola de ecuación $y^2 = 7x$ y todos sus elementos, además, escribe las coordenadas del vértice, del foco, ecuación de la directriz y eje de simetría. Calcula la longitud del lado recto.

Nota: Verifica tus resultados con GeoGebra y realiza las gráficas correspondientes.

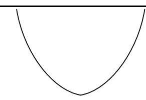
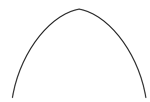
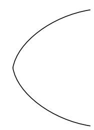
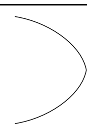
SESIÓN 6 (2 HORAS)

Tema: Ecuación general

Aprendizaje: Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos

ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA

Si el vértice de la parábola se encuentra en el origen, para hallar la ecuación en forma general, basta con igualar a cero la ecuación ordinaria, tal como se muestra en la tabla.

Ecuación en forma ordinaria		Ecuación en forma general
$x^2 = 4py$		$x^2 - 4py = 0$
$x^2 = -4py$		$x^2 + 4py = 0$
$y^2 = 4px$		$y^2 - 4px = 0$
$y^2 = -4px$		$y^2 + 4px = 0$

Si el vértice de la parábola tiene coordenadas (h, k), para hallar la ecuación en forma general se debe desarrollar el binomio al cuadrado, igualar a cero y simplificar, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
Desarrollamos el binomio al cuadrado $x^2 - 2xh + h^2 = 4py - 4pk$
Igualamos a cero y simplificamos $x^2 - 2xh - 4py + h^2 + 4pk = 0$

Por el contrario, si se desea transformar la ecuación de la forma general a la ordinaria se tiene que completar trinomio cuadrado perfecto y factorizar, este es un ejemplo.

$$x^2 - 10x + 8y + 41 = 0$$

Se completa el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 - 10x + 25 = -8y - 41 + 25$$

Se simplifica

$$x^2 - 10x + 25 = -8y - 41 + 25 = -8y - 16$$

$$x^2 - 10x + 25 = -8y - 16$$

Finalmente se factoriza

$$(x-5)^2 = -8(y+2)$$

De esta última ecuación se puede deducir que se trata de una parábola en posición vertical, con $V(5,-2)$, $F(5,-4)$ y recta Directriz $y = 0$.

E 4.42 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $x^2 - 12x + 4y + 12 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.43 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $y^2 - 4x - 12y + 12 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.44 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $y^2 + 8x - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.45 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $x^2 + 2x - 2y - 5 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.46 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $2y^2 - 8x - 8y - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.47 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina todos sus elementos. $2x^2 - 8x - 8y - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

EJERCICIOS SESIÓN 6

E 4.48 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $x^2 - 8x - 11y - 7 = 0$.

E 4.49 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $y^2 - 5x + 10y + 13 = 0$.

E 4.50 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $y^2 - 2y + x + 3 = 0$.

E 4.51 Transforma la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $x^2 + 3x + 3y - 8 = 0$.

Nota: Se recomienda repasar el método de completar cuadrados.

SESIÓN 7 (2 HORAS)

Tema: Ecuación general

Aprendizaje: Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.

E 4.52 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $x^2 - 12x + 4y + 12 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.53 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $y^2 - 4x - 12y + 12 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.54 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $y^2 + 8x - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.55 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $x^2 + 2x - 2y - 5 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.56 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $2y^2 - 8x - 8y - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

E 4.57 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y calcula todos sus elementos. $2x^2 - 8x - 8y - 32 = 0$.

Vértice:

Foco:

Ecuación de la recta directriz:

Ecuación del eje de simetría:

LLR=

EJERCICIOS SESIÓN 7

E 4.58 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $y^2 - 8x - 8y + 64 = 0$.

E 4.59 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $x^2 + 10x + 2y + 29 = 0$.

E 4.60 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $y^2 + 20x + 2y - 39 = 0$.

E 4.61 Transformar la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria y determina el vértice, foco, ecuación de la recta directriz, ecuación del eje de simetría y longitud del lado recto. $x^2 - y + 7 = 0$.

Nota: Se recomienda repasar el método de completar cuadrados.

INTERSECCIÓN DE LA RECTA Y LA PARÁBOLA

Hallar la intersección de la recta $6x - y - 2 = 0$ y la parábola $x^2 + 4x - y - 5 = 0$

Para hallar las coordenadas del punto o puntos de intersección (si existen), entre la parábola y la recta, debemos igualar ambas ecuaciones y resolver la ecuación resultante.

Se igualan ambas ecuaciones

$$x^2 + 4x - y - 5 = 6x - y - 2$$

Igualamos a cero

$$x^2 + 4x - y - 5 - 6x + y + 2 = x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \qquad x + 1 = 0$$
$$x = 3 \qquad x = -1$$

Estas son las primeras coordenadas (abscisas) de los puntos de intersección de la parábola y la recta; para hallar las segundas coordenadas de cada punto debemos sustituir cada valor de x en la ecuación de la recta.

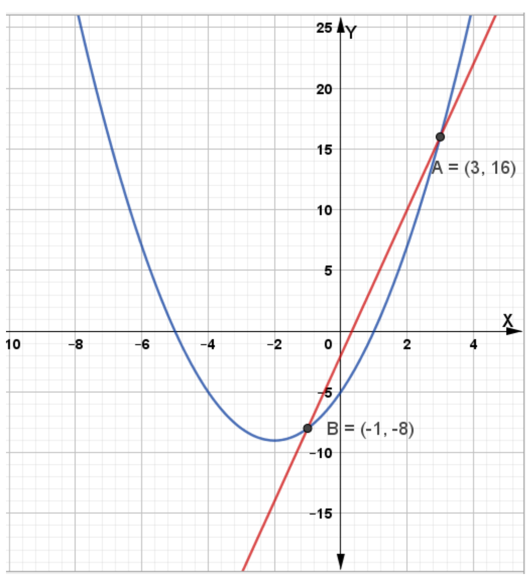
Si $x = -1$, su valor de "y" correspondiente

$$6x - y - 2 = 0$$
$$6(-1) - y - 2 = -6 - 2 - \mathrm{y} = 0$$
$$-8 - \mathrm{y} = 0$$
$$\mathrm{y} = -8$$

Si $x = 3$, su valor de "y" correspondiente

$$6x - y - 2 = 0$$
$$6(3) - y - 2 = 18 - 2 - \mathrm{y} = 0$$
$$16 - \mathrm{y} = 0$$
$$\mathrm{y} = 16$$

Los puntos de intersección buscados son $\mathrm{A}(-1, -8)$ y $B(3,16)$, tal como se muestra en la gráfica

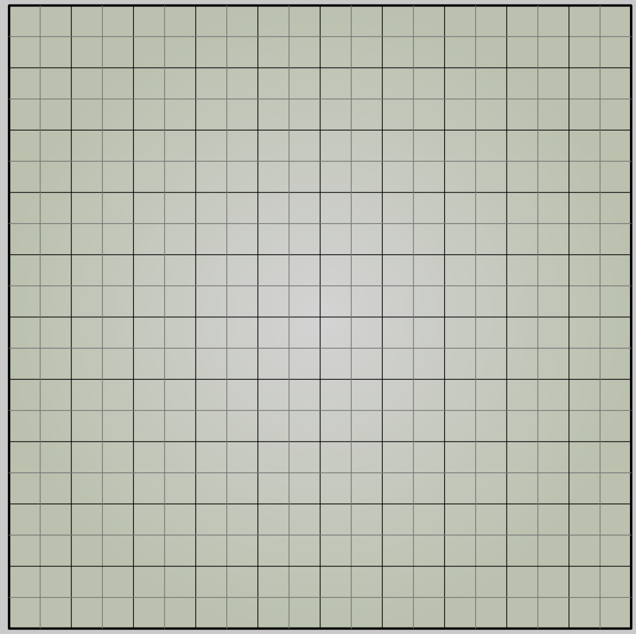


SESIÓN 8 (2 HORAS)

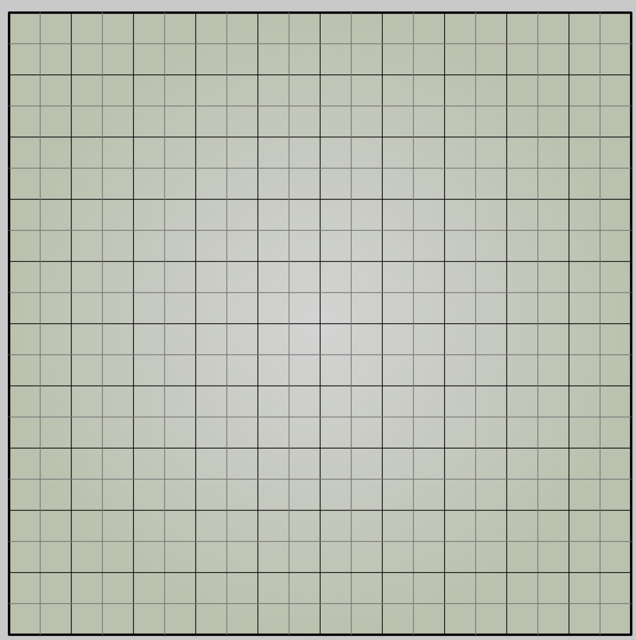
Tema: Sistemas de ecuaciones formados por: Una ecuación lineal y una parábola. Dos parábolas

Aprendizaje: Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.

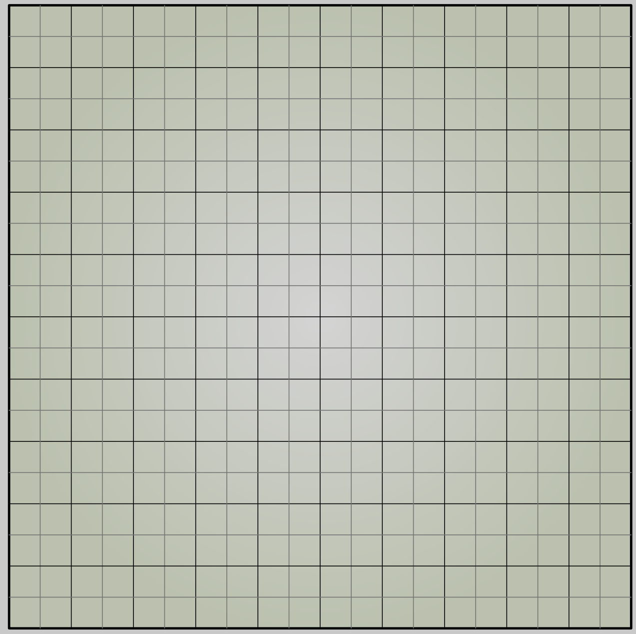
E 4.62 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de la recta y la parábola cuyas ecuaciones son respectivamente: $x - y + 4 = 0$ y $x^2 - 4x - y + 4 = 0$. Grafica.



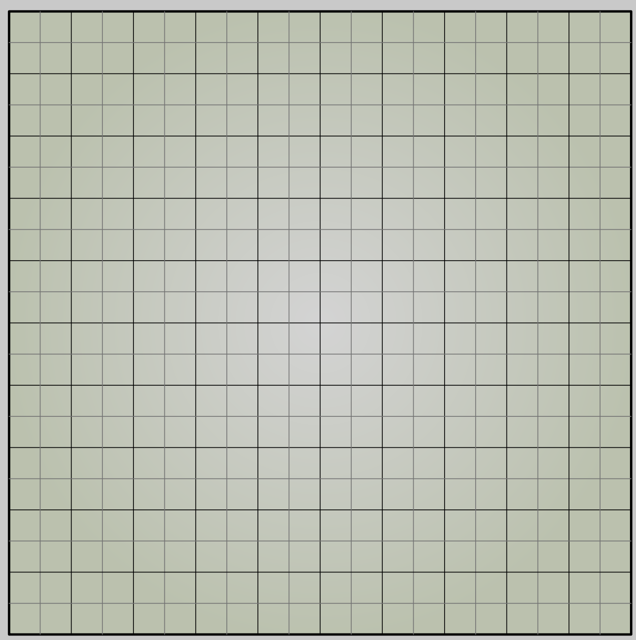
E 4.63 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son: $x^2 = y + 4$ y $x^2 = -y + 6$. Grafica.



E 4.64 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son: $y^2 - x + 4y + 4 = 0$ y $y^2 - x - 4y + 4 = 0$. Grafica.



E 4.65 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son: $y^2 - x + 4y + 4 = 0$ y $y^2 - x - 4y + 4 = 0$. Grafica.



EJERCICIOS SESIÓN 8

E 4.66 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son: $y^2 = 4(x-3)$ y $y^2 = -6\,(x-4)$. Grafica.

E 4.67 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las parábolas cuyas ecuaciones son: $x^2 = 4(y-3)$ y $x^2 = -6\,(y-4)$. Grafica.

E 4.68 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de la parábola y la recta cuyas ecuaciones son: $(x-1)^2 = 4(y+2)$ y $x+y=0$. Grafica.

E 4.69 Calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de la parábola y la recta cuyas ecuaciones son: $(y+1)^2 = -6(x+3)$ y $2x-y=0$. Grafica.

SESIÓN 9 (1 HORA)

Tema: Resolución de problemas en diversos contextos

Aprendizaje: Resuelve problemas de aplicación

E 4.70 Un túnel en forma de arco parabólico tiene una altura máxima de $20\ m$ y un ancho de $38\ m$ en la base. ¿A qué altura de la base el túnel tiene un ancho de $16\ m$?

E 4.71 Un túnel de una carretera tiene la forma de un arco parabólico que tiene cinco metros de ancho y cuatro metros de altura. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener un vehículo de transporte de 25 metros de ancho para poder pasar por el túnel?

EJERCICIOS SESIÓN 9

E 4.72 Una antena parabólica mide 16 m de ancho a una distancia de 6 m del vértice, ¿qué ancho tiene esa antena a la altura del foco?

E 4.73 Una antena parabólica tiene tres metros de ancho donde se encuentra el aparato receptor de la señal. ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado este aparato receptor? Grafica

E 4.74 Un niño acciona un juguete que dispara un proyectil. El proyectil describe en el aire una trayectoria parabólica con la ecuación $a = -4t^2 + 16t$, donde t es el tiempo en segundos y a es la altura que alcanza el proyectil, expresada en metros. ¿Cuántos segundos han pasado desde el lanzamiento hasta que el proyectil alcanza su altura máxima? ¿cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? Grafica

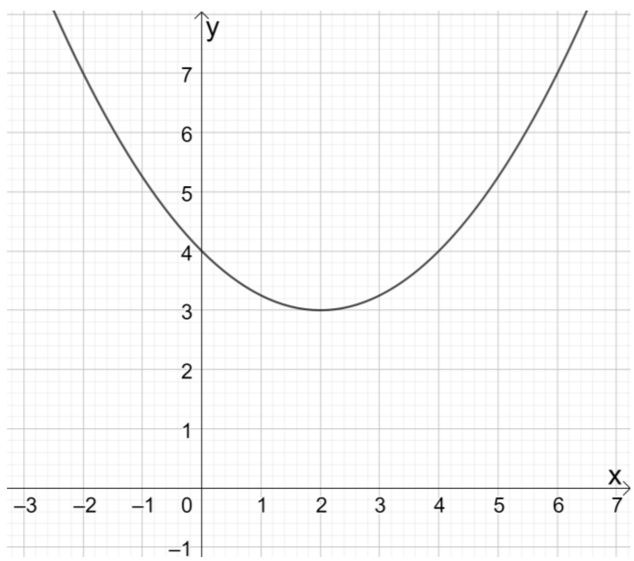
E 4.75 Un artillero atina a un objetivo que está a 500 metros de su cañón. El cañón está en el origen de coordenadas. Encuentra la ecuación de la parábola que describió su disparo si éste alcanzó una altura máxima de 100 metros. Grafica

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

NOTA: Resuelve los siguientes problemas e incluye el procedimiento completo de solución.

1. Halla la ecuación ordinaria de la parábola si las coordenadas del vértice y el foco son respectivamente $(4,2)$ y $(4,6)$. Grafica.

2. Dada la siguiente gráfica, obtén la ecuación ordinaria y todos sus elementos.



3. Transforma la ecuación general de la parábola $2y^2 - 8x - 8y - 32 = 0$ a la forma ordinaria y obtén: Coordenadas del vértice y foco, ecuaciones de la recta directriz y eje de simetría, así como la longitud del lado recto.

4. Calcula las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de la parábola y la recta cuyas ecuaciones son respectivamente: $3y^2 - x - 12y + 8 = 0$ y $x - y - 1 = 0$.

RÚBRICA PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES A LA UNIDAD IV DE MATEMÁTICAS III

CURSO:	**MATEMÁTICAS III**			
UNIDAD 4:	La parábola y su ecuación cartesiana			
OBJETIVO:	Evaluar los aprendizajes correspondientes al tema de parábola			
Porcentaje:	100			
Criterios	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Total**
Obtiene por inducción la definición de parábola como lugar geométrico.	A partir de las condiciones dadas, obtiene la ecuación de la parábola como lugar geométrico. **Puntos: 10**	A partir de las condiciones dadas, obtiene la ecuación de la circunferencia como lugar geométrico, pero presenta un error de signo u operatividad. **Puntos: 5**	A partir de las condiciones dadas, no puede obtiene la ecuación correspondiente de la parábola como lugar geométrico. **Puntos: 0.5**	
Identifica los elementos que definen la parábola	Identifica con precisión todos los elementos que definen la parábola. **Puntos: 5**	Identifica correctamente tres o cuatro elementos que definen la parábola. **Puntos: 2.5**	Identifica correctamente uno o dos elementos que definen la parábola **Puntos: 0.5**	
Reconoce la simetría de esta curva	Traza el eje de simetría de la parábola e indica su ecuación correctamente. **Puntos: 5**	Traza el eje de simetría de la parábola, pero no indica correctamente su ecuación. **Puntos: 2**	No traza correctamente el eje de simetría ni define correctamente su ecuación. **Puntos: 0.5**	
Deduce la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.	A partir de las condiciones dadas, deduce correctamente la ecuación de la parábola. **Puntos: 10**	A partir de las condiciones dadas, obtiene la ecuación parcialmente correcta de la parábola, presenta un error de signo o algebraico. **Puntos: 5**	A partir de las condiciones dadas, no obtiene la ecuación de la parábola. **Puntos: 0.5**	
Entiende que un punto pertenece a una parábola si y solo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.	Verifica que un punto de la parábola cumple con la ecuación correspondiente. **Puntos: 5**	Verifica visualmente que un punto pertenece a la parábola **Puntos: 2.5**	No verifica correctamente que un punto pertenece a la parábola. **Puntos: 0.5**	
Determina el vértice, foco,	A partir de la ecuación cartesiana de la parábola, determina	A partir de la ecuación cartesiana de la parábola, determina tres elementos	A partir de la ecuación cartesiana de la parábola,	

directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.	todos los elementos que la definen. **Puntos: 10**	que la definen. los elementos que la definen. **Puntos: 5**	determina hasta dos elementos que la definen. **Puntos: 2.5**	
Grafica parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.	A partir de la ecuación de la parábola obtiene correctamente su gráfica y a partir de la gráfica de la parábola obtiene correctamente su ecuación. **Puntos: 15**	A partir de la ecuación de la parábola obtiene correctamente su gráfica o a partir de la gráfica de la parábola obtiene correctamente su ecuación. **Puntos: 10**	No obtiene correctamente la gráfica de la parábola dada su ecuación o viceversa. **Puntos: 0.5**	
Transforma la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.	Transforma correctamente la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria, determina los elementos que la definen. **Puntos: 15**	Transforma correctamente la ecuación general de la parábola a la forma ordinaria pero no determina correctamente los elementos que la definen. **Puntos: 7**	Transforma la ecuación general de la parábola, pero presenta errores de procedimiento. **Puntos: 3**	
Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas.	Obtiene por un procedimiento algebraico las coordenadas de los puntos de intersección de una recta con una parábola y entre parábolas. Grafica correctamente. **Puntos: 15**	Obtiene por un procedimiento algebraico las coordenadas de los puntos de intersección de una recta con una parábola y entre parábolas. No grafica correctamente. **Puntos: 7**	Obtiene parcialmente correctas las coordenadas de los puntos de intersección de una recta con una parábola y entre parábolas. No grafica correctamente. **Puntos: 3**	
Resuelve problemas de aplicación.	Obtiene correctamente la solución a problemas de aplicación e interpreta los resultados de acuerdo con el contexto. **Puntos: 10**	Obtiene correctamente la solución a problemas de aplicación, pero no interpreta correctamente los resultados de acuerdo con el contexto. **Puntos: 7**	Obtiene incorrectamente la solución a problemas de aplicación, no interpreta correctamente los resultados de acuerdo con el contexto. **Puntos: 3**	
			Total:	

PROBLEMAS PARA INVESTIGAR

1. Investiga el significado de la palabra parábola
2. Investiga los nombres de algunos aparatos o aditamentos que tienen forma parabólica
3. ¿Por qué las antenas de radares tienen la forma de una parábola?
4. Obtén la ecuación general de la parábola dados tres de sus puntos: $A(-1,2), B(3,-1)\ y\ C(1,3)$

FORMULARIO DE LA UNIDAD

Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en el origen

Abre hacia	Ecuación
Derecha	$y^2 = 4px$
Izquierda	$y^2 = -4px$
Arriba	$x^2 = 4py$
Abajo	$x^2 = -4py$

Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en (h, k)

Abre hacia	Ecuación
Derecha	$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$
Izquierda	$(y-k)^2 = -4p\,(x-h)$
Arriba	$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$
Abajo	$(x-h)^2 = -4p\,(y-k)$

Longitud del lado recto: LLR
$LLR = |4p|$
p: **Distancia del vértice al Foco, o bien, distancia del vértice a la recta Directriz**

Coordenadas del vértice (h, k)

Coordenadas de un punto de la parábola (x, y)

Forma general de la ecuación de la parábola

Parábola horizontal	Parábola vertical
$y^2 + Dx + Ey + F = 0$	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

RESULTADOS DE EJERCICIOS Y EVALUACIÓN

No. Ejercicio	Respuesta	No. ejercicio	Respuesta
E 4.2.	$y^2 + 4px = 0$	**E 4.48.**	$(x-4)^2 = 11\left(y + \frac{23}{11}\right)$ Coordenadas del vértice:$(4, -\frac{23}{11})$ Coordenadas del foco:$(4, \frac{29}{44})$ Ecuación de la recta directriz:$y = -\frac{213}{44}$ Ecuación del eje de simetría: $x = 4$ LLR=11
E 4.3.	$x^2 - 4py = 0$	**E 4.49.**	$(y+5)^2 = 5\left(x + \frac{12}{5}\right)$ Coordenadas del vértice:$(-\frac{12}{5}, -5)$ Coordenadas del foco:$(-\frac{23}{20}, -5)$ Ecuación de la recta directriz:$x = -\frac{73}{20}$ Ecuación del eje de simetría: $y = -5$ LLR=5
E 4.4.	$x^2 + 4py = 0$	**E 4.50.**	$(y-1)^2 = -1(x+2)$ Coordenadas del vértice:$(-2,1)$ Coordenadas del foco:$(-\frac{9}{4}, 1)$ Ecuación de la recta directriz:$x = -\frac{7}{4}$ Ecuación del eje de simetría: $y = 1$ LLR=1
E 4.9.	$x^2 + 8x - 8y + 16 = 0$	**E 4.51.**	$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -3\left(y - \frac{41}{12}\right)$ Coordenadas del vértice:$(-\frac{3}{2}, \frac{41}{12})$ Coordenadas del foco:$(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ Ecuación de la recta directriz:$y = \frac{25}{6}$ Ecuación del eje de simetría: $x = -\frac{3}{2}$ LLR=3
E 4.10.	$y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$	**E 4.58.**	$(y-4)^2 = 8(x-6)$ Coordenadas del vértice:(6,4) Coordenadas del foco:(8,4) Ecuación de la recta directriz:$x = 4$ Ecuación del eje de simetría: $y = 4$ LLR=8
E 4.11.	$x^2 + 4x - 4y + 20 = 0$	**E 4.59.**	$(x+5)^2 = -2(y+2)$ Coordenadas del vértice:$(-5, -2)$ Coordenadas del foco:$\left(-5, -\frac{5}{2}\right)$ Ecuación de la recta directriz:$y = -\frac{3}{2}$ Ecuación del eje de simetría: $x = -5$ LLR=2
E 4.12.	$y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$	**E 4.60**	$(y+1)^2 = -20(x-2)$ Coordenadas del vértice:$(2, -1)$ Coordenadas del foco:$(-3, -1)$ Ecuación de la recta directriz:$x = 7$ Ecuación del eje de simetría: $y = -1$ LLR=20
E 4.17.	Coordenadas del vértice:(2,3) Coordenadas del foco:(3,3) Ecuación de la recta directriz: $x = 1$ Ecuación del eje de simetría: $y = 3$	**E 4.61**	$(x-0)^2 = 1(y-7)$ Coordenadas del vértice:(0,7) Coordenadas del foco:$\left(0, \frac{29}{4}\right)$ Ecuación de la recta directriz:$y = -\frac{1}{4}$

			Ecuación del eje de simetría: $x=0$ LLR=1
E 4.18.	Coordenadas del vértice:$(2,-2)$ Coordenadas del foco:$(2,0)$ Ecuación de la recta directriz: $y=-4$ Ecuación del eje de simetría: $x=2$	**E 4.66.**	$A\left(\frac{18}{5},\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ $B\left(\frac{18}{5},-\frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$
E 4.19.	Coordenadas del vértice:$(-3,3)$ Coordenadas del foco:$(-3,5)$ Ecuación de la recta directriz: $y=1$ Ecuación del eje de simetría: $x=-3$	**E 4.67.**	$A\left(\frac{2\sqrt{15}}{5},\frac{18}{5}\right)$ $B\left(-\frac{2\sqrt{15}}{5},\frac{18}{5}\right)$
E 4.20.	Coordenadas del vértice:$(-5,0)$ Coordenadas del foco:$(-4,0)$ Ecuación de la recta directriz: $x=-6$ Ecuación del eje de simetría: $y=0$	**E 4.68.**	$A(-1+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2})$ $B(-1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$
E 4.21.	Coordenadas del vértice:$(6,2)$ Coordenadas del foco:$(6,0)$ Ecuación de la recta directriz: $y=4$ Ecuación del eje de simetría: $x=6$	**E 4.69.**	No hay puntos de intersección
E 4.27.	Coordenadas del vértice:$(2,-\frac{3}{2})$ Coordenadas del foco:$(2,-\frac{9}{4})$ Ecuación de la recta directriz: $y=-\frac{3}{4}$ Ecuación del eje de simetría: $x=2$ LLR=3	**E 4.72.**	El ancho de la parábola a la altura del foco es de $\frac{32}{3}$ metros
E 4.28.	Coordenadas del vértice:$(\frac{1}{3},-\frac{5}{2})$ Coordenadas del foco:$(\frac{1}{3},-\frac{7}{4})$ Ecuación de la recta directriz:$y=-\frac{10}{4}$ Ecuación del eje de simetría: $x=\frac{1}{3}$ LLR=3	**E 4.73.**	El aparato receptor se encuentra a $\frac{3}{4}$ metros del fondo de la antena
E 4.29.	Coordenadas del vértice:$(-\frac{1}{3},-\frac{5}{2})$ Coordenadas del foco:$(-\frac{1}{3},-\frac{3}{2})$ Ecuación de la recta directriz:$y=-\frac{7}{2}$ Ecuación del eje de simetría: $x=-\frac{1}{3}$ LLR=4	**E 4.74.**	La altura máxima que alcanza el proyectil es 16 metros y la alcanza dos segundos después de ser lanzado
E 4.30.	Coordenadas del vértice:$(6,3)$ Coordenadas del foco:$(6,6)$, LLR=6 Ecuación de la recta directriz:$y=0$ Ecuación del eje de simetría: $x=6$	**E 4.75.**	$(x-250)^2=-625(y-100)$
E 4.31.	Coordenadas del vértice:$(8,0)$ Coordenadas del foco:$(8,-\frac{3}{2})$ Ecuación de la recta directriz:$y=\frac{3}{2}$ Ecuación del eje de simetría: $x=8$ LLR=6	**Ev 1.**	$(x-4)^2=16(y-2)$
E 4.38.	Coordenadas del vértice:$(0,0)$ Coordenadas del foco:$(0,\frac{1}{2})$ Ecuación de la recta directriz:$y=-\frac{1}{2}$ Ecuación del eje de simetría: $x=0$ LLR=2	**Ev 2.**	$(x-2)^2=4(y-3)$ Coordenadas del vértice:$(2,3)$ Coordenadas del foco:$(2,4)$ Ecuación de la recta directriz:$y=2$ Ecuación del eje de simetría: $x=2$ LLR=4
E 4.39.	Coordenadas del vértice:$(4,0)$	**Ev 3.**	$(y-2)^2=4(x+5)$

	Coordenadas del foco:$(4,-\frac{3}{4})$ Ecuación de la recta directriz:$y=\frac{3}{4}$ Ecuación del eje de simetría: $x=4$ LLR=3		Coordenadas del vértice:$(-5,2)$ Coordenadas del foco:$(-4,2)$ Ecuación de la recta directriz:$x=-6$ Ecuación del eje de simetría: $y=2$ LLR=4
E 4.40.	Coordenadas del vértice:$(-3,7)$ Coordenadas del foco:$(-6,7)$ Ecuación de la recta directriz:$x=0$ Ecuación del eje de simetría: $y=7$ LLR=12	**Ev 4.**	$A\left(\frac{19-\sqrt{85}}{6},\frac{13-\sqrt{85}}{6}\right)$ $B\left(\frac{19+\sqrt{85}}{6},\frac{13+\sqrt{85}}{6}\right)$
E 4.41.	Coordenadas del vértice:$(0,0)$ Coordenadas del foco:$(\frac{7}{4},0)$ Ecuación de la recta directriz:$x=-\frac{7}{4}$ Ecuación del eje de simetría: $y=0$ LLR=7		

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

De Oteysa, E. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica.* México: Mc Graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Para el profesor:

Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc Graw–Hill/ Interamericana de México.

Castañeda, P. (2000) *Geometría analítica en el espacio.* México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

Colección “Temas de Matemáticas” editada por la facultad de Ciencias de la UNAM.

De Oteysa, E. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica.* México: Mc Graw–Hill.

Guzmán, J. (2006). *Geometría Analítica.* Estado de México: NL IMPRESORES

Hirsch, C. y Schoen, H. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. México: Mc Graw–Hill.

Holliday, B. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc Graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*. México: Trillas.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Steen, F. & Ballou, D. (1999). *Geometría Analítica.* México: Publicaciones Cultural.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Cengage Learning.

Universidad Nacional Autónoma de México

ESCUELA NACIONAL

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

Plantel Vallejo

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICAS III

UNIDAD V: Circunferencia, Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas

Elaborado por:

ISRAEL GÓMEZ FLORES
JUAN RODRÍGUEZ AGUILAR
LAURA PÉREZ ROSAL
LUIS FERNANDO ARRIETA VELAZCO
MARIBEL SERRATO DUARTE
MARYCARMEN GUILLÉN ACOSTA

2020- 2021

MATEMÁTICAS III UNIDAD V	**CIRCUNFERENCIA, ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS**
Propósito: Será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras. Elaborado por: Israel Gómez Flores	Aprendizajes Sesión 1: Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro). Sesión 2: Obtiene la ecuación general de la circunferencia. Sesión 3: Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro. Sesión 4: Resuelve problemas de corte geométrico. Sesión 5: Resuelve problemas de corte geométrico. Sesión 6: Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos. Sesión 7: Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con los ejes paralelos a los ejes cartesianos. Sesión 8: Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse. Sesión 9: Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción. Sesión 10: Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria. Sesión 11: Resuelve problemas geométricos y en otros contextos. Sesión 12: Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

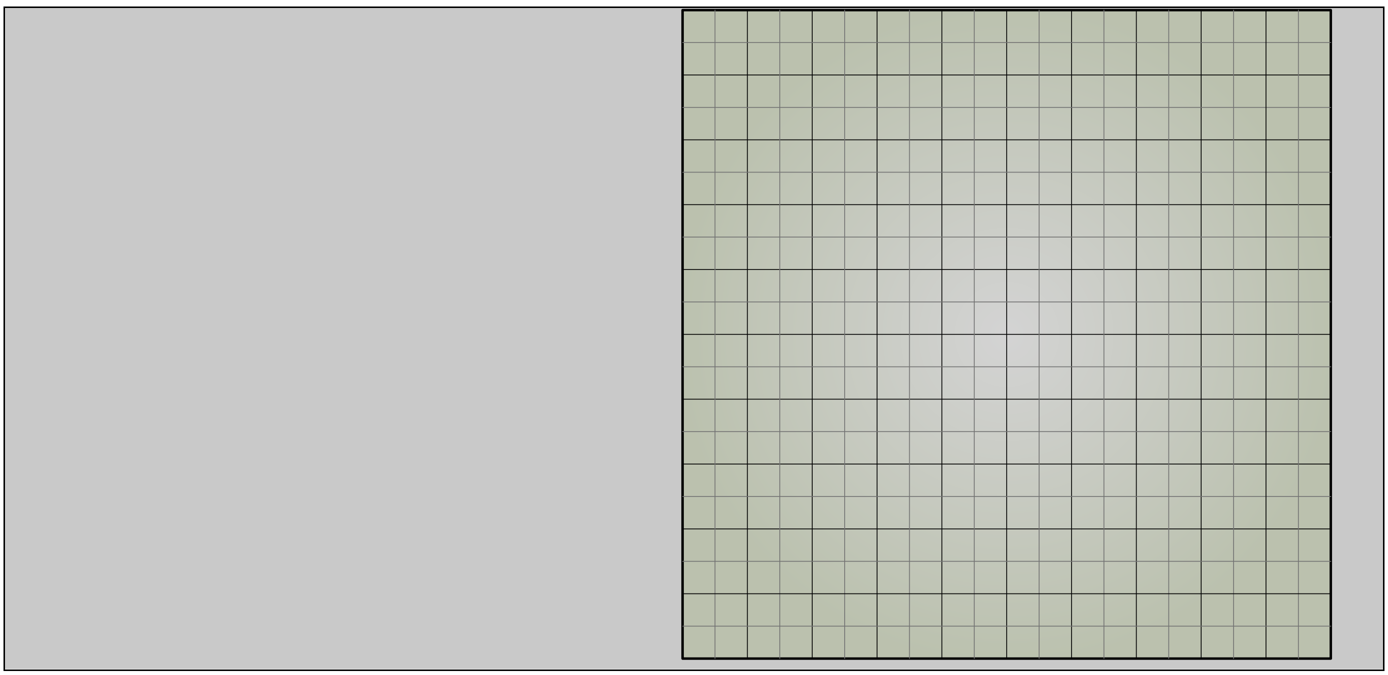
En esta unidad se trabajará con la circunferencia y elipse, inicialmente como lugar geométrico, identificando sus elementos y características. Por medio de la resolución de algunos problemas y ejercicios se buscará que el alumno obtenga la definición de cada una de las cónicas e identifique sus elementos. Se trabajará con algunos problemas, para que el alumno pueda aplicar los conocimientos adquiridos en cada una de las cónicas.

SESIÓN 1 (2 HORAS)

Tema: La circunferencia como lugar geométrico y elementos que la definen.

Aprendizaje: Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).

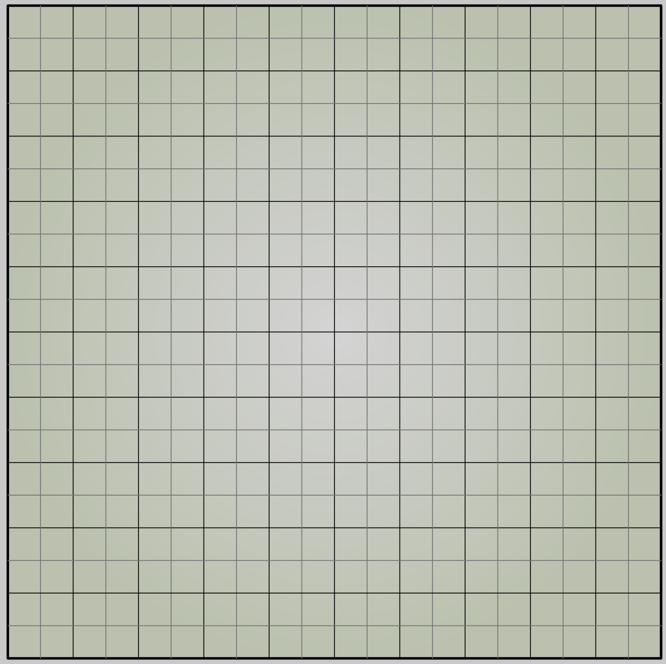
E 5.1 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que siempre está a una distancia de 4 unidades del punto $C(0,0)$. Obtén la ecuación del lugar geométrico y realiza la gráfica.



Se recomienda el uso de la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$dPQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

E 5.2 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que siempre está a una distancia de 5 unidades del punto $C(-1{,}3)$. Obtén la ecuación del lugar geométrico y realiza la gráfica.

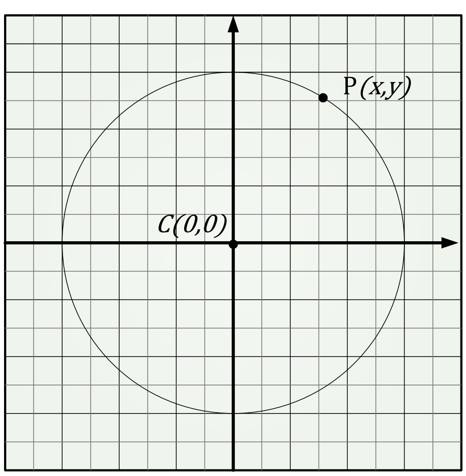


CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

La circunferencia se define como: El lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano cartesiano, de tal forma que su distancia a un punto fijo $C(h, k)$, llamado centro, es constante. A esta distancia le llamaremos radio r.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA.

Si el punto fijo tiene coordenadas $C(0{,}0)$, se calcula la distancia r que hay al punto $P(x, y)$:



$$d\overline{CP} = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

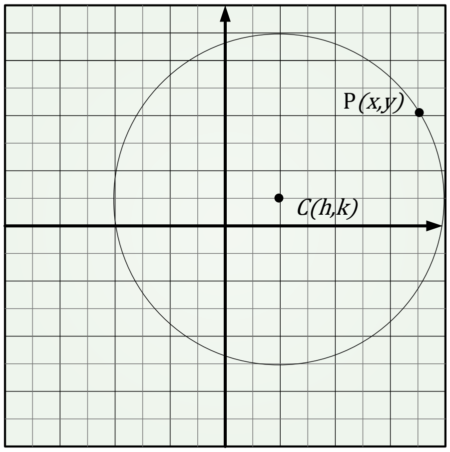
$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad, entonces la ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro en el punto $C(0{,}0)$ es:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Si el punto fijo tiene coordenadas $C(h,k)$, se calcula la distancia r que hay al punto $P(x,y)$:

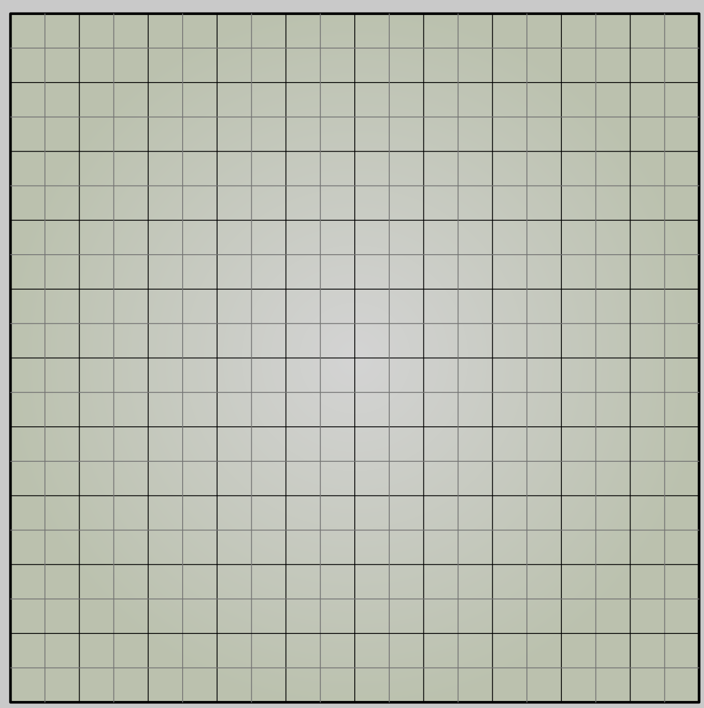


$$d\overline{CP} = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad, entonces la ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro en el punto $C(h,k)$ es:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

E 5.3 Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro en $C(2,3)$ y radio igual a 5. y realiza la gráfica.



E 5.4 Los puntos (0,-2) y (6,6) corresponden a los extremos de un diámetro de una circunferencia. Determina su centro, radio y escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia. Realiza su gráfica.

E 5.5 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$, identifica su centro y radio. Realiza su gráfica.

E 5.6 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x-3)^2+(y+4)^2=16$, identifica su centro y radio. Realiza su gráfica.

Nota: Se recomienda el uso de GeoGebra para verificar los resultados y realizar las gráficas correspondientes.

EJERCICIOS SESIÓN 1

E 5.7 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que siempre está a una distancia de 6 unidades del punto $C(0,0)$. Obtén la ecuación del lugar geométrico y realiza la gráfica.

E 5.8 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que siempre está a una distancia de 10 unidades del punto $C(2, -4)$. Obtén la ecuación del lugar geométrico y realiza la gráfica.

E 5.9 Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro en $C(-3, -4)$ y radio igual a 5. Realiza la gráfica.

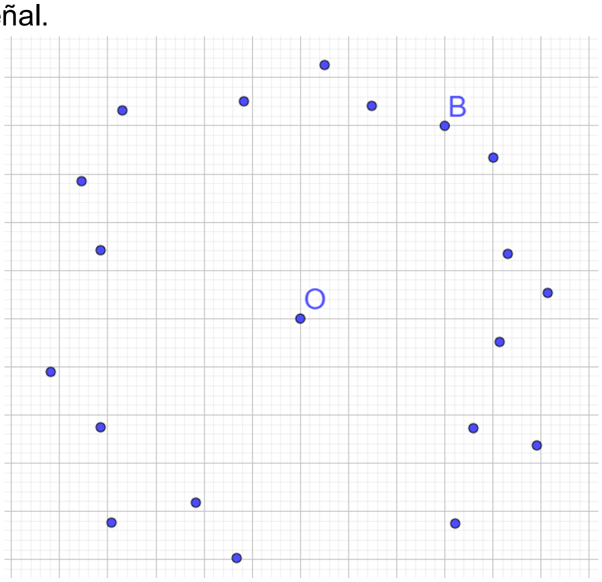
E 5.10 Los puntos $(7, -6)$ y $(1,2)$ corresponden a un diámetro de una circunferencia. Determina su centro y radio y escribe la ecuación ordinaria de la circunferencia. Realiza su gráfica.

E 5.11 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x-4)^2 + y^2 = 25$, identifica su centro y radio.

E 5.12 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x+5)^2 + (y-2)^2 = 36$, identifica su centro y radio. Realiza su gráfica.

E 5.13 El centro de una circunferencia está en el punto $C(2, -3)$ y su radio es igual a la distancia que hay entre los puntos $A(3,2)$ y $B(6,6)$. Escribe la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria y realiza su gráfica.

E 5.14 En la siguiente figura se muestra una serie de puntos que representan oficinas. El punto O es donde se colocará una antena de internet cuyo alcance es igual a la distancia que hay entre O y el punto B. Determina la distancia que tiene de alcance la antena de internet e identifica a que oficinas sí les llegará la señal.



Nota: Verifica tus resultados con GeoGebra y realizar las gráficas correspondientes.

SESIÓN 2 (2 HORAS)

Tema: La Ecuación general.

Aprendizaje: Obtiene la ecuación general de la circunferencia.

E 5.15 El centro de una circunferencia es el punto $C(2,-3)$ y su radio es igual a 5. Escribe su ecuación ordinaria y realiza su gráfica.

E 5.16 Para la ecuación obtenida en el ejercicio 1, desarrolla los binomios al cuadrado e iguala la ecuación.

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Si la ecuación ordinaria de la circunferencia es la ecuación: $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$, para escribirla en su forma general, primero se desarrollan los binomios al cuadrado, como se muestra a continuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

Ordenando términos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Si hacemos que: $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$, entonces la ecuación de la circunferencia escrita en su forma general es:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si la ecuación ordinaria es $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$, para escribirla en su forma general hacemos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4$$

Ordenando términos:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

E 5.17 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x+4)^2$+$(y-5)^2 = 25$, escribe la ecuación en su forma general.

E 5.18 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x-5)^2$+$(y)^2=16$, escribe la ecuación en su forma general.

E 5.19 Una circunferencia que tiene su centro en $C(2,-1)$ de radio 2, tiene como ecuación general a $x^2+y^2-4x+2y+1=0$. Escribe la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria e identifica algún procedimiento algebraico para obtener la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general.

EJERCICIOS SESIÓN 2

E 5.20 El centro de una circunferencia es $C(0,-4)$ y su radio es 3. Obtén su ecuación en su forma ordinaria y escríbela en su forma general.

E 5.21 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x)^2+(y-4)^2=36$. Identifica su centro y radio y realiza su gráfica. Escribe la ecuación en su forma general.

E 5.22 La ecuación ordinaria de una circunferencia es $(x+6)^2+(y-1)^2=49$. Identifica su centro y radio y realiza su gráfica. Escribe la ecuación en su forma general.

E 5.23 Los puntos $(-1,7)$ y $(7,1)$ son los extremos de un diámetro de la circunferencia. Determina el centro y radio y realiza su gráfica. Obtén su ecuación en su forma ordinaria y general.

E 5.24 Una circunferencia que tiene su centro en $C(3,4)$ de radio 5, tiene como ecuación general a $x^2+y^2-6x-8y=0$. Escribe la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, transitando de la general a la ordinaria.

E 5.24 Determina si los puntos $A(8,4)$, $B(-2,2)$, $C(3,-1)$ pertenecen a la circunferencia $x^2+y^2-6x-8y=0$. Realiza su gráfica.

E 5.26 Sin realizar la gráfica determina si los puntos $A(-2,9)$, $B(2,7)$, $C(-6,2)$ pertenecen a la circunferencia $x^2+y^2+4x-8y-5=0$.

SESIÓN 3 (1 HORA)

Tema: Relación entre ecuación ordinaria y la ecuación general.

Aprendizaje: Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro

DE LA ECUACIÓN GENERAL A LA ORDINARIA

Si la ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$, para escribirla en su forma ordinaria, primero podemos identificar el valor de D, E y F:

$$D = -2,\ E = -6 \text{ y } F = 6$$

Usando que: $h = \frac{D}{-2}$, $k = \frac{E}{-2}$ y $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

$$h = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$k = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$r = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(6)}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Entonces sustituimos los valores de h, k y r en:

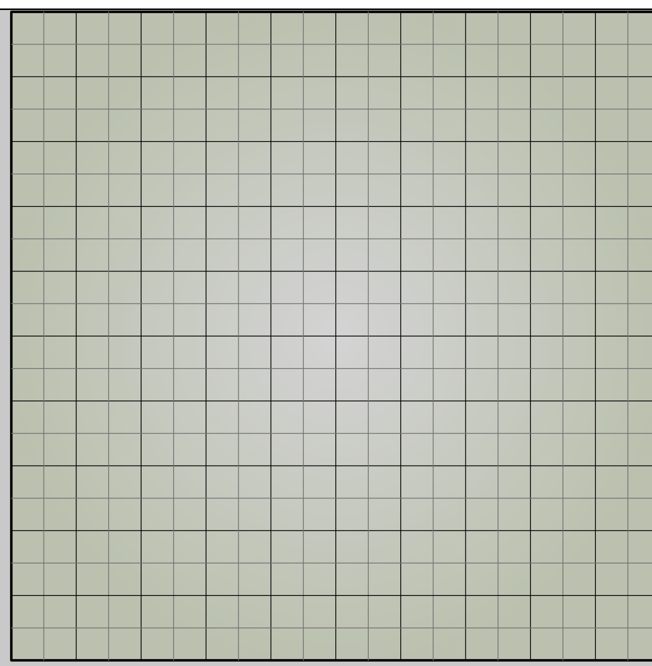
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (2)^2$$

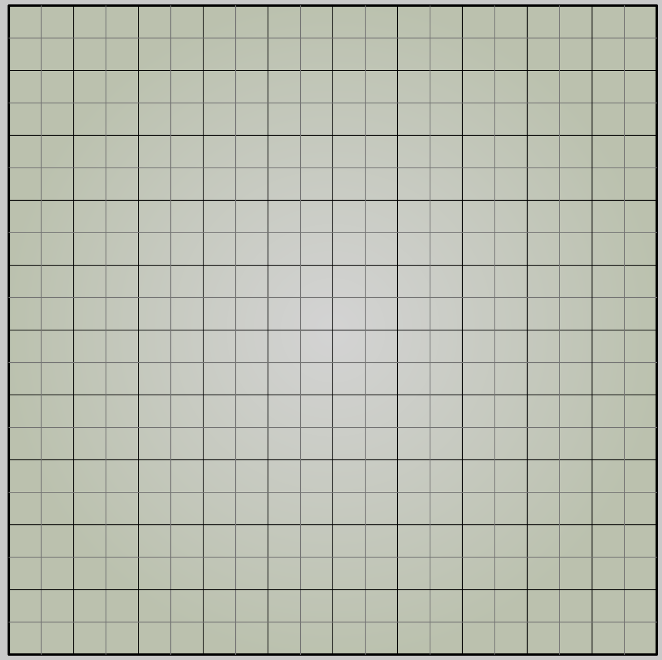
La ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

E 5.27 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$, escríbela en su forma ordinaria y realiza su gráfica.



E 5.28 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 24 = 0$, escríbela en su forma ordinaria y realiza su gráfica.



E 5.29 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, determina si el centro es el punto $C(0,3)$.

E 5.30 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 14 = 0$, determina si su radio es $r = 7$.

EJERCICIOS SESIÓN 3

E 5.31 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$, escríbela en su forma ordinaria y realiza su gráfica.

E 5.32 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 16 = 0$, Determina su centro y radio y realiza su gráfica.

E 5.33 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$, determina si su radio es $r = 2$.

E 5.34 La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$, determina sin graficar, si los puntos $A(-2,0)$, $B(-3,8)$ pertenecen a dicha circunferencia.

E 5.35 La ecuación $x^2 + y^2 - 81 = 0$ representa el alcance que tiene la señal de una antena de internet que se colocará en unas oficinas. Determina cual es la distancia máxima a la cual se puede colocar una oficina para que pueda tener señal de internet.

SESIÓN 4 (2 HORAS)

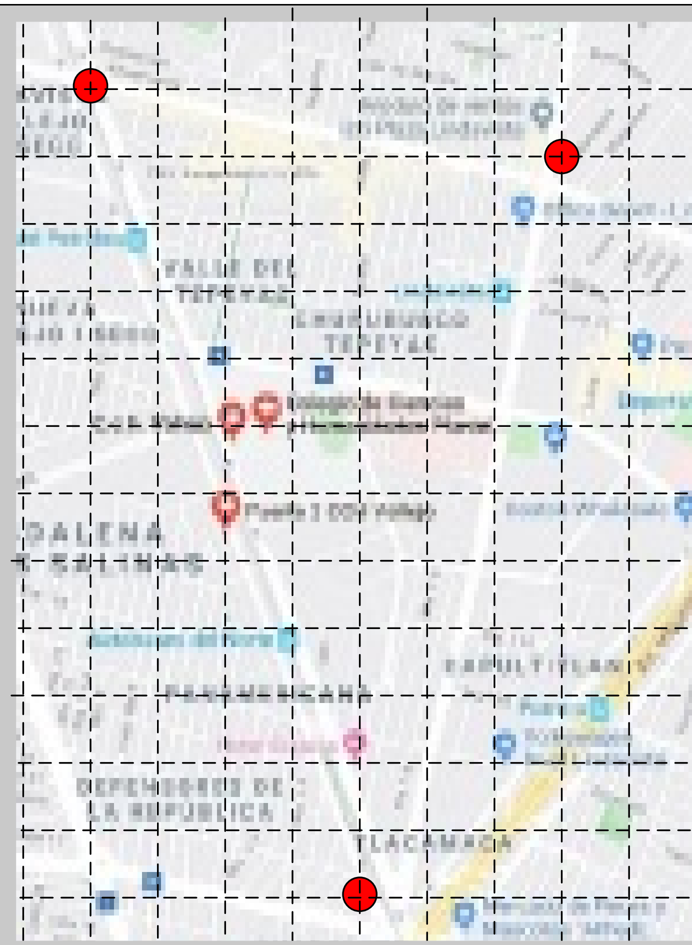
Tema: Problemas de aplicación.

Aprendizaje: Resuelve problemas de corte geométrico.

E 5.36 Calcula las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 3 = 0$ con la recta $x + y = 5$. Realiza la gráfica.

E 5.37 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,3)$, $B(2,-1)$, $C(10,3)$, identifica sus elementos y grafica.

E 5.38 El gobierno de la ciudad de México desea instalas bocinas para alerta sísmica, de tal forma que se escuche con la misma intensidad de sonido en los tres puntos señalados en el mapa. Determina donde se debe de colocar la bocina para que se tenga el mismo sonido en los puntos señalados.



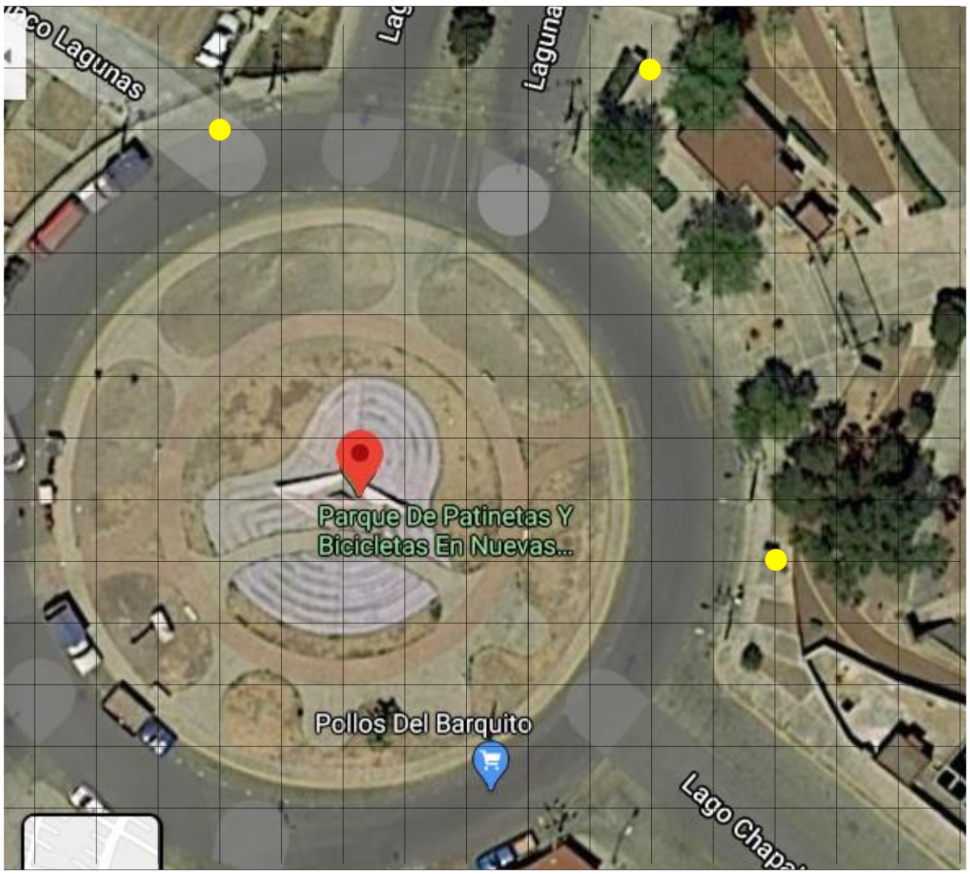
E 5.39 Se ha detectado un sismo en México, que de acuerdo con los registros se ha detectado una intensidad de 6,5 grados en la escala de Richter en tres estados diferentes. Determina donde fue el epicentro del sismo.

EJERCICIOS SESIÓN 4

E 5.40 Calcula las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 36 = 0$ con la recta $-x + y = 0$. Realiza la gráfica.

E 5.41 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(11,5)$, $B(2,2)$, $C(11,-1)$, identifica sus elementos y gráfica.

E 5.42 En una unidad habitacional se han instalado 3 luminarias para el área común, desean saber en qué punto se tendrá una mayor intensidad de luz.



E 5.43 El epicentro de un sismo se ha registrado en la ciudad de Oaxaca, como se muestra en el mapa del ejercicio 4. Se ha detectado que tuvo una intensidad de 7 grados en la escala de Richter con una longitud de 250 km. Determina en que ciudades o estados se detectó el sismo con la misma intensidad.

SESIÓN 5 (2 HORAS)

Tema: Problemas de aplicación.

Aprendizaje: Resuelve problemas de corte geométrico.

E 5.44 Determina la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$, en el punto $(4,5)$. Realiza la gráfica.

E 5.45 Determina la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$, en el punto $(1,6)$. Realiza la gráfica.

E 5.46 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1,1)$ y $B(5,1)$ y su centro está sobre la recta $x - y = 5$. Realiza la gráfica.

E 5.47 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0)$ y $B(9,4)$ y es tangente a la recta $3x - 4y + 29 = 0$. Se recomienda el Uso de GeoGebra.

EJERCICIOS SESIÓN 5

E 5.48 Calcula las intersecciones de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ con la recta $x + 3y = 10$. Realiza la gráfica.

E 5.49 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,6)$, $B(5,5)$, $C(5,-3)$, identifica sus elementos y gráfica.

E 5.50 Determina la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, que pasa por los puntos $A(-2,8)$ y $B(-4,4)$ y su centro está sobre la recta $4x - 3y + 8 = 0$. Realiza la gráfica.

E 5.51 Determina la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, que pasa por los puntos $A(9,1)$ y $B(1,5)$ y es tangente a la recta $3x + 4y - 41 = 0$. Se recomienda el Uso de GeoGebra,

SESIÓN 6 (1 HORA)

Tema: Definición de la elipse como lugar geométrico.

Aprendizaje: Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.

ELIPSE COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

La elipse se define como: El lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que se mueve en el plano cartesiano, de tal forma que la suma de las distancias a dos puntos fijos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ llamados focos, es siempre constante.

Si tenemos los puntos $F_1(2,0)$ y $F_2(-2,0)$, para determinar la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x,y)$ que se mueve en el plano de tal forma que la suma de las distancias a los puntos F_1 y F_2 es siempre igual a 3 hacemos:

$$dPF_1 + dPF_2 = 3 - - - - - - (1)$$

Aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos:

$$dPF_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2}$$
$$dPF_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2}$$

Y también:

$$dPF_2 = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-0)^2}$$
$$dPF_2 = \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}$$

Sustituimos en la ecuación (1):

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} + \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} = 3$$

Pasamos uno de los radicales al lado derecho de la igualdad:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4 + y^2} = 3 - \sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y reducimos términos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9 - 6\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2$$

Acomodando y reduciendo términos:

$$8x + 9 = 6\sqrt{x^2 + 4x + 4 + y^2}$$

Volvemos a elevar al cuadrado y a reducir términos:

$$64x + 144x + 81 = 36(x^2 + 4x + 4 + y^2)$$
$$64x + 144x + 81 = 36x^2 + 144x + 144 + 36y^2$$

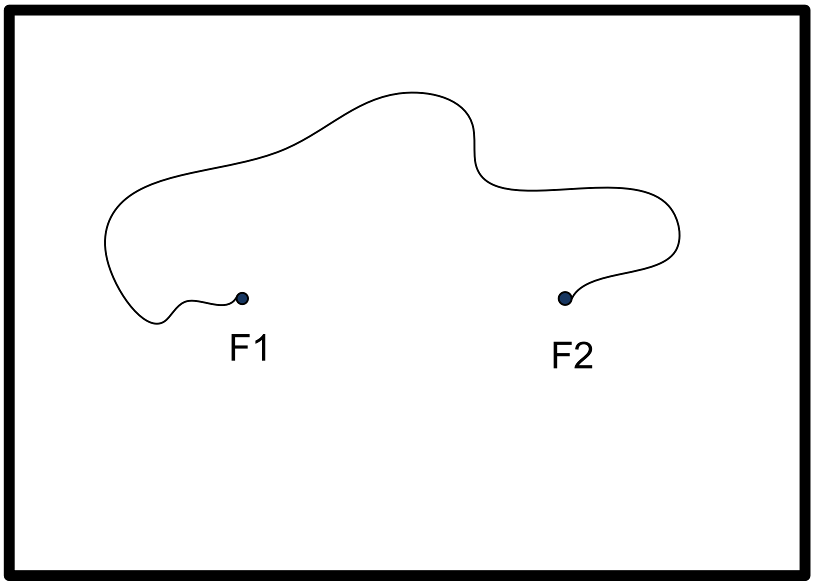
Igualando a cero, la ecuación del lugar geométrico es:

$$36x^2 + 36y^2 - 64x + 63 = 0$$

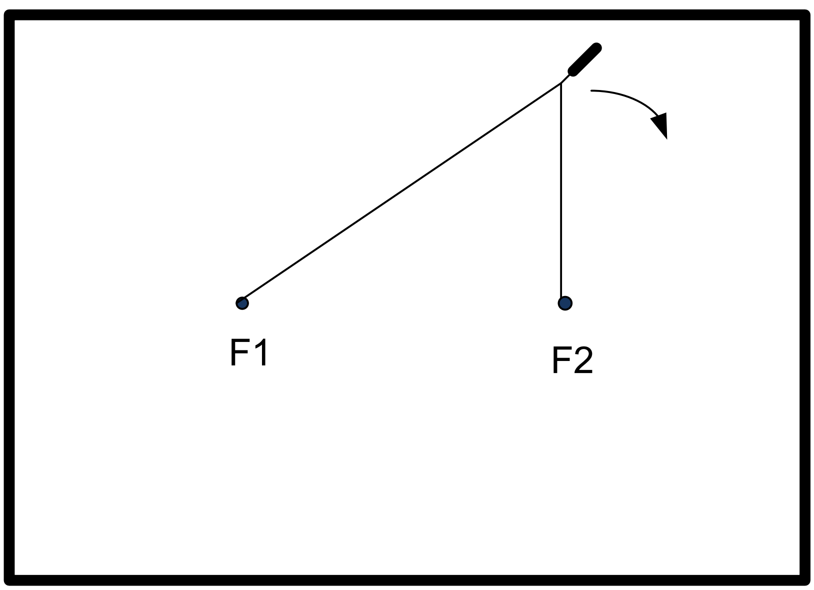
E 5.52 Determina la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que se mueve de tal forma que la suma de las distancias a los puntos $A(3,0)$ y $B(-3,0)$ es siempre de 8 unidades.

E 5.53 Determina la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano de tal forma que la suma de las distancias a los puntos $A(0,6)$ y $B(0,-6)$ es siempre de 10 unidades.

E 5.54 Con ayuda de un cartoncillo, dos tachuelas, un hilo realiza lo siguiente. Fija las dos tachuelas al cartoncillo separadas una cierta distancia. Sujeta el hilo a las tachuelas de tal forma que el hilo sea más grande que la distancia que hay entre las dos tachuelas, como se muestra en la figura:



Con la punta de un lápiz, estira el hilo y realiza el trazo que se forma al seguir el contorno del hilo (el hilo siempre debe estar estirado)



Identifica que figura geométrica se forma. Identifica algunos elementos de la figura obtenida.

EJERCICIOS SESIÓN 6

E 5.55 Investiga sobre los elementos que conforman a la figura obtenida.

E 5.56 Determina la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano de tal forma que la suma de las distancias a los puntos $A(0,3)$ y $B(0, -3)$ es siempre de 10 unidades.

E 5.57 Determina la ecuación del lugar geométrico del punto $P(x, y)$ que se mueve en el plano de tal forma que la suma de las distancias a los puntos $A(-2,4)$ y $B(10,4)$ es siempre de 20 unidades.

E 5.58 Investiga cómo se hace el trazo de una elipse, empleando doblez de papel.

SESIÓN 7 (2 HORAS)

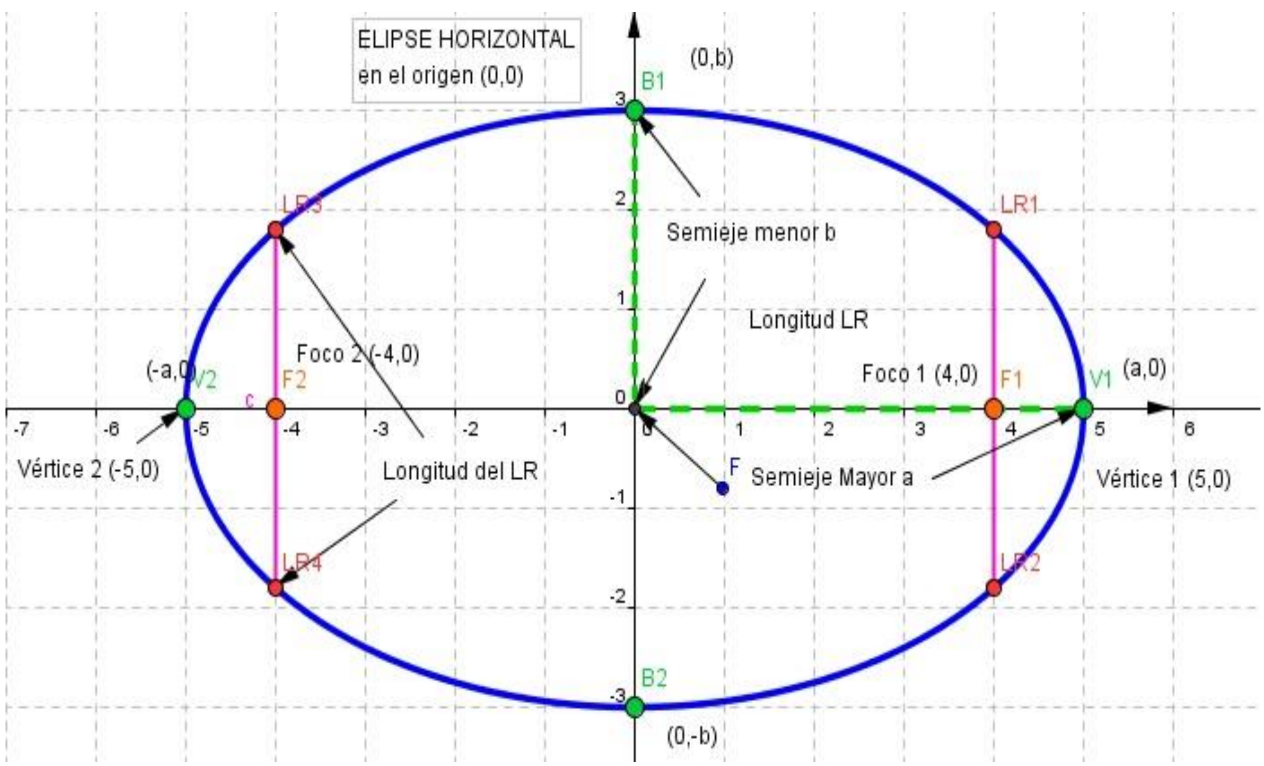
Tema: Definición de la elipse como lugar geométrico.

Aprendizaje: Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con los ejes paralelos a los ejes cartesianos.

ELEMENTOS DE LA ELIPSE

Una elipse con centro en el origen, orientada de forma horizontal se muestra en la siguiente figura, cuyos elementos son:

1. Vértice: Son los puntos de intersección de la Elipse con los ejes coordenados X, Y. Señalados como V1 y V2.
2. Focos: Son los puntos fijos de la Elipse que no pertenecen a ella. Señalados como F1 y F2.
3. Eje mayor: Es el segmento $\overline{V1V2}$ también llamado $2a$. Donde a es la longitud del semieje mayor.
4. Eje menor: es el segmento de recta que une a los puntos $P1(0,b)$ y $P2(0,-b)$ y es igual a $2b$.
5. Lado recto: Es la cuerda perpendicular al eje mayor, que pasa por uno de los focos. (existen dos cuerdas, cada una pasa por un foco) y su longitud se calcula como $LR = \frac{2b^2}{a}$.



La elipse puede estar orientada también de forma vertical. Es decir, el eje mayor es paralelo al eje y, pero sus elementos siguen siendo los mismos, sólo cambian su posición.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE

La ecuación de la elipse en su forma ordinaria dependerá si su orientación es horizontal o vertical:

HORIZONTAL	VERTICAL
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Donde: $a > b$. Y también $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

E 5.59 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$, identifica sus elementos y grafica.

E 5.60 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.61 Dada la ecuación de la elipse $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.62 Dada la ecuación de la elipse $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

EJERCICIOS SESIÓN 7

E 5.63 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.64 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.65 Dada la ecuación de la elipse $25x^2+36y^2-900=0$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.66 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{49}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.67 Dada la ecuación de la elipse $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{36}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

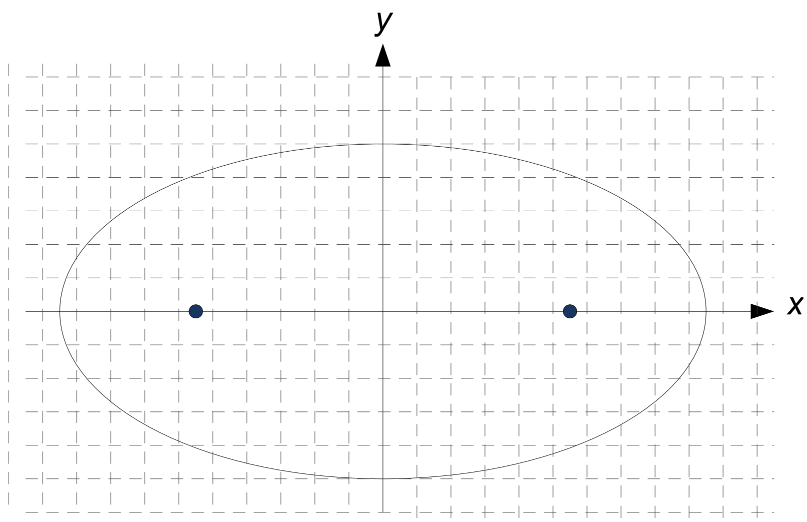
E 5.68 Dada la ecuación de la elipse $\frac{(x+1)^2}{64}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

SESIÓN 8 (2 HORAS)

Tema: Simetría con respecto a los ejes y al centro.

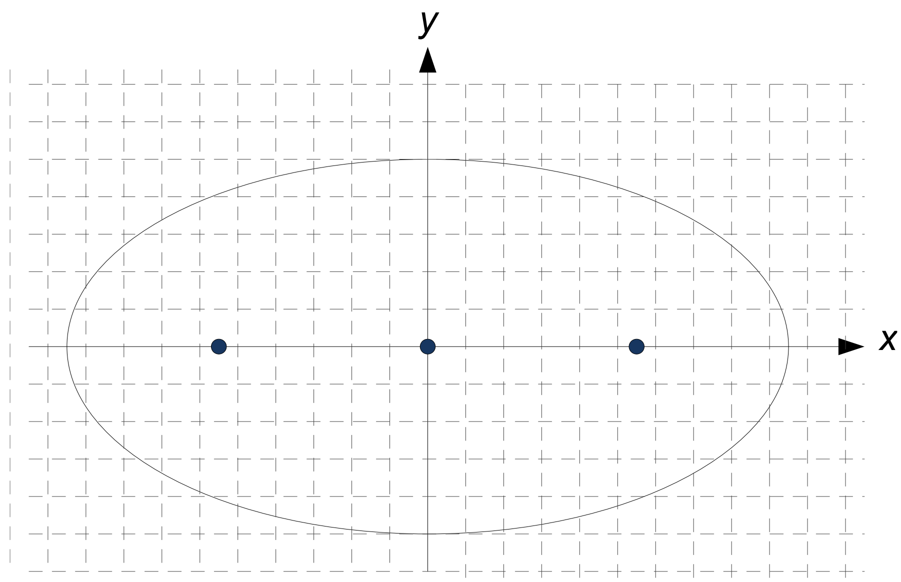
Aprendizaje: Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse

E 5.69 Dada la siguiente gráfica correspondiente a una elipse con centro en el origen. Realiza lo siguiente: Traza una recta vertical en cualquier parte, de tal forma que corte a la gráfica en dos puntos. ¿Qué característica observas en los puntos de intersección de la elipse con la línea vertical trazada? Explica y discute con tus compañeros. Traza otra línea vertical y observa qué característica tienen los puntos generados.



E 5.70 Repite el ejercicio anterior pero ahora trazando una línea horizontal. ¿Qué característica observas en los puntos de intersección de la elipse con la línea horizontal trazada?

E 5.71 Dada la siguiente gráfica correspondiente a una elipse con centro en el origen. Realiza lo siguiente: Traza cualquier recta que pase por el centro de la elipse (sin importar su inclinación). Observa los dos puntos que se forman con la elipse y la línea trazada. ¿Qué característica observas en los puntos generados? Explica y discute con tus compañeros.



E 5.72 Repite el ejercicio anterior trazando una recta diferente que pase por el centro de la elipse. ¿Qué característica observas en los puntos de intersección de la elipse con la línea trazada?

E 5.73 Con ayuda del profesor, identifica cuando se presenta una simetría con respecto a un eje o con respecto al centro. Discute con tus compañeros y trata de dar una definición o explicar cuando se da:

Simetría con respecto a un eje:
Simetría con respecto a un punto:

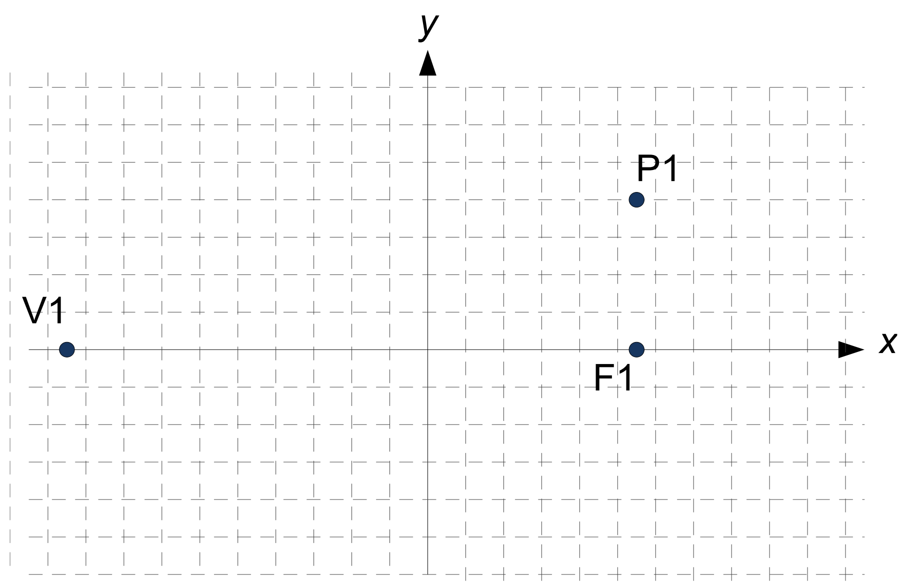
EJERCICIOS SESIÓN 8

E 5.74 Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.75 Para la gráfica obtenida en el ejercicio anterior idéntica que puntos o elementos de la elipse tienen una simetría con respecto a uno de los ejes.

E 5.76 Para la gráfica obtenida en el ejercicio anterior idéntica que puntos o elementos de la elipse tienen una simetría con respecto al centro de la elipse.

E 5.77 Dados los siguientes puntos que pertenecen a una elipse, ¿Qué otros puntos podrías ubicar? ¿Podrías trazar la elipse?



E 5.78 Realiza una investigación sobre las diferentes aplicaciones que puede tener la elipse.

E 5.79 Selecciona una de las aplicaciones que investigaste y describe si aparece la simetría con respecto a un eje o con respecto a un punto.

SESIÓN 9 (1 HORA)

Tema: La elipse y los parámetros de su representación algebraica.

Aprendizaje: Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción.

E 5.80 Dadas las ecuaciones $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ y $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$, identifica sus elementos y realiza sus gráficas en el mismo plano cartesiano.

E 5.81 Dadas las ecuaciones $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ y $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, identifica sus elementos, realiza sus gráficas en el mismo plano. Con base a lo que observas, indica que diferencia observas.

E 5.82 De acuerdo con lo observado en los dos ejercicios anteriores, explica lo siguiente:

¿Cómo afecta en la gráfica de la elipse si el valor de a aumenta o disminuye?

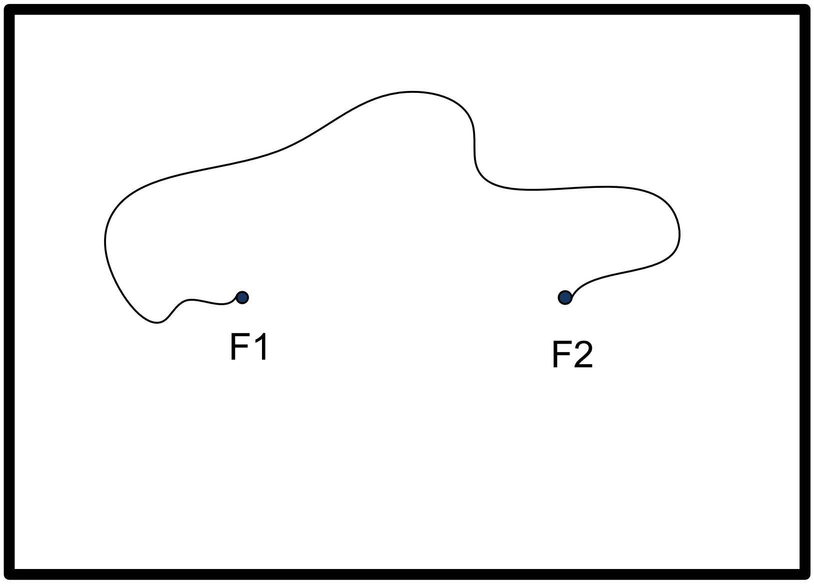
¿Cómo afecta en la gráfica de la elipse si el valor de b aumenta o disminuye?

¿Cómo crees que afecte en la gráfica de la elipse si el valor de c aumenta o disminuye?

E 5.83 Se sugiere que con ayuda del profesor se haga la construcción de una elipse con GeoGebra, donde se pueda variar los valores de los diferentes ´parámetros de que aparecen en la ecuación ordinaria de la elipse.

EJERCICIOS SESIÓN 9

E 5.84 Con ayuda de la construcción hecha con el cartoncillo, dos tachuelas, un hilo realiza lo siguiente. Realiza el trazo de la elipse variando la distancia que hay entre las tachuelas. Con base a lo observado identifica que parámetro vario en la ecuación de la elipse.



E 5.85 Repite el ejercicio anterior, trazando dos elipses variando la longitud del hilo. Con base a lo observado identifica que parámetro vario en la ecuación de la elipse.

SESIÓN 10 (2 HORAS)

Tema: Ecuación general.

Aprendizaje: Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.

ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE

Si la ecuación ordinaria de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Para escribirla en su forma general, multiplicamos ambos lados de la igualdad por a^2b^2:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Igualando a cero la ecuación:

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

Si hacemos que: $A=b^2$, $C=a^2$ y $F=-a^2b^2$, entonces la ecuación general de la elipse es:

$$Ax^2+Cy^2+F=0$$

Del mismo modo, podemos obtener la ecuación general de la elipse cuando su orientación es vertical.

Si la ecuación general de una elipse es $4x^2+9y^2-36=0$, para escribirla en su forma general, dividimos ambos lados de la igualdad por el $(4)(9)$:

$$\frac{4x^2}{(4)(9)}+\frac{9y^2}{(4)(9)}-\frac{36}{(4)(9)}=0$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$$

Pasando el 1, del otro lado de la igualdad, obtenemos la ecuación ordinaria de la elipse:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

E 5.86 Dada la ecuación de la elipse $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.87 Dada la ecuación de la elipse $36x^2 + 9y^2 - 324 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.88 Dada la ecuación de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.89 Dada la ecuación de la elipse $36x^2 + 16y^2 - 288x + 96y + 144 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

EJERCICIOS SESIÓN 10

E 5.90 Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 49y^2 + 64x - 294y - 279 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.91 Dada la ecuación de la elipse $x^2 + 100y^2 - 800y + 1500 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.92 Dada la ecuación de la elipse $36x^2 + 16y^2 - 288x + 96y + 144 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

E 5.93 Dada la ecuación de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$, escríbela en su forma ordinaria, identifica sus elementos y realiza su gráfica.

SESIÓN 11 (2 HORAS)

Tema: Intersección de cónicas, trazado de tangentes, propiedades óptica y auditiva.

Aprendizaje: Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

E 5.94 Calcula las intersecciones de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$, con la recta $2x - 5y = -16$. Realiza la gráfica.

E 5.95 Calcula las intersecciones de la elipse $36x^2 + 16y^2 - 288x + 96y + 144 = 0$, y la recta $3x - 2y = 6$. Realiza la gráfica.

E 5.96 Calcula la ecuación de la recta tangente a la elipse $36x^2 + 9y^2 - 900 = 0$ en el punto $A(3,8)$. Realiza la gráfica.

E 5.97 Determina la ecuación de la elipse que tiene su centro en $C(5,1)$ un vértice en $V1(5,4)$ y un extremo de su eje mayor en $E(3,1)$.

E 5.98 Determina la ecuación de la elipse que tiene sus vértices en los puntos $(-1,3)$ y $(5,3)$ y la longitud de su eje mayor es de 4 unidades.

E 5.99 Determina las intersecciones de las dos elipses: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ y $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. Realiza la gráfica.

EJERCICIOS SESIÓN 11

E 5.100 Calcula las intersecciones de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0$, y la recta $-3x + 5y = 14$. Realiza la gráfica.

E 5.101 Calcula las intersecciones de la elipse $64x^2 + 4y^2 - 384x + 32y + 384 = 0$, con la recta $4x + y = 16$ Realiza la gráfica.

E 5.102 Determina la ecuación de la elipse que tiene sus focos en $(-4,2)$ y $(4,2)$ y su longitud del eje mayor es de 10 unidades.

E 5.103 Determina la ecuación de la elipse que tiene sus focos en $(-5,0)$ y $(5,0)$ y su longitud del eje menor es de 8 unidades.

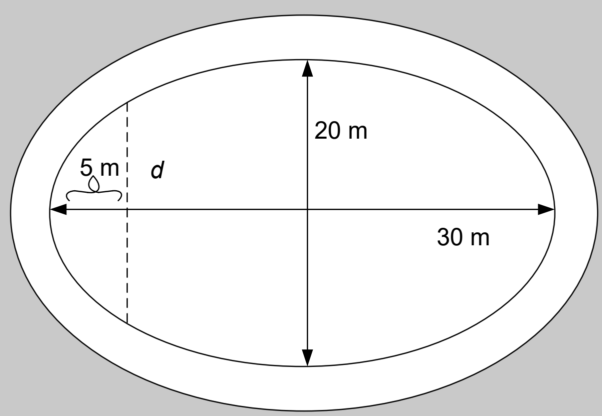
SESIÓN 12 (1 HORA)

Tema: Intersección de cónicas, trazado de tangentes, propiedades óptica y auditiva.

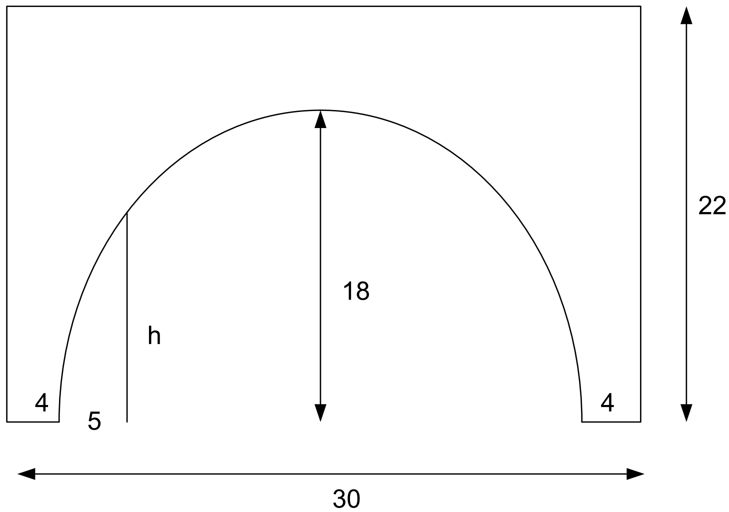
Aprendizaje: Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.

E 5.104 La órbita de la Tierra es una elipse con el Sol en un foco. La longitud del eje mayor es de 241 428 000 km y la excentricidad es de 0.0167. Determina la mayor distancia al sol.

E 5.105 Una pista de ciclismo tiene forma elíptica, tiene 30 metros de largo por 20 de ancho, como se muestra en la figura. ¿Qué ancho tendrá el interior de la pista a 5 metros?



E 5.106 Un arco cuya sección transversal es elíptica, como se muestra en la figura: determina que altura tiene el arco a 5 metros en el interior del arco.

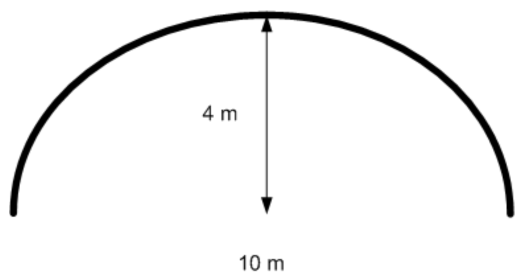


EJERCICIOS SESIÓN 12

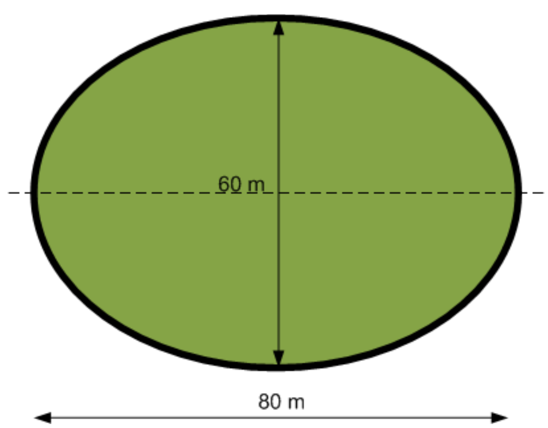
E 5.107 La siguiente tabla muestra las longitudes de los semi ejes menores y la excentricidad de las órbitas de algunos de los planetas. Con la información proporcionada calcula la distancia máxima y mínima de cada planeta al sol.

PLANETA	SEMIEJE MAYOR (millones de kilómetros)	EXCENTRICIDAD
Venus	108.2	0.0068
Júpiter	778.3	0.0484
Tierra	149.6	0.0167

E 5.108 Una puerta tiene forma elíptica, de 10 m de ancho y 4 m de alto, como se muestra en la figura. Si se desea pasar través de ella una caja que tiene 2 m de alto, ¿Qué tan ancha puede ser la caja?



E 5.109 Se desea construir un campo que tenga forma elíptica, de 80 m de largo por 60 m de ancho, como se muestra en la figura. Se desea alumbrar el campo, colocando dos lámparas, que se localicen en os focos de la elipse, determina la posición de las lámparas y a excentricidad del terreno.



EJERCICIOS DE REPASO DE LA UNIDAD

E 5.110 Un punto $P(x, y)$ se mueve de tal forma que siempre está a una distancia de 6 unidades del punto $C(-4,2)$. Obtén la ecuación del lugar geométrico, realiza la gráfica.

E 5.111 Escribe la ecuación en su forma general $(x+2)^2+(y-5)^2=25$. Identifica sus elementos y gráfica.

E 5.112 Escribe la ecuación en su forma ordinaria $x^2+y^2-6x-8y=0$. Identifica sus elementos y grafica.

E 5.113 Calcula las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2-6x+8y=0$ con la recta $x-y=6$. Realiza la gráfica.

E 5.114 Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2,-4)$, $B(3,1)$, $C(7,-7)$, identifica sus elementos y gráfica.

E 5.115 Escribe la ecuación en su forma general $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$. Identifica sus elementos y gráfica.

E 5.116 Escribe la ecuación en su forma ordinaria $512x^2+256y^2-4096x-512y+256=0$. Identifica sus elementos y grafica.

E 5.117 Calcula las intersecciones de la elipse $9x^2+25y^2+36x-189=0$, con la recta $-3x+5y=21$ Realiza la gráfica.

PROPUESTA DE EVALUACIÓN

NOTA: Resuelve los siguientes problemas indicando todas las operaciones necesarias.

1.- El centro de una circunferencia es el punto $(-6,4)$ y su diámetro está dado por la distancia que hay entre el punto $(0,-4)$ y la recta $-3x+4y-84=0$. Escribe su ecuación en su forma ordinaria.

2.- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-12,12)$, $(-14,10)$ y $(2,-2)$. Realiza su gráfica.

3.- Calcula la intersección de la circunferencia $x^2+y^2+12x-8y-48=0$ con la recta $4x-3y+36=0$. Grafica la circunferencia y la recta.

4.- Escribe la ecuación en su forma ordinaria $25x^2+9y^2-50x-200=0$. Identifica sus elementos y grafica.

5.- Calcula las intersecciones de la elipse $9x^2+25y^2-18x-100y-116=0$, con la recta $3x+5y=28$. Realiza la gráfica.

RÚBRICA PARA EVALUAR LOS APRENDIZAJES CORRESPONDIENTES A LA UNIDAD V DE MATEMÁTICAS III

CURSO:	**MATEMÁTICAS III**			
UNIDAD 2:	**Circunferencia, Elipse y sus Ecuaciones Cartesianas**			
OBJETIVO:	Evaluar los aprendizajes correspondientes a los temas de circunferencia y elipse			
Porcentaje:	100			
Criterios	**Excelente**	**Bueno**	**Regular**	**Total**
Circunferencia				
Deduce la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro)	A partir de las condiciones dadas, obtiene la ecuación de la circunferencia como lugar geométrico. Identifica con precisión las coordenadas del centro y el valor de su radio. **Puntos: 10**	A partir de las condiciones dadas, obtiene la ecuación de la circunferencia como lugar geométrico. Identifica con las coordenadas del centro y el valor de su radio, pero presenta un error de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de las condiciones dadas, no puede obtiene la ecuación de la circunferencia como lugar geométrico. Identifica de manera errónea las coordenadas del centro y el valor de su radio. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Obtiene la ecuación general de la circunferencia.	A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia, obtiene de manera correcta la ecuación de la circunferencia en su forma general, desarrolla de manera correcta el proceso algebraico. **Puntos: 10**	A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia, obtiene de manera parcialmente correcta la ecuación de la circunferencia en su forma general, Presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de la ecuación ordinaria de la circunferencia, no puede obtener de manera correcta la ecuación de la circunferencia en su forma general, presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Obtiene la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determina el centro.	A partir de la ecuación general de la circunferencia, obtiene de manera correcta la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, identificando correctamente el radio y las coordenadas del centro. **Puntos: 10**	A partir de la ecuación general de la circunferencia, obtiene de manera parcialmente correcta la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, identificando el radio y las coordenadas del centro, con algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de la ecuación general de la circunferencia, no puede obtener la ecuación de la circunferencia en su forma ordinaria, identifica de manera errónea el radio las coordenadas del centro, presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	

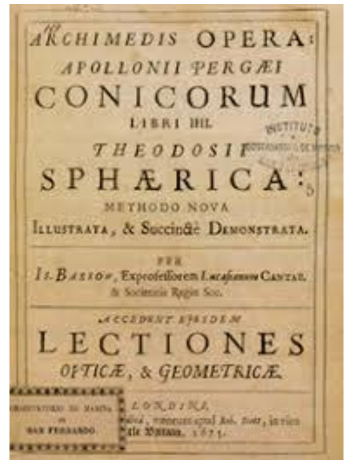
Resuelve problemas de corte geométrico.	Aplica de manera correcta el concepto de circunferencia, identifica adecuadamente cómo utilizar la ecuación ordinaria o general de la circunferencia, para obtener información que le permita resolver el problema planteado. **Puntos: 10**	Aplica de manera parcialmente correcta el concepto de circunferencia, identifica cómo utilizar la ecuación ordinaria o general de la circunferencia, para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	Aplica de manera incorrecta el concepto de circunferencia, identifica parcialmente cómo utilizar la ecuación ordinaria o general de la circunferencia, para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Elipse				
Obtiene la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.	A partir de las condiciones dadas, obtiene correctamente la ecuación de la elipse como lugar geométrico. Identifica con precisión todos sus elementos. **Puntos: 10**	A partir de las condiciones dadas, obtiene de manera parcialmente correcta la ecuación de la elipse como lugar geométrico. Identifica todos sus elementos, presentando algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de las condiciones dadas, obtiene de manera incorrecta la ecuación de la elipse como lugar geométrico. Identifica todos sus elementos, presentando errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Obtiene la ecuación cartesiana de una elipse, con los ejes paralelos a los ejes cartesianos.	A partir de las condiciones y algunos datos de la elipse, puede obtener de manera correcta su ecuación cartesiana. **Puntos: 10**	A partir de las condiciones y algunos datos de la elipse, puede obtener de manera parcialmente correcta su ecuación cartesiana, presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de las condiciones y algunos datos de la elipse, no puede obtener de manera correcta su ecuación cartesiana. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Reconoce los tipos diferentes de simetría de la elipse.	A partir de la gráfica de una elipse, puede reconocer la simetría con respecto a un punto o a un eje. **Puntos: 10**	A partir de la gráfica de una elipse, puede reconocer de manera parcial la simetría con respecto a un punto o a un eje. **Puntos: 8**	A partir de la gráfica de una elipse, no puede reconocer la simetría con respecto a un punto o a un eje. **Puntos: 5**	
Identifica el papel de los parámetros a, b, c en la gráfica de la elipse y los emplea en su construcción	A partir de la de la gráfica de una elipse, identifica de manera correcta cómo cambia la gráfica si los parámetros a, b y c cambian. **Puntos: 10**	A partir de la de la gráfica de una elipse, identifica parcialmente cómo cambia la gráfica si los parámetros a, b y c cambian. **Puntos: 8**	A partir de la de la gráfica de una elipse, no ‘puede identificar cómo cambia la gráfica si los parámetros a, b y c cambian. **Puntos: 5**	

Determina los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria	A partir de la ecuación general de la elipse, obtiene de manera correcta su ecuación en su forma ordinaria, identificando correctamente sus elementos. **Puntos: 10**	A partir de la ecuación general de la elipse, obtiene de manera parcialmente correcta su ecuación en su forma ordinaria, identificando correctamente sus elementos, presenta errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	A partir de la ecuación general de la elipse, obtiene de manera incorrecta su ecuación en su forma ordinaria, identifica sus elementos erróneamente. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
Resuelve problemas geométricos y en otros contextos.	Aplica de manera correcta el concepto de elipse, identifica adecuadamente cómo utilizar la ecuación ordinaria o general para obtener información que le permita resolver el problema planteado. **Puntos: 10**	Aplica de manera parcialmente correcta el concepto de elipse, identifica cómo utilizar la ecuación ordinaria o general para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta algunos errores de signo u operatividad. **Puntos: 8**	Aplica de manera incorrecta el concepto elipse, identifica parcialmente cómo utilizar la ecuación ordinaria o general para obtener información que le permita resolver el problema planteado. Presenta errores en el proceso. **Puntos: 5**	
			Total:	

PROBLEMAS PARA INVESTIGAR

Circunferencia:

Apolonio de Perga fue un geómetra del siglo III A. C. su trabajo más importante se refiere a las secciones cónicas, en particular su tratado sobre las tangencias que más o menos se describe así:



ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
IS. BARROW, Expofessorem Lucasianum CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.
ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.
LONDINI,

Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.

1.- De acuerdo con lo anterior investiga cuales son los diez problemas de Apolonio de Perga sobre tangencias y realiza una reseña de lo investigado.

2.- Con lo aprendido en esta unidad resuelve el siguiente problema:

Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados. Realiza su representación gráfica.

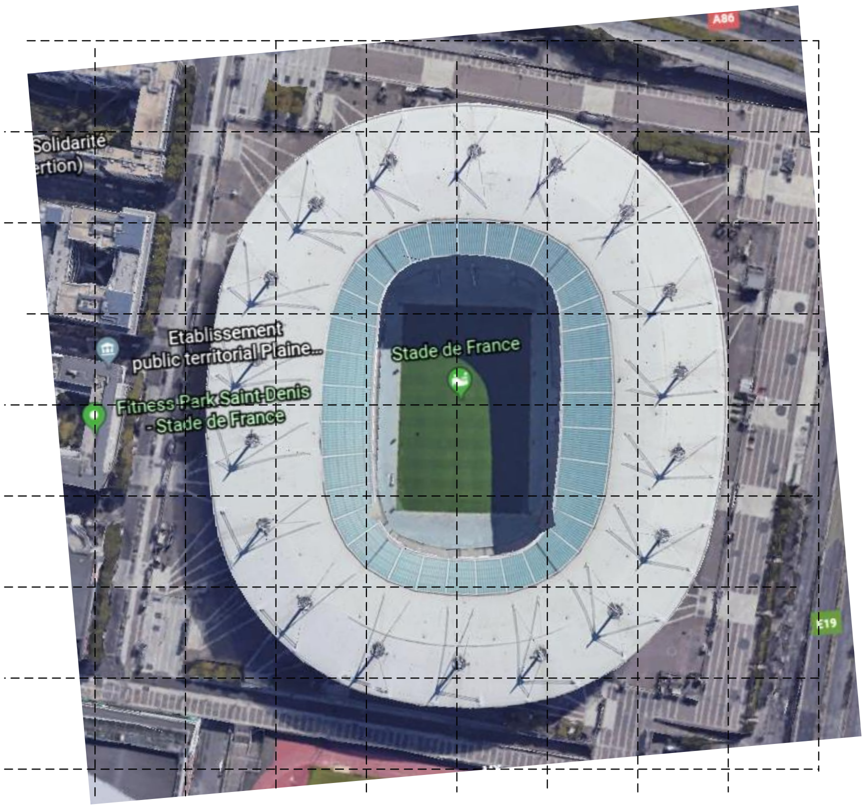
3.- Con ayuda de GeoGebra, resuelve los siguientes problemas:

a) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una recta dada.

b) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos rectas dadas.

Elipse:

En 1998 se inauguró el estadio de Francia Saint Denis, para celebrar el Mundial de Futbol en ese País. Con el partido inicial de Francia vs España. El domo de este estadio tiene forma elíptica, tiene largo 340 metros y 290 de ancho. Determina la posición que tendría los focos de la elipse, su excentricidad y la longitud del lado recto.



Investiga en que otros contextos tiene aplicaciones la elipse.

FORMULARIO DE LA UNIDAD

Ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro en el origen	$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$	
Ecuación ordinaria de la circunferencia, con centro fuera del origen	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	
Ecuación General de la circunferencia	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A = C$	
Ecuación ordinaria de la elipse, con centro en el origen	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $Horizontal$ $Vertical$	
Ecuación ordinaria de la elipse, con centro fuera del origen	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ o $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ $Horizontal$ $Vertical$	
Ecuación General de la elipse	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq C$	
Elementos de la Elipse	$LR = \frac{2b^2}{a}$ $e = c/a$	Eje Mayor: $EM = 2a$ Eje menor: $Em = 2b$ Eje Focal: $Ef = 2c$

RESULTADOS DE EJERCICIOS Y EVALUACIÓN

Ejercicios:

No. Eje.	Respuesta	No. Eje.	Respuesta
E 5.7	$x^2 + y^2 = 36$	**E 5.66**	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,4)$, *Vertical*, $V_1(0,11)$, $V_2(0,-7)$, $F(0,8.89)$, $F_2(0,-0.89)$, $LR = 7.14$, $EM = 14$, $Em = 10$, $Ef = 6.63$, $e = 0.69$
E 5.8	$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 80 = 0$	**E 5.67**	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,0)$, *Horizontal*, $V_1(6,0)$, $V_2(-6,0)$, $F(3.31,0)$, $F_2(-3.31,0)$, $LR = 8.3$, $EM = 12$, $Em = 10$, $Ef = 6.633$, $e = 0.55$
E 5.9	$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 25$	**E 5.68**	*Elementos de la elipse:* $Centro(-1,4)$, *Horizontal*, $V_1(7,4)$, $V_2(-9,4)$, $F(4.29,4)$, $F_2(-6.29,4)$, $LR = 9$, $EM = 16$, $Em = 12$, $Ef = 10.58$, $e = 0.66$
E 5.10	$r = 5,\ C(4,-2)$	**E 5.74**	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,0)$, *Horizontal*, $V_1(4,0)$, $V_2(-4,0)$, $F(2.64,0)$, $F_2(-2.64,0)$, $LR = 4.5$, $EM = 8$, $Em = 6$, $Ef = 5.29$, $e = 0.66$
E 5.11	$r = 5,\ C(4,0)$	**E 5.75**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.12	$r = 6,\ C(-5,2)$	**E 5.76**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.13	$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$	**E 5.77**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.14	Alcance: $d = 5$	**E 5.78**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.20	$x^2 + y^2 + 8y + 7 = 0$	**E 5.79**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.21	$x^2 + y^2 + 8y - 20 = 0$, $C(0,4)$, $r = 6$	**E 5.84**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.22	$x^2 + y^2 + 12x - 2y - 12 = 0$,$C(-6,1)$, $r = 7$	**E 5.85**	*Se deja al profesor revisarlo*
E 5.23	$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$	**E 5.90**	$\frac{(x+2)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$
E 5.24	$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$	**E 5.91**	$\frac{(x)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{1} = 1$
E 5.25	$A(8,4)$ Si, $B(-2,2)$ No, $C(3,-1)$ Si	**E 5.92**	$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$
E 5.26	$A(-2,9)$ Si, $B(2,7)$ Si, $C(-6,2)$ No	**E 5.93**	$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
E 5.31	$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$	**E 5.100**	Intersecciones: $P(-3,1)$, $Q(2,4)$
E 5.32	$C(0,0)$, $r = 4$	**E 5.101**	Intersecciones: $P(5,-4)$, $Q(3,4)$
E 5.33	$C(3,5)$, $r = 0$	**E 5.102**	$9x^2 + 25y^2 - 100y - 125 = 0$
E 5.34	$A(-2,0)$ Si, $B(-3,8)$ No	**E 5.103**	$256x^2 + 656y^2 - 10496 = 0$
E 5.35	Alcance: $d = 9$	**E 5.107**	**PLANETA** — **Distancias** Venus — $Dmax = 108.9357,$ $Dmin = 107.4642$ Júpiter — $Dmax = 815.9697,$ $Dmin = 740.6302$ Tierra — $Dmax = 152.098,$ $Dmin = 147.10168$
E 5.40	Intersecciones: $P(3,3)$, $Q(-6,-6)$	**E 5.108**	*Ancho de la caja 4.33 m*
E 5.41	$(x-7)^2 + (y-2)^2 = 25$	**E 5.109**	$c = 26.46,\ del\ centro$
E 5.42	*Se deja al profesor revisarlo*	**E 5.110**	$x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$
E 5.43	*Se deja al profesor revisarlo*	**E 5.111**	$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$

E 5.48	Intersecciones: $P(-2,4)$, $Q(7,1)$	**E 5.112**	$(x-3)^2+(y-4)^2=25$
E 5.49	$(x-2)^2+(y-1)^2=25$	**E 5.113**	Intersecciones: $P(6,0)$, $Q(-1,-7)$
E 5.50	$(x-1)^2+(y-4)^2=25$	**E 5.114**	$x^2+y^2-6x+8y=0$
E 5.51	$(x-4)^2+(y-1)^2=25$	**E 5.115**	*Elementos de la elipse:* $Centro(2,3)$, *Horizontal,* $V_1(8,3)$, $V_2(-4,3)$, $F(5.31,3)$, $F_2(-1.31,3)$, $LR=8.3$, $EM=12$, $Em=10$, $Ef=6.63$, $e=0.55$
E 5.55	*Se deja al profesor revisarlo*	**E 5.116**	$\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{32}=1$
E 5.56	$25x^2+16y^2-400=0$	**E 5.117**	Intersecciones: $P(-7,0)$, $Q(-2,3)$
E 5.57	$16x^2+25y^2-128x-200y-944=0$	**Nota: Se deja al profesor, revise algunos de los resultados a los problemas plateados, debido a que requieren de una mayor explicación, así como de revisar la autoevaluación que hacen los alumnos de la unidad.** **También se deja de manera opcional, los problemas que aparecen en el apartado llamado: "problemas para pensar" ya que los problemas tienen un mayor nivel de dificultad y requieren la asesoría del profesor.**	
E 5.58	*Se deja al profesor revisarlo*		
E 5.63	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,0)$, *Horizontal,* $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$, $F(4,0)$, $F_2(-4,0)$, $LR=3.6$, $EM=10$, $Em=6$, $Ef=8$, $e=0.8$		
E 5.64	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,0)$, *Vertical,* $V_1(0,5)$, $V_2(0,-5)$, $F(0,3)$, $F_2(0,-3)$, $LR=6.4$, $EM=10$, $Em=8$, $Ef=6$, $e=0.6$		
E 5.65	*Elementos de la elipse:* $Centro(0,0)$, *Horizontal,* $V_1(6,0)$, $V_2(-6,0)$, $F(3.31,0)$, $F_2(-3.31,0)$, $LR=8.3$, $EM=12$, $Em=10$, $Ef=6.633$, $e=0.55$		

BIBLIOGRAFÍA PARA LA UNIDAD

Para el alumno:

De Oteysa, E. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica.* México: Mc Graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*, México: Limusa.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Para el profesor:

Ayres, F. (1970). *Trigonometría Plana y Esférica*. Mc Graw–Hill/ Interamericana de México.

Castañeda, E. (2000) *Geometría analítica en el espacio.* México: UNAM, Facultad de Ingeniería.

Colección "Temas de Matemáticas" editada por la facultad de Ciencias de la UNAM.

De Oteysa, E. (2007). *Conocimientos Fundamentales de Matemáticas, Trigonometría y geometría Analítica*. México: Pearson educación.

Fuenlabrada, S. (2000). *Geometría Analítica.* México: Mc Graw–Hill.

Hirsch, C. y Schoen, H. (1987). *Trigonometría conceptos y aplicaciones*. México: Mc Graw–Hill.

Holliday, B. et al. (2002). *Geometría Analítica con Trigonometría*. México: Mc Graw–Hill.

Lehmann, C. (2008). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Morales, H. y Molina, A. (2002). *Matemáticas III*. México: Trillas.

Ruiz, J. (2005). *Geometría Analítica*. México: Grupo Patria Cultural, S.A. de C.V.

Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: Cengage Learning.