

Integración numérica. Cuadratura Gaussiana

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2021

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105117.

Se presentan los esquemas más utilizados para integrar funciones tabulares: la fórmula del trapecio y los de Simpson que parten del polinomio interpolante de Newton-Gregory que invariablemente requieren un espaciamiento constante y la Cuadratura Gaussiana que permite integrar cualquier función analítica a través de un algoritmo. Ambos esquemas pueden aplicarse en una amplia variedad de fenómenos con un manejo muy pertinente de los errores¹.

Palabras clave: Integración numérica, orden de error, integración gaussiana.

En la exploración de las técnicas de derivación numérica quedó de manifiesto la enorme ventaja que resulta de la aplicación de los principios de la interpolación cuando el profesional de la ingeniería se enfrenta a problema reales donde el fenómeno físico se manifiesta a través de una función tabular.

En este sentido, de la misma forma en que es posible operar con una función tabular sin la necesidad de obtener primeramente su forma analítica, en este caso se presentarán las herramientas para integrar dicha función; estas requieren de los considerandos básicos del cálculo integral y por tratarse de técnicas numéricas su resultado es el valor del área bajo la curva de la función; en consecuencia, es indispensable contar con el intervalo de integración respectivo.

Adicionalmente a las ventajas intrínsecas que ofrecen las aplicaciones numéricas a través de herramientas de cómputo, la integración numérica permite obtener resultados muy precisos para aquellas integrales *impropias* o para las que, por su complejidad, rebasan a las técnicas analíticas.

Es necesario resaltar que para la buena aplicación de las herramientas de integración numérica deben aplicarse conceptos básicos de interpolación numérica, tales como el orden de interpolación y el orden de error en función del paso h , que debe ser constante.

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

1. Integración trapezoidal y Fórmulas de Simpson

El punto de partida para el desarrollo de las herramientas de integración numérica, en este caso, es el polinomio interpolante de Newton-Gregory expresado en la ecuación (1) y que se aplica a una función tabular equiespaciada.

$$f(x) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \quad (1)$$

Donde $h = cte$ y $k = \frac{x_k - x_0}{h}$. Se plantea entonces obtener:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \quad (2)$$

Dado que el polinomio interpolante de la ecuación (1) representa de buena manera a la función analítica $f(x)$ es válida la siguiente igualdad:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} (y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots) dx \quad (3)$$

Para proceder a su solución es necesario realizar un cambio de variable de x a k de la siguiente forma:

Si $k = \frac{x_k - x_0}{h}$, entonces:

- Si $x = x_0 \implies k = 0$
- Si $x = x_n \implies k = n$ que representa el número de pares de puntos que conforman la función tabular.
- $\frac{dk}{dx} = \frac{1}{h} \implies dx = h dk$

Incluyendo estas consideraciones en la ecuación (3):

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \int_0^n (y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots) h dk \quad (4)$$

Integrando:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ky_0 + \frac{k^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{k^4}{24} - \frac{3k^3}{18} - \frac{2k^2}{12}\right)\Delta^3 y_0 + \dots \right]_0^n$$

Valuando sus límites:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12}\right)\Delta^3 y_0 + \dots \right] \quad (5)$$

La ecuación (5) representa la integral de la función tabular equiespaciada $f(x)$ con n puntos. A partir de ella es posible obtener diferentes órdenes de integración de acuerdo al orden de interpolación utilizado (figura 1).

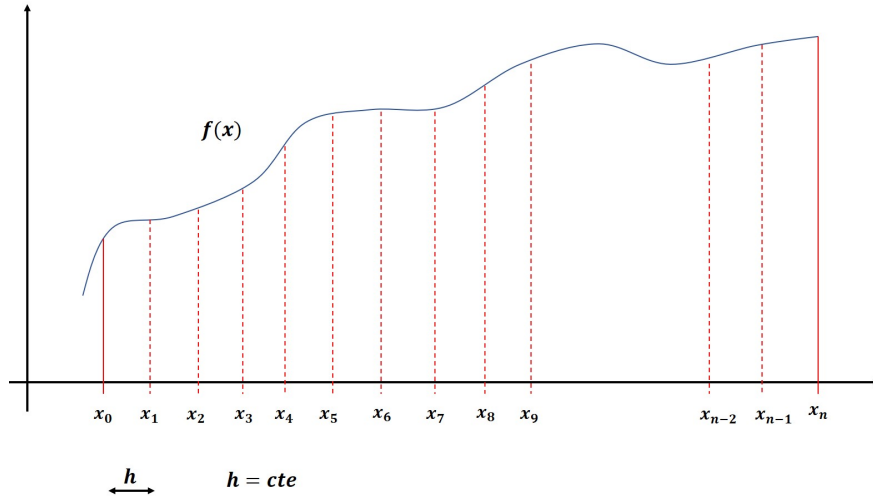


Figura 1: Secciones de la función tabular con espaciamiento constante

1.1. Primer orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la primera diferencia, es decir, a un primer orden de interpolación.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 \right] \quad (6)$$

Este truncamiento implica un problema de coherencia con el planteamiento de la integral del miembro izquierdo de esta última ecuación. La integral de la función $f(x)$ está planteada en el intervalo $[x_0, x_n]$ y en el miembro derecho el resultado está forzado a incluir los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) por efectos del truncamiento a la primera diferencia. Dado lo anterior, deben ajustarse los límites de la integral del miembro izquierdo. Si se integra del punto (x_0, y_0) al (x_1, y_1) implica que $n = 1$. Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia (figura 2):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= h \left[y_0 + \frac{1}{2} \Delta y_0 \right] \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= h \left[y_0 + \frac{1}{2} \Delta (y_1 - y_0) \right] \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \frac{h}{2} [y_0 + y_1] \end{aligned}$$

Debe percibirse que, para obtener la integral en todo el intervalo $[x_0, x_n]$ debe aplicarse la última fórmula entre todos los pares de puntos y después hacer la suma de todos los resultados:

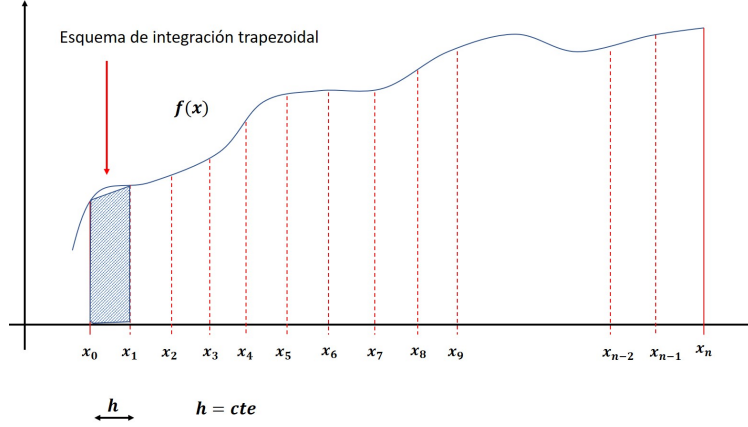


Figura 2: Tramos de una sección en la regla del trapecio

$$\begin{aligned}
 \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx &= \frac{h}{2} [y_1 + y_2] \\
 \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx &= \frac{h}{2} [y_2 + y_3] \\
 &\vdots \\
 \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx &= \frac{h}{2} [y_{n-1} + y_n]
 \end{aligned}$$

Sumando las integrales para cada intervalo parcial:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} [y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + y_n]$$

En forma simplificada:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{2} \left[y_0 + y_n + 2 \sum (\text{resto de ordenadas}) \right] \quad (7)$$

La ecuación (7) se le conoce como *Fórmula trapezoidal* y representa un primer orden de interpolación y tiene un esquema de error de $O(h^2)$.

1.2. Segundo orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la segunda diferencia, es decir, a un segundo orden de interpolación.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right] \quad (8)$$

En este caso, al incluir en el planteamiento de la solución de la integral a la segunda diferencia se consideran a los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , que de nuevo no es coherente con la integral de la función $f(x)$ en el miembro izquierdo, que está planteada en el intervalo $[x_0, x_n]$. De nuevo deberá hacerse el ajuste respectivo lo que implica que se integrará parcialmente entre tres puntos que representan dos segmentos de área. En consecuencia, al hacer la suma de las áreas parciales será condición necesaria que el número n de puntos que conforman la función tabular sea *múltiplo de dos* (figura 3).

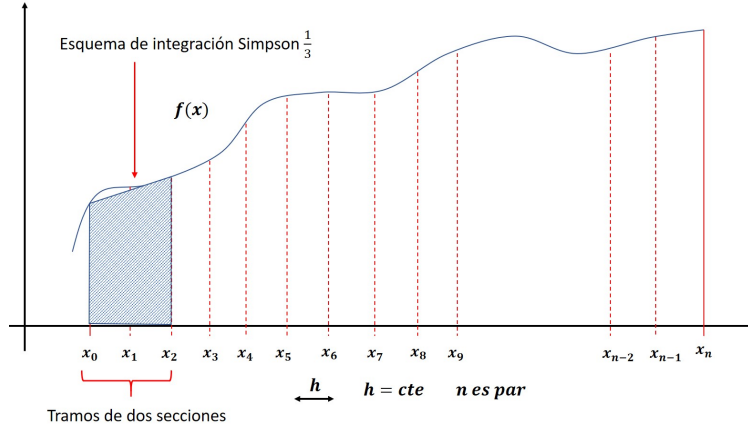


Figura 3: Tramos de dos secciones

En el ajuste de la ecuación (8), si se integra del punto (x_0, y_0) al (x_2, y_2) implica que $n = 2$. Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = h \left[2y_0 + 2\Delta y_0 + \left(\frac{1}{3}\right) \Delta^2 y_0 \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = h \left[2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \left(\frac{1}{3}\right) (y_2 - 2y_1 + y_0) \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2]$$

Recorriendo los intervalos de integración:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_2 + 4y_3 + y_4]$$

$$\int_{x_4}^{x_6} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_4 + 4y_5 + y_6]$$

$\vdots$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

Sumando las integrales para cada intervalo parcial:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \dots + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{h}{3} \left[y_0 + y_n + 2 \sum \left(\begin{matrix} \text{ordenadas de} \\ \text{orden par} \end{matrix} \right) + 4 \sum \left(\begin{matrix} \text{ordenadas de} \\ \text{orden impar} \end{matrix} \right) \right] \quad (9)$$

La ecuación (9) se conoce como *Fórmula de integración de Simpson* $_{\frac{1}{3}}$ que tiene condición que el número n de puntos que conforman la función tabular sea *par*; presenta un segundo orden de interpolación y un orden de error de $O(h^4)$.

1.3. Tercer orden de interpolación

Si la ecuación (5) se limita la fórmula a la tercer diferencia, es decir, a un tercer orden de interpolación.

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12} \right) \Delta^3 y_0 \right] \quad (10)$$

De nuevo se presenta la situación en que al considerar a la tercer diferencia se utiliza a los puntos (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) . De nuevo deberán ajustarse los límites de la integral parcial y de nuevo hacer la suma de ellas para abarcar todo el intervalo $[x_0, x_n]$. Al integrar parcialmente en tres puntos se tiene como condición que n sea *múltiplo de tres* (figura 4).

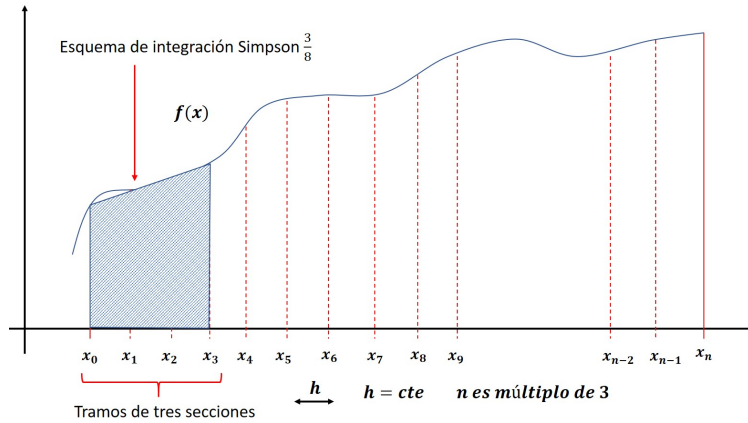


Figura 4: Tramos de tres secciones

En el ajuste de la ecuación (10), si se integra del punto (x_0, y_0) al (x_3, y_3) implica que $n = 3$. Ajustando la ecuación y sustituyendo el valor de la diferencia:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = h \left[3y_0 + \frac{9}{2} \Delta y_0 + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{81}{24} - \frac{27}{18} + \frac{9}{6} \right) \Delta^3 y_0 \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3]$$

Recorriendo los intervalos de integración:

$$\int_{x_3}^{x_6} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6]$$

$$\int_{x_6}^{x_9} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_6 + 3y_7 + 3y_8 + y_9]$$

$\vdots$

$$\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

Sumando las integrales para cada intervalo parcial:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3 + y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6 + \dots + y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$$

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \frac{3h}{8} \left[y_0 + y_n + 2 \sum \left(\begin{matrix} \text{ordenadas de orden} \\ \text{múltiplo de tres} \end{matrix} \right) + 3 \sum \left(\begin{matrix} \text{resto de} \\ \text{ordenadas} \end{matrix} \right) \right] \quad (11)$$

La ecuación (11) se conoce como *Fórmula de integración de Simpson $\frac{3}{8}$* que tiene como condición que el número n de puntos que conforman la función tabular sea *múltiplo de tres*; representa un tercer orden de interpolación y un orden de error de $O(h^5)$.

Consideraciones generales

- Resulta muy importante determinar claramente el valor de n que representa el número de pares de puntos que forman la función tabular. Si se observan las consideraciones iniciales de estos desarrollos, el primer punto de la función tabular es (x_0, y_0) y el último es (x_n, y_n) . Este valor de n deberá ser *par* para aplicar *Simpson $\frac{1}{3}$* o *múltiplo de tres* para *Simpson $\frac{3}{8}$* o de cualquier valor para la fórmula trapezoidal.
- Cuando se hace referencia a *ordenadas de orden par* o términos similares no se refiere al valor en sí mismo de la ordenada, sino de su posición en la función tabular. Por lo anterior, es muy pertinente numerar las ordenadas.
- En el uso de las ordenadas en cualquiera de las fórmulas es necesario recalcar que ninguna ordenada podrá utilizarse más de una vez en la misma fórmula.
- La notación convencional para la regla del trapecio es: A_T .
- La notación convencional para la fórmula de *Simpson $\frac{1}{3}$* es: $A_{\frac{1}{3}}$.

- La notación convencional para la fórmula de *Simpson* $_{\frac{3}{8}}$ es: $A_{\frac{3}{8}}$.
- Atendiendo el orden del error de cada fórmula, en el ánimo de reducirlo, deberá priorizarse su uso en este orden: $A_{\frac{3}{8}}$, $A_{\frac{1}{3}}$ y al último A_T .
- En el supuesto de que una función tabular posea un número n que no sea ni par ni múltiplo de tres pueden utilizarse las fórmulas en combinación siguiendo un orden que contemple las prioridades citadas, haciendo hincapié en que los intervalos de integración de las fórmulas deben ser continuos, es decir, no se debe interrumpir el intervalo de integración. Se propone evitar el uso de A_T a menos que sea indispensable.

1.4. Ejemplo de aplicación

1. El cuadro 1 muestra el desplazamiento de un móvil que parte del reposo; sus observaciones son la velocidad del móvil en distintos instantes. Calcule el desplazamiento del móvil en cada uno de los instantes citados en la tabla.

Cuadro 1: Desplazamiento de un móvil

$t [s]$	$\vec{V} [\frac{m}{s}]$
0	0
60	0.0824
120	0.2474
180	0.6502
240	1.3851
300	3.2229

En forma general, el desplazamiento S de un móvil se obtiene por la ecuación:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{V} dt \quad (12)$$

Por otra parte, en la selección de los puntos de la función tabular se sugiere numerarlos para evitar cualquier error involuntario en su uso, iniciando en 0 y concluyendo en n .

Cuadro 2: Numeración de los puntos

i	$t [s]$	$\vec{V} [\frac{m}{s}]$
0	0	0
1	60	0.0824
2	120	0.2474
3	180	0.6502
4	240	1.3851
5	300	3.2229

- Desplazamiento a los 60 s: Por tratarse de el área entre dos puntos sólo puede utilizarse A_T :

$$\vec{S}_{t=60s} = \int_0^{60} \vec{V} dt = \frac{h}{2} [y_0 + y_1]$$

$$\vec{S}_{t=60s} = \int_0^{60} \vec{V} dt = \frac{60}{2} [0 + 0.0824] = 2.472 m$$

- Desplazamiento a los 120 s: Dado que la integración se hace desde x_0 a x_2 entonces $n = 2$ y puede utilizarse $A_{\frac{1}{3}}$:

$$\vec{S}_{t=120s} = \int_0^{120} f(x) dx = \frac{60}{3} [y_0 + y_2 + 2(0) + 4y_1]$$

$$\vec{S}_{t=120s} = \int_0^{120} f(x) dx = \frac{60}{3} [0 + 0.2747 + 2(0) + 4(0.0824)] = 12.086 m$$

- Desplazamiento a los 180 s: dado que la integración se hace desde x_0 a x_3 entonces $n = 3$ y puede utilizarse $A_{\frac{3}{8}}$:

$$\vec{S}_{t=180s} = \int_0^{180} f(x) dx = \frac{3h}{8} [y_0 + y_3 + 2(0) + 3(y_1 + y_2)]$$

$$\vec{S}_{t=180s} = \int_0^{180} f(x) dx = \frac{3 \cdot 60}{8} [0 + 0.6502 + 2(0) + 3(0.0824 + 0.2747)] = 38.7338 m$$

- Desplazamiento a los 240 s: Dado que la integración se hace desde x_0 a x_4 entonces $n = 4$ y puede utilizarse $A_{\frac{1}{3}}$:

$$\vec{S}_{t=240s} = \int_0^{240} f(x) dx = \frac{60}{3} [y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)]$$

$$\vec{S}_{t=240s} = \int_0^{240} f(x) dx = \frac{60}{3} [0 + 1.3851 + 2(0.2747) + 4(0.0824 + 0.6502)] = 97.298 m$$

- Desplazamiento a los 300 s: Dado que la integración se hace desde x_0 a x_5 entonces $n = 5$. Se propone hacer dos integrales parciales y después la suma de ambas: de x_0 a x_3 utilizando $A_{\frac{3}{8}}$ y de x_3 a x_5 utilizando $A_{\frac{1}{3}}$.

$$\vec{S}_{t=300s} = \int_0^{180} f(x) dx + \int_{180}^{300} f(x) dx$$

La primera integral ya fue calculada y su valor fue $\vec{S}_{t=180s} = 38.7338 m$. La segunda integral se calcula como:

$$\int_{180}^{300} f(x) dx = \frac{60}{3} [y_3 + y_4 + 2(0) + 4y_5]$$

Es pertinente comentar que en este intervalo la ordenada y_0 de la fórmula equivale a la ordenada y_3 de la tabla, y_1 a y_4 y y_n a y_5

$$\int_{180}^{300} f(x) dx = \frac{60}{3} [0.6502 + 3.2229 + 2(0) + 4(1.3851)] = 188.2700 m$$

Sumando los resultados parciales

$$\vec{S}_{t=300s} = \int_0^{180} f(x) dx + \int_{180}^{300} f(x) dx = 38.7338 + 188.27 = 217.0038 m$$

El resultado total se expresa también como función tabular:

Cuadro 3: Resultado

$t [s]$	$\vec{S} [m]$
0	0
60	12.0860
120	38.7338
180	97.2980
240	188.2700
300	217.0038

2. Calcular numéricamente el valor de la integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dy dx$$

Para resolver esta integral se procede de manera similar que cuando se utiliza la integración analítica: primero se deberá integrar con respecto a una variable dejando a la otra constante y después integrar a esta última. La solución numérica consiste en convertir a la función por integrar en una función tabular equiespaciada con un n equiespaciado; para motivos de simplicidad en la solución se propone un $h = 0.1$ lo que origina $n = 10$.

Integrando con respecto a y de acuerdo al cuadro 4:

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0.1}{3} [x^2 + (1.00 + x^2) + 4[(0.01 + x^2) + (0.09 + x^2) + (0.25 + x^2) + (0.49 + x^2) + (0.81 + x^2)] + 2[(0.04 + x^2) + 0.16 + x^2) + (0.36 + x^2) + (0.64 + x^2)] = 0.33333 + y^2$$

Integrando con respecto a x de acuerdo al cuadro 5:

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0.1}{3} [0.33333 + 1.33333 + 4[0.34333 + 0.42333 + 0.58333 + 0.82333 + 1.14333] + 2[0.37333 + 0.49333 + 0.69333 + 0.97333]] = 0.66666$$

2. Cuadratura Gaussiana

Los esquemas de integración basados en polinomios interpolantes están fundamentados en funciones tabulares con espaciado constante cuyo error depende justo del tamaño de h ; cuando el paso es

Cuadro 4: Integración con respecto a y

Y	$f(x, y)$
0.0	$0.00 + x^2$
0.1	$0.01 + x^2$
0.2	$0.04 + x^2$
0.3	$0.09 + x^2$
0.4	$0.16 + x^2$
0.5	$0.25 + x^2$
0.6	$0.36 + x^2$
0.7	$0.49 + x^2$
0.8	$0.64 + x^2$
0.9	$0.81 + x^2$
1.0	$1.00 + x^2$

Cuadro 5: Integración con respecto a x

X	$f(x, y)$
0.0	0.00000
0.1	0.34333
0.2	0.37333
0.3	0.42333
0.4	0.49333
0.5	0.58333
0.6	0.69333
0.7	0.82333
0.8	0.97333
0.9	1.14333
1.0	1.33333

lo más pequeño posible, el error se minimiza. La Cuadratura Gaussiana es un esquema que permite integrar una función analítica sin utilizar ningún paso. Se parte de un esquema de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \quad (13)$$

Donde:

- W_i son coeficientes arbitrarios
- $x_i \in [a, b]$

Este esquema implica que deben elegirse $2n$ parámetros para resolver la integral; estos $2n$ parámetros representan un polinomio de grado máximo $2n - 1$.

Para el caso más sencillo, con $n = 2$, se hará una simplificación que se corregirá más adelante y que consiste en tomar como intervalo de integración $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^2 W_i f(x_i) = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) \quad (14)$$

La ecuación (14) corresponde a la integración de un polinomio de grado máximo $2n - 1 = 3$. Los posibles polinomios de grado tres son:

1. $f(x) = 1$

$$\int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2 \quad (15)$$

2. $f(x) = x$

$$\int_{-1}^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (16)$$

3. $f(x) = x^2$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \quad (17)$$

4. $f(x) = x^3$

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right) = 0 \quad (18)$$

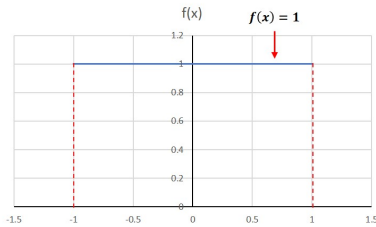


Figura 5: $f(x) = 1$

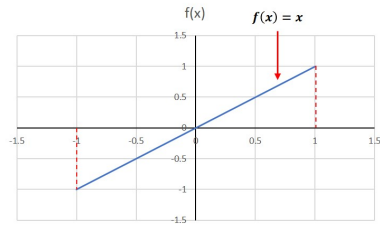


Figura 6: $f(x) = x$

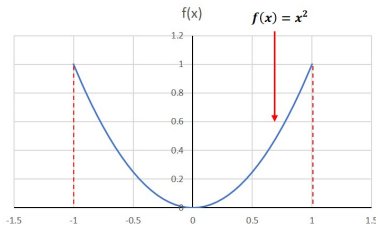


Figura 7: $f(x) = x^2$

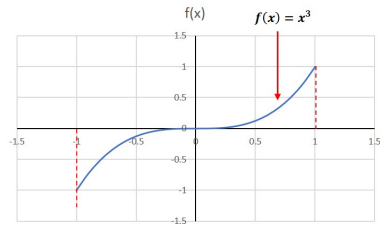


Figura 8: $f(x) = x^3$

Resolviendo (14) para cada uno de los cuatro casos:

$$\text{Para } f(x) = x^3 \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = W_1 x_1^3 + W_2 x_2^3 = 0$$

$$\text{Para } f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^1 x^2 dx = W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Para } f(x) = x \quad \int_{-1}^1 x dx = W_1 x_1 + W_2 x_2 = 0$$

$$\text{Para } f(x) = 1 \quad \int_{-1}^1 dx = W_1 + W_2 = 2$$

Los resultados conforman un sistema de cuatro ecuaciones:

$$W_1 x_1^3 + W_2 x_2^3 = 0 \quad (19)$$

$$W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \quad (20)$$

$$W_1 x_1 + W_2 x_2 = 0 \quad (21)$$

$$W_1 + W_2 = 2 \quad (22)$$

Multiplicando (21) por x_1^2 y restando (19):

$$x_1^2(W_1 x_1 + W_2 x_2) = 0$$

$$W_1 x_1^3 + W_2 x_1^2 x_2 = 0$$

$$W_1 x_1^3 + W_2 x_1^2 x_2 - (W_1 x_1^3 + W_2 x_2^3) = 0$$

$$W_2 x_1^2 x_2 - W_2 x_2^3 = 0$$

$$W_2(x_1^2 x_2 - x_2^3) = 0$$

$$W_2 x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$(W_2)(x_2)(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \quad (23)$$

La ecuación (23) se satisface si:

1. $W_2 = 0$
2. $x_2 = 0$
3. $x_2 = x_1$
4. $x_2 = -x_1$

El número 4 es el único que proporciona un resultado no trivial. Sustituyéndolo en (21):

$$\begin{aligned}
 W_1x_1 + W_2x_2 &= 0 \\
 W_1(-x_2) + W_2(x_2) &= 0 \\
 x_2(-W_1 + W_2) &= 0 \\
 -W_1 + W_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{24}$$

Resolviendo (24) con (22) como ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}
 -W_1 + W_2 &= 0 \\
 W_1 + W_2 &= 2
 \end{aligned}$$

Cuyo resultado es:

$$W_1 = 1 \quad W_2 = 1 \tag{25}$$

Retomando la solución 4 de la ecuación (23) y este último resultado (25), se sustituyen en la ecuación (20):

$$\begin{aligned}
 W_1(-x_2)^2 + W_2(x_2)^2 &= \frac{2}{3} \\
 x_2^2(W_1 + W_2) &= \frac{2}{3} \\
 2x_2^2 &= \frac{2}{3} \\
 x_2^2 &= \frac{1}{3} \\
 x_2 &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0.5773
 \end{aligned}$$

En resumen:

$$\begin{aligned}
 W_1 = 1 \quad x_1 &= -0.5773 \\
 W_2 = 1 \quad x_2 &= 0.5773
 \end{aligned} \tag{26}$$

Sustituyendo estos resultados en la solución planteada en la ecuación (14):

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = f(-0.5773) + f(0.5773) \tag{27}$$

Resta generalizar la solución para cualquier intervalo de integración $[a, b]$ a través de una interpolación lineal:

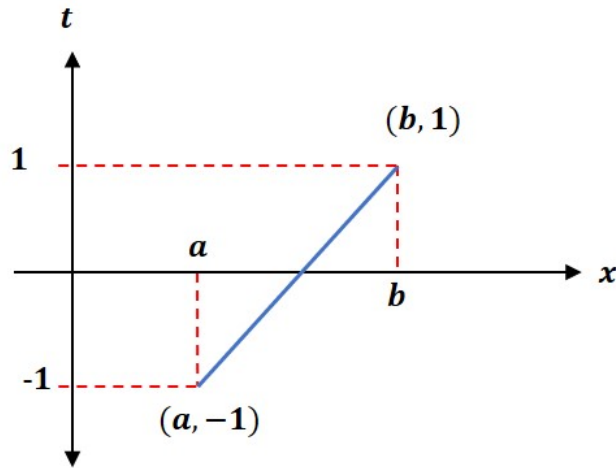


Figura 9: Cambio de límites de integración

Sea:

$$\begin{aligned}
 t - t_1 &= \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\
 t - (-1) &= \frac{1 - (-1)}{b - a}(x - a) \\
 t + 1 &= \frac{2}{b - a}(x - a) \\
 t &= \frac{2x - 2a}{b - a} - 1 \\
 t &= \frac{2x - 2a - b + a}{b - a} \\
 t &= \frac{2x - a - b}{b - a}
 \end{aligned}$$

Despejando x :

$$x = \frac{t(b - a) + a + b}{2} \quad (28)$$

Para la diferencial $\frac{dx}{dt}$ corresponde:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{b - a}{2} \\
 dx &= \frac{b - a}{2} dt \quad (29)
 \end{aligned}$$

El esquema general para la Cuadratura Gaussiana de la ecuación (13) con los resultados (28) y (19) es:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left[\frac{t(b-a) + a + b}{2}\right] \left[\frac{b-a}{2}\right] dt = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n W_i f(x_i) \quad (30)$$

2.1. Ejemplo de aplicación

Resolver:

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx$$

Cambiando los límites de integración: $a = 1$, $b = 1.5$

$$x = \frac{(b-a)t + a + b}{2} = \frac{(1.5-1)t + 1 + 1.5}{2} = \frac{0.5t + 2.5}{2}$$

$$\frac{b-a}{2} = \frac{1.5-1}{2} = \frac{1}{4}$$

Para $n = 2$ el esquema mostrado en la ecuación (27):

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-\left(\frac{0.5t + 2.5}{2}\right)^2} dx = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2)$$

$$\int_1^{1.5} e^{-x^2} dx = \frac{1}{4} \left[(1)e^{-\left(\frac{0.5(-0.5773) + 2.5}{2}\right)^2} + (1)e^{-\left(\frac{0.5(0.5773) + 2.5}{2}\right)^2} \right] = 0.1094003$$

A modo de comparación, a través de los esquemas de integración numérica, el valor de la integral obtenido es: $I = 0.1093643$.

Al final de este documento se muestra una lista extensa de coeficientes y ponderaciones para resolver integrales definidas con la Cuadratura Gaussiana.

3. Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos particularmente en el segundo ejercicio es posible afirmar que cualquier integral puede resolverse por estos métodos, ya sea propia o impropia, con la única condición de que el resultado deseado sea el área bajo la curva.

Esto abre expectativas muy alentadoras para evitar el obstáculo que pueda llegar a representar una integral muy complicada de resolver de forma analítica.

Notas

¹Las figuras y gráficas incluidas en este trabajo fueron elaboradas por los autores

Referencias

- Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- García B., S. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).
- Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).
- Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
- Sandoval, H. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).

Plataforma educativa de Análisis Numérico by Víctor Pinilla is licensed under CC BY-NC-SA 4.0.
To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



Revisión: 4 de enero de 2021

Anexo. Tablas de coeficientes y ponderaciones de la Cuadratura Gaussiana

NUMERICAL ANALYSIS

Table 25.4 ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abcissas= $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials)			Weight Factors= w_i		
$\pm x_i$		w_i	$\pm x_i$		w_i
$n=2$			$n=8$		
0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
$n=3$			0.18343	46424	95650
0.00000	00000	00000	0.52553	24099	16329
0.77459	66692	41483	0.79666	64774	13627
$n=4$			0.96028	98564	97536
0.33998	10435	84856	0.00000	00000	00000
0.86113	63115	94053	0.32425	34234	03809
$n=5$			0.61337	14327	00590
0.00000	00000	00000	0.83603	11073	26636
0.53846	93101	05683	0.96816	02395	07626
0.90617	98459	38664	0.00000	00000	00000
$n=6$			0.33023	93550	01260
0.23861	91860	83197	0.31234	70770	40003
0.66120	93864	66265	0.26061	06964	02935
0.93246	95142	03152	0.18064	81606	94857
$n=7$			0.08127	43883	61574
0.00000	00000	00000	0.14887	43389	81631
0.40584	51513	77397	0.43339	53941	29247
0.74153	11855	99394	0.67940	95682	99024
0.94910	79123	42759	0.86506	33666	88985
$n=8$			0.97390	65285	17172
0.09501	25098	37637	0.12523	34085	11469
0.28160	35507	79258	0.36783	14989	98180
0.45801	67776	57227	0.58731	79542	86617
0.61787	62444	02643	0.76990	26741	94305
0.75540	44083	55003	0.90411	72563	70475
0.86563	12023	87831	0.98156	06342	46719
0.94457	50230	73232	0.00000	00000	00000
0.98940	09349	91649	0.24914	70458	13403
$n=16$			0.23349	25365	38355
0.07652	65211	33497	0.20316	74267	23066
0.22778	58511	41645	0.16007	83285	43346
0.37370	60887	15419	0.10693	93259	95318
0.51086	70019	50827	0.04717	53363	86512
0.63605	36807	26515	0.18945	06104	55068
0.74633	19064	60150	0.18260	34150	44923
0.83911	69718	22218	0.16915	65193	95002
0.91223	44282	51325	0.14959	59888	16576
0.96397	19272	77913	0.12462	89712	55533
0.99312	85991	85094	0.09515	85116	82492
$n=20$			0.06225	35239	38647
0.06405	68928	62605	0.02715	24594	11754
0.19111	88674	73616	0.15275	33871	30725
0.31504	26796	96163	0.14917	29864	72603
0.43379	35076	26045	0.14209	61093	18382
0.54542	14713	88839	0.13168	86384	49176
0.64809	36519	36975	0.11819	45319	61518
0.74012	41915	78554	0.10193	01198	17240
0.82000	19859	73902	0.08327	67415	76704
0.88641	55270	04401	0.06267	20483	34109
0.93827	45520	02732	0.04060	14298	00386
0.97472	85559	71309	0.01761	40071	39152
0.99518	72199	97021	0.12793	81953	46752
$n=24$			0.12583	74563	46828
0.06405	68928	62605	0.12167	04729	27803
0.19111	88674	73616	0.11550	56680	53725
0.31504	26796	96163	0.10744	42701	15965
0.43379	35076	26045	0.09761	86521	04113
0.54542	14713	88839	0.08619	01615	31953
0.64809	36519	36975	0.07334	64814	11080
0.74012	41915	78554	0.05929	85849	15436
0.82000	19859	73902	0.04427	74388	17419
0.88641	55270	04401	0.02853	13886	28933
0.93827	45520	02732	0.01234	12297	99987
0.97472	85559	71309			
0.99518	72199	97021			

Compiled from P. Davis and P. Rabinowitz, Abcissas and weights for Gaussian quadratures of high order, J. Research NBS 56, 35-37, 1956, RP2645; P. Davis and P. Rabinowitz, Additional abscissas and weights for Gaussian quadratures of high order. Values for $n=64, 80$, and 96 , J. Research NBS 60, 613-614, 1958, RP2875; and A. N. Lowan, N. Davids, and A. Levenson, Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48, 739-743, 1942 (with permission).

NUMERICAL ANALYSIS

Table 25.4

ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas = $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials) Weight Factors = w_i

$\pm x_i$	$n=32$				w_i
0.04830	76656	87738	316235		0.09654
0.14447	19615	82796	493485		0.09563
0.23928	73622	52137	074545		0.09384
0.33186	86022	82127	649780		0.09117
0.42135	12761	30635	345364		0.08765
0.50689	99089	32229	390024		0.08331
0.58771	57572	40762	329041		0.07819
0.66304	42669	30215	200975		0.07234
0.73218	21187	40289	680387		0.06582
0.79448	37959	67942	406963		0.05868
0.84936	76137	32569	970134		0.05099
0.89632	11557	66052	123965		0.04283
0.93490	60759	37739	689171		0.03427
0.96476	22555	87506	430774		0.02539
0.98561	15115	45268	335400		0.01627
0.99726	38618	49481	563545		0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701
					0.00701

NUMERICAL ANALYSIS

Table 25.4

ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abscissas = $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials) Weight Factors = w_i

$\pm x_i$	$n=64$				w_i
0.02435	02926	63424	432509		0.04869
0.07299	31217	87799	039450		0.04857
0.12146	28192	96120	554470		0.04834
0.16964	44204	23992	818037		0.04799
0.21742	36437	40007	084150		0.04754
0.26468	71622	08767	416374		0.04696
0.31132	28719	90210	956158		0.04628
0.35722	01583	37668	115950		0.04549
0.40227	01579	63991	603696		0.04459
0.44636	60172	53464	087985		0.04358
0.48940	31457	07052	957479		0.04247
0.53127	94640	19894	545658		0.04126
0.57189	56462	02634	034284		0.03995
0.61115	53551	72393	250249		0.03855
0.64896	54712	54657	339858		0.03705
0.68523	63130	54233	242564		0.03547
0.71988	18501	71610	826849		0.03380
0.75281	99072	60531	896612		0.03205
0.78397	23589	43341	407610		0.03023
0.81326	53151	22797	559742		0.02833
0.84062	92962	52580	362752		0.02637
0.86599	93981	54092	819761		0.02435
0.88931	54459	95114	105853		0.02227
0.91052	21370	78502	805756		0.02013
0.92956	91721	31939	575821		0.01795
0.94641	13748	58402	816062		0.01572
0.96100	87996	52053	718919		0.01346
0.97332	68277	89910	963742		0.01116
0.98333	62538	84625	956931		0.00884
0.99101	33714	76744	320739		0.00650
0.99634	01167	71955	279347		0.00414
0.99930	50417	35772	139457		0.00178
$n=80$					
0.01951	13832	56793	997654		0.03901
0.05850	44371	52420	668629		0.03895
0.09740	83984	41584	599063		0.03883
0.13616	40228	09143	886559		0.03866
0.17471	22918	32646	812559		0.03842
0.21299	45028	57666	132572		0.03812
0.25095	23583	92272	120493		0.03777
0.28852	80548	84511	853109		0.03736
0.32566	43707	47701	914619		0.03689
0.36230	47534	99487	315619		0.03637
0.39839	34058	81969	227024		0.03579
0.43387	53708	31756	093062		0.03516
0.46869	66151	70544	477036		0.03447
0.50280	41118	88784	987594		0.03373
0.53614	59208	97131	932020		0.03294
0.56867	12681	22709	784725		0.03210
0.60033	06228	29751	743155		0.03121
0.63107	57730	46871	966248		0.03027
0.66085	98989	86119	801736		0.02928
0.68963	76443	42027	600771		0.02825
0.71736	51853	62099	880254		0.02718
0.74400	02975	83597	272317		0.02607
0.76950	24201	35041	373866		0.02492
0.79383	27175	04605	449949		0.02373
0.81695	41386	81463	470371		0.02250
0.83883	14735	80255	275617		0.02124
0.85943	14066	63111	096977		0.01995
0.87872	25676	78213	828704		0.01862
0.89667	55794	38770	683194		0.01727
0.91326	31025	71757	654165		0.01589
0.92845	98771	72445	795953		0.01449
0.94224	27613	09872	674752		0.01306
0.95459	07663	43634	905493		0.01162
0.96548	50890	43799	251452		0.01016
0.97490	91405	85727	793386		0.00868
0.98284	85727	38629	070418		0.00719
0.98929	13024	99755	531027		0.00569
0.99422	75409	65688	277892		0.00418
0.99764	98643	98237	688900		0.00266
0.99955	38226	51630	629880		0.00114
0.03901	78136	56306	654811		0.03895
0.03895	83959	62769	531199		0.03883
0.03883	96510	59051	968932		0.03866
0.03866	17597	74076	463327		0.03842
0.03842	49930	06959	423185		0.03812
0.03812	97113	14477	638344		0.03777
0.03777	63643	62001	397490		0.03736
0.03736	54902	38730	490027		0.03689
0.03689	77146	38276	008839		0.03637
0.03637	37499	05835	978044		0.03579
0.03579	43939	53416	054603		0.03516
0.03516	05290	44747	593496		0.03447
0.03447	31204	51753	928794		0.03373
0.03373	32149	84611	522817		0.03294
0.03294	19393	97645	401383		0.03210
0.03210	04986	73487	773148		0.03121
0.03121	01741	88114	701642		0.03027
0.03027	23217	59557	980661		0.02928
0.02928	83695	83267	847693		0.02825
0.02825	98160	57276	862397		0.02718
0.02718	82275	00486	380674		0.02607
0.02607	52357	67565	117903		0.02492
0.02492	25357	64115	491105		0.02373
0.02373	18828	65930	101293		0.02250
0.02250	50902	46332	461926		0.02124
0.02124	40261	15782	006389		0.01995
0.01995	06108	78141	998929		0.01862
0.01862	68142	08299	031429		0.01727
0.01727	46520	56269	306359		0.01589
0.01589	61835	83725	688045		0.01449
0.01449	35080	40509	076117		0.01306
0.01306	87615	92401	339294		0.01162
0.01162	41141	20797	826916		0.01016
0.01016	17660	41103	064521		0.00868
0.00868	39452	69260	858426		0.00719
0.00719	29047	68117	312753		0.00569
0.00569	09224	51403	198649		0.00418
0.00418	03131	24694	895237		0.00266
0.00266	35335	89512	681669		0.00114
0.00114	49500	03186	941534		

NUMERICAL ANALYSIS

Table 25.4
ABSCISSAS AND WEIGHT FACTORS FOR GAUSSIAN INTEGRATION

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

Abcissas= $\pm x_i$ (Zeros of Legendre Polynomials)				Weight Factors= w_i			
$\pm x_i$				w_i			
$n = 96$							
0.01627	67448	49602	969579	0.03255	06144	92363	166242
0.04881	29851	36049	731112	0.03251	61187	13868	835987
0.08129	74954	64425	558994	0.03244	71637	14064	269364
0.11369	58501	10665	920911	0.03234	38225	68575	928429
0.14597	37146	54896	941989	0.03220	62047	94030	250669
0.17809	68823	67618	602759	0.03203	44562	31992	663218
0.21003	13104	60567	203603	0.03182	87588	94411	006535
0.24174	31561	63840	012328	0.03158	93307	70727	168558
0.27319	88125	91049	141487	0.03131	64255	96861	355813
0.30436	49443	54496	353024	0.03101	03325	86313	837423
0.33520	85228	92625	422616	0.03067	13761	23669	149014
0.36569	68614	72313	635031	0.03029	99154	20827	593794
0.39579	76498	28908	603285	0.02989	63441	36328	385984
0.42547	89884	07300	545365	0.02946	10899	58167	905970
0.45470	94221	67743	008636	0.02899	46141	50555	236543
0.48345	79739	20596	359768	0.02849	74110	65085	385646
0.51169	41771	54667	673586	0.02797	00076	16848	334440
0.53938	81083	24357	436227	0.02741	29627	26029	242823
0.56651	04185	61397	168404	0.02682	68667	25591	762198
0.59303	23647	77572	080684	0.02621	23407	35672	413913
0.61892	58401	25468	570386	0.02557	00360	05349	361499
0.64416	34037	84967	106798	0.02490	06332	22483	610288
0.66871	83100	43916	153953	0.02420	48417	92364	691282
0.69256	45366	42171	561344	0.02348	33990	85926	219842
0.71567	68123	48967	626225	0.02273	70696	58329	374001
0.73803	06437	44400	132851	0.02196	66444	38744	349195
0.75960	23411	76647	498703	0.02117	29398	92191	298988
0.78036	90438	67433	217604	0.02035	67971	54333	324595
0.80030	87441	39140	817229	0.01951	90811	40145	022410
0.81940	03107	37931	675539	0.01866	06796	27411	467385
0.83762	35112	28187	121494	0.01778	25023	16045	260838
0.85495	90334	34601	455463	0.01688	54798	64245	172450
0.87138	85059	09296	502874	0.01597	05629	02562	291381
0.88689	45174	02420	416057	0.01503	87210	26994	938006
0.90146	06353	15852	341319	0.01409	09417	72314	860916
0.91507	14231	20898	074206	0.01312	82295	66961	572637
0.92771	24567	22308	690965	0.01215	16046	71088	319635
0.93937	03397	52755	216932	0.01116	21020	99838	498591
0.95003	27177	84437	635756	0.01016	07705	35008	415758
0.95968	82914	48742	539300	0.00914	86712	30783	386633
0.96832	68284	63264	212174	0.00812	68769	25698	759217
0.97593	91745	85136	466453	0.00709	64707	91153	865269
0.98251	72635	63014	677447	0.00605	85455	04235	961683
0.98805	41263	29623	799481	0.00501	42027	42927	517693
0.99254	39003	23762	624572	0.00396	45543	38444	686674
0.99598	18429	87209	290650	0.00291	07318	17934	946408
0.99836	43758	63181	677724	0.00185	39607	88946	921732
0.99968	95038	83230	766828	0.00079	67920	65552	012429