

Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2021

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105117.

Son varios los métodos numéricos que ofrecen la solución de ecuaciones diferenciales. En particular, los métodos *paso a paso* se fundamentan en los polinomios interpolantes que modelan funciones tabulares; en consecuencia será necesario disponer de un intervalo de solución de la variable independiente cuyo primer punto debe coincidir con la condición inicial. El número de puntos deseado deberá determinarse con base en los resultados esperados y en todo caso deberá conservarse un paso h constante. Asimismo, el polinomio de Taylor ofrece una solución analítica de la ecuación diferencial. Estos métodos resuelven únicamente ecuaciones diferenciales de primer orden, pero esto no implica que puedan utilizarse como un proceso para resolver otras de mayor orden¹.

Palabras clave: Métodos paso a paso, métodos predictivos-correctivos, Runge-Kutta.

Una ecuación que contiene a las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se denomina *ecuación diferencial*.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Estas se clasifican de acuerdo a cuatro propiedades: tipo, orden, linealidad y grado.

- **Tipo.** Si una ecuación contiene sólo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente, se le denomina *ecuación diferencial ordinaria*.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} + x$$

$$(x + y)dx - 4ydy = 0$$

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Por otra parte, si la ecuación incluye las derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, estas se conocen como *ecuaciones en derivadas parciales*.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

- **Orden.** El orden que pertenece a la mayor derivada en la ecuación diferencial es denominado *orden de la ecuación*.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = -y + x$$

Esta es una ecuación de segundo orden, que corresponde al de mayor derivada.

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Esta ecuación en derivadas parciales es de cuarto orden. En principio, cuando se hace referencia a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n , a menudo se representan:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

- **Linealidad.** Se caracterizan por cumplir con dos condiciones:

1. La variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas a la primera potencia, es decir, son de grado 1
2. Cada coeficiente depende únicamente de la variable independiente

$$x dy + y dx = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Estas últimas tres ecuaciones son lineales porque cumplen con las dos condiciones ya mencionadas.

$$y y'' - 2y' = x$$

Esta ecuación tiene como coeficiente a y , que no depende únicamente de la variable independiente, por lo que no es lineal.

$$\frac{d^3y}{dx} + y^2 = 0$$

La variable dependiente y está elevada al cuadrado (no es 1), por lo que tampoco es lineal.

- **Grado.** Se dice que si una ecuación diferencial de orden n puede expresarse como un polinomio de grado k en la n -ésima derivada, entonces es de grado k siempre y cuando k sea finito.

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \sin x$$

Esta ecuación se expresa como un polinomio de grado 3 en la derivada de primer orden, que es la mayor. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y tercer grado.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left[\frac{dy}{dx} \right]^3 = -y + x$$

El orden de esta ecuación es 2 y la correspondiente derivada está *elevada* a la primer potencia, por lo que es de segundo orden y de primer grado. En el caso en que la ecuación diferencial no pueda ser expresada como un polinomio de grado k en su derivada de mayor orden, se dice que su grado no está *definido*.

$$e^{y''} - xy' + y = 0$$

Solución de una ecuación diferencial

La solución de una ecuación diferencial es una función $y = f(x)$ que posee al menos n derivadas y satisface la ecuación:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Una ecuación diferencial tiene más de una solución, incluso podría decirse que tiene un número infinito de soluciones. Al igual que en el cálculo, cuando se resuelve una integral indefinida se obtiene una constante de integración c . En forma análoga, al resolver una ecuación diferencial de primer orden de la forma $f(x, y, y') = 0$ se obtendrá una familia de curvas $G(x, y, c) = 0$ que contiene un parámetro arbitrario c .

En consecuencia, al resolver una ecuación diferencial de orden n de la forma $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ se obtendrá una familia n -paramétrica de soluciones $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$.

A la solución n -paramétrica se le denomina *solución general* (figura 1), mientras que a la solución que no contiene parámetros arbitrarios se le llama *solución particular* (figura 2).

La solución particular de una ecuación diferencial obedece a dos tipos de condiciones:

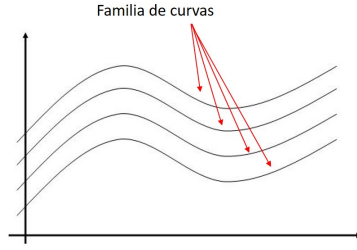


Figura 1: Solución general

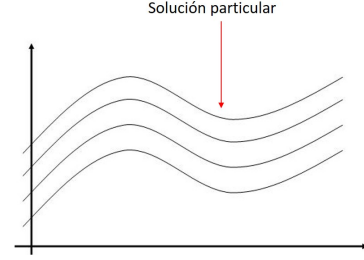


Figura 2: Solución particular

- Condiciones iniciales. Un problema de valores iniciales está regido por una ecuación diferencial de orden n y $n - 1$ condiciones independientes todas ellas válidas en el mismo valor inicial de la variable independiente, como se observa en la figura 3.
- Valores en la frontera. Un problema de valores en la frontera se establece por condiciones que prevalecen en dos puntos de la variable independiente que normalmente establecen un intervalo de solución de la ecuación diferencial, como se observa en la figura 4.

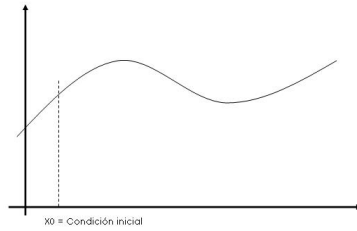


Figura 3: Solución general

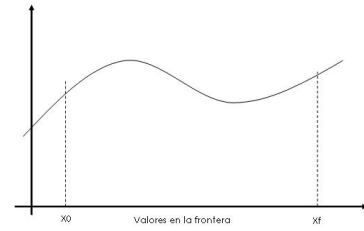


Figura 4: Solución particular

Los procedimientos numéricos que se desarrollan en este texto, arrojan la solución particular de la ecuación diferencial.

1. Método de la serie de Taylor

El desarrollo por serie de Taylor corresponde a la siguiente expresión:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \dots \quad (1)$$

Al utilizar esta expresión se comete un error debido a que se trata de una serie infinita; adicionalmente, para que se considere correcto su uso debe evaluarse en un entorno muy cercano a x_0 ; el resultado pierde validez si la evaluación se aleja de este punto.

Su uso consiste en *construir* a la solución de la ecuación diferencial $y(x)$ a partir de la ecuación diferencial, en este caso, de primer orden $y'(x) = f(x, y)$ y su condición inicial $y(x_0)$. De hecho, si se contrasta la ecuación (1) y estas últimas dos definiciones se observa que se conocen los dos primeros sumandos de la serie de Taylor. Sólo es necesario derivar a la ecuación diferencial tantas

veces como términos se desee que conformen al polinomio solución. El valor x_0 en el que se evalúa a la serie corresponde a la condición inicial de la ecuación diferencial.

Este método estrictamente hablando no corresponde a un método numérico ya que no es necesario realizar iteraciones y proporciona un polinomio; no obstante se considera como tal por las precisiones que deben tomarse en cuenta por los aspectos de precisión debidos al truncamiento de una serie infinita.

Una vez más, procediendo a la solución de $y' = 2 - \frac{y}{x}$ con condición inicial $y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1.5]$ con un paso $h = 0.1$ con la serie de términos hasta $n = 3$.

Conforme a (1):

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''(x_0)$$

El punto x_0 corresponde a la condición inicial, es decir: $x_0 = 1$. Construyendo el polinomio de Taylor:

$$y(x_0) = y(1) = 0$$

$$(x - x_0) = x - 1$$

$$y'(x_0) = 2 - \frac{y}{x} \Rightarrow y'(1) = 2$$

$$(x - x_0)^2 = (x - 1)^2$$

$$y''(x_0) = -y' \Rightarrow y''(1) = -2$$

$$(x - x_0)^3 = (x - 1)^3$$

$$y'''(x_0) = -y'' \Rightarrow y'''(1) = 2$$

Debe hacerse notar que para obtener y'' se deriva con respecto a x a la ecuación diferencial $y' = 2 - \frac{y}{x}$, repitiéndose el concepto para encontrar derivadas sucesivas. Sustituyendo estos resultados en el polinomio de Taylor para $n = 3$ se obtiene la solución:

$$y(x) = 0 + (x - 1)(2) + \frac{(x - 1)^2}{2!}(-2) + \frac{(x - 1)^3}{3!}(2)$$

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - \frac{10}{3}$$

Esta solución no contiene parámetros arbitrarios, por lo que corresponde a una solución particular de la ecuación diferencial.

2. Métodos predictivo-correctivos: Euler y Euler-Gauss

Los métodos predictivos correctivos se basan en el polinomio interpolante de Newton-Gregory, mismo que representa a una función tabular con variable independiente equiespaciada. Se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, lineales o no y de cualquier grado. Estos métodos también son conocidos como *de pasos o paso a paso* ya que resuelven a la ecuación

en intervalos entre dos pares de puntos y repitiendo esta solución en todos los puntos que conforman a la función tabular.

El planteamiento inicial para resolver una ecuación es el siguiente:

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

La solución se obtiene integrando ambos miembros de la ecuación entre dos puntos consecutivos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \quad (3)$$

De la que se obtiene:

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) - y(x_i) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \end{aligned} \quad (4)$$

La integral incluida en el segundo miembro de la ecuación puede resolverse a partir del polinomio interpolante de Newton-Gregory que tiene la siguiente forma:

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \quad (5)$$

A la ecuación (5) se le da el mismo tratamiento necesario para crear esquemas de integración numérica, en este caso se le integra a partir de un proceso de cambio de variable del cual resulta:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = h \left[ny_0 + \frac{n^2}{2}\Delta y_0 + \left(\frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left(\frac{n^4}{24} - \frac{3n^3}{18} - \frac{2n^2}{12} \right) \Delta^3 y_0 + \dots \right] \quad (6)$$

Es necesario hacer algunas precisiones en esta ecuación. Toda vez que se trata de integrar entre dos puntos consecutivos x_i y x_{i+1} , éstos deberán considerarse como límites de la integral y en consecuencia entre ambos sólo existe un paso h por lo que $n = 1$. Por otra parte debe elegirse el orden de interpolación deseado; en este caso, se elige un primer orden de interpolación, es decir, truncar al polinomio 6 en la primera diferencia. Como se estudió en su momento, esto originará un orden de error de $O(h^2)$.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = h \left[y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 \right] \quad (7)$$

Sustituyendo los valores de las diferencias:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = h \left[y_0 + \frac{1}{2}(y_1 - y_0) \right] \quad (8)$$

Una última precisión: En la ecuación (8) se utiliza una notación que emana de las tablas de diferencias en donde al valor de $f(x_i)$ se le denota como y_i . En todo caso, $y_i = f(x_i)$. Dado lo anterior,

es pertinente unificar la notación con la mostrada en la ecuación (4). Cambiando la notación y sustituyendo (8) en (4):

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \left[f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}((x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_i, y_i)) \right] \quad (9)$$

Esta ecuación es la que da origen a los métodos predictivos-correctivos.

Inicialmente, se propone que la ecuación (9) sea de nuevo truncada (por un motivo que más adelante será evidente) hasta el uso de $f(x_i)$. De esto resulta:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h f(x_i)$$

O en una notación más práctica:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i) \quad (10)$$

A la ecuación (10) se le denomina *Método de Euler* para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales en un intervalo equiespaciado. Resulta obvia la percepción al gran orden de error que arroja el uso de este método. No obstante, esta ecuación tiene una razón de ser. Retomando la ecuación (9) sin truncar, haciendo las simplificaciones del caso:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \quad (11)$$

Esta última ecuación, de primera mano, resulta imposible de resolver, toda vez que el miembro izquierdo está presente en el miembro derecho. Dado esto, conforme a la filosofía de los métodos numéricos se propone un valor inicial de $y(x_{i+1})$ obtenido a partir del método de Euler en la ecuación (10) que se denominará *valor predictor*; este valor se utilizará en la ecuación (11) con la cual el valor *predictor* será *corregido*. De aquí el nombre de método predictor-corrector. Denotando esta propuesta se obtienen dos ecuaciones que en conjunto constituyen el *Método de Euler-Gauss*¹ o bien, *Método predictor-corrector*.

$$\begin{aligned} y(x_{i+1p}) &= y(x_i) + h f(x_i) \\ y(x_{i+1c}) &= y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1p})] \end{aligned}$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots$

De nuevo, en una notación más práctica:

$$y(x_{i+1p}) = y(x_i) + h f(x_i) \quad (12)$$

$$y(x_{i+1c}) = y(x_i) + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1p})] \quad (13)$$

Para $i = 0, 1, 2, \dots$

¹Algunos autores le llaman *Euler modificado*

Ejemplo de aplicación

Resolver la ecuación diferencial de primer orden $xy' + y = 2x$ con condición inicial $y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1.5]$ con un paso $h = 0.1$.

Como primer paso siempre debe despejarse a y' , resultando:

$$y' = 2 - \frac{y}{x}$$

Dado que los métodos numéricos ofrecen la solución particular, ésta se proporciona en forma de función tabular. Como se mencionó en alguna ocasión anterior, se recomienda numerar a las soluciones para minimizar la ocurrencia de errores.

Cuadro 1: Solución en forma tabular

i	X	Y
0	1	0
1	1.1	
2	1.2	
3	1.3	
4	1.4	
5	1.5	

En el cuadro 1 destaca que el punto y_0 corresponde a la condición inicial $y(x_0) = y(1) = 0$.

La ecuación recursiva correspondiente al método de Euler, de acuerdo a la ecuación (10) es:

$$y_{i+1} = y_i + h \left[2 - \frac{y_i}{x_i} \right]$$

Se detalla a continuación la primera iteración para $i = 0$. El resto se obtendrá por medio de la hoja electrónica de cálculo que acompaña a este trabajo.

Si $i = 0$, entonces:

$$y_1 = y_0 + h \left[2 - \frac{y_0}{x_0} \right]$$

$$y_1 = 0 + (0.1) \left[2 - \frac{0}{1} \right] = 0.2$$

La segunda iteración para $i = 1$ es:

$$y_2 = y_1 + h \left[2 - \frac{y_1}{x_1} \right]$$

$$y_2 = 0.2 + (0.1) \left[2 - \frac{0.2}{1.1} \right] = 0.38182$$

Estas iteraciones se repiten hasta que se complete la función tabular. Ubicando el resultado en el cuadro 1 se obtiene el cuadro 2:

Cuadro 2: Resultados en el método de Euler

i	X	Y
0	1	0
1	1.1	0.20000
2	1.2	0.38182
3	1.3	0.55000
4	1.4	0.70769
5	1.5	0.85714

Ahora se aplicará el método Euler-Gauss y se propone el uso de una notación simplificada de la siguiente forma:

$$y(x_{i+1p}) = y_{i+1p}$$

$$y(x_{i+1c}) = y_{i+1c}$$

Las ecuaciones iterativas de acuerdo a (12) y (13) son:

$$y_{i+1p} = y_i + h \left[2 - \frac{y_i}{x_i} \right]$$

$$y_{i+1c} = y_i + \frac{h}{2} \left[2 - \frac{y_i}{x_i} + 2 - \frac{y_{i+1p}}{x_{i+1}} \right]$$

La primera iteración para $i = 0$ se compone ahora de dos ecuaciones:

$$y_{1p} = y_0 + h \left[2 - \frac{y_0}{x_0} \right] = 0 + (0.1) \left[2 - \frac{0}{1} \right] = 0.2$$

$$y_{1c} = y_0 + \frac{h}{2} \left[2 - \frac{y_0}{x_0} + 2 - \frac{y_{1p}}{x_1} \right] = 0 + \frac{0.1}{2} \left[2 - \frac{0}{1} + 2 - \frac{0.2}{1.1} \right] = 0.19091$$

La segunda iteración para $i = 1$ resulta:

$$y_{2p} = y_1 + h \left[2 - \frac{y_1}{x_1} \right] = 0.19091 + (0.1) \left[2 - \frac{0.19091}{1.1} \right] = 0.37355$$

$$y_{2c} = y_1 + \frac{h}{2} \left[2 - \frac{y_1}{x_1} + 2 - \frac{y_{2p}}{x_2} \right] = 0.19091 + \frac{0.1}{2} \left[2 - \frac{0.19091}{1.1} + 2 - \frac{0.37355}{1.2} \right] = 0.36667$$

La solución completa se muestra en el cuadro 3.

3. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos Runge-Kutta son producto de un algoritmo muy eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Lo interesante de ellos es que se pueden obtener varios métodos de diferente aproximación.

Cuadro 3: Solución por Euler-Gauss

i	X	y_p	y_c
0	1		0
1	1.1	0.20000	0.19091
2	1.2	0.37355	0.36667
3	1.3	0.53611	0.53077
4	1.4	0.68994	0.68571
5	1.5	0.83673	0.83333

Se clasifican de acuerdo su *orden*. En general, su obtención no es sencilla, pero se muestran sus generalidades más importantes.

La forma general de la solución de una ecuación diferencial tiene la forma:

$$y_{i+1} = y_n + h\Phi(x_i, y_i) \quad (14)$$

Donde $i = 0, 1, 2, \dots$

Si se observan las ecuaciones iterativas de los métodos de Euler (12) y de Euler-Gauss (13) responden a la forma mostrada en la ecuación (14); de hecho, el método de Euler coincide absolutamente con el método de Runge-Kutta de primer orden.

En general, la ecuación recursiva se escribe como:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + \dots + w_nk_n) \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(x_i, y_i) \\
 k_2 &= hf(x_i + \alpha_1 h, y_i + \beta_{1,1} k_1) \\
 k_3 &= hf(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{2,1} k_1 + \beta_{2,2} k_2) \\
 k_4 &= hf(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{3,1} k_1 + \beta_{3,2} k_2 + \beta_{3,3} k_3) \\
 &\vdots \\
 k_n &= hf(x_i + \alpha_{n-1} h, y_i + \beta_{n-1,1} k_1 + \beta_{n-1,2} k_2 + \dots + \beta_{n-1,n-1} k_{n-1})
 \end{aligned} \quad (16)$$

Donde los coeficientes w_i, α_i y $\beta_{i,i}$ son constantes que se obtienen a partir de una aproximación por el polinomio de Taylor.

El orden del método corresponde a la variable n .

Las ecuaciones del método de Runge-Kutta de segundo orden son:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Donde:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_i, y_i) \\k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1)\end{aligned}\tag{18}$$

De la misma forma, las ecuaciones del método de Runge-Kutta de cuarto orden son:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots\tag{19}$$

Donde:

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_i, y_i) \\k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3)\end{aligned}\tag{20}$$

Ejemplo de aplicación

Retomando la ecuación diferencial de $y' = 2 - \frac{y}{x}$ con condición inicial $y(1) = 0$ en el intervalo $[1, 1.5]$ con un paso $h = 0.1$. por el método de Runge-Kutta de segundo orden. Conforme a (17) y (18) las ecuaciones iterativas son:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \left(2 - \frac{y_i}{x_i}\right) \\k_2 &= h \left[2 - \frac{y_i + k_1}{x_i + h}\right] \\y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

Realizando la primera iteración para $i = 0$:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \left(2 - \frac{y_0}{x_0}\right) \\k_2 &= h \left[2 - \frac{y_0 + k_1}{x_0 + h}\right] \\y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}k_1 &= (0.1) \left(2 - \frac{0}{1}\right) = 0.20000 \\k_2 &= (0.1) \left[2 - \frac{0+0.200000}{1+0.1}\right] = 0.18182 \\y_1 &= 0 + \frac{1}{2}(0.20000 + 0.18182) = 0.19091\end{aligned}$$

La segunda iteración para $i = 1$:

$$\begin{aligned}k_1 &= h \left(2 - \frac{y_1}{x_1}\right) \\k_2 &= h \left[2 - \frac{y_1 + k_1}{x_1 + h}\right] \\y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$k_1 = (0.1) \left(2 - \frac{0.19091}{1.1} \right) = 0.18264$$

$$k_2 = (0.1) \left[2 - \frac{0.19091 + 0.18264}{1.1 + 0.1} \right] = 0.16887$$

$$y_1 = 0.19091 + \frac{1}{2}(0.18264 + 0.16887) = 0.36667$$

La solución completa se muestra en el cuadro 4.

Cuadro 4: Solución por Runge-Kutta 2°orden

i	X	k_1	k_2	y
0	1			0
1	1.1	0.20000	0.18182	0.19091
2	1.2	0.18264	0.16887	0.36667
3	1.3	0.16944	0.15876	0.53077
4	1.4	0.15917	0.15072	0.68571
5	1.5	0.15102	0.14422	0.83333

Utilizando ahora el método de Runge-Kutta de 4° orden. Las ecuaciones recursivas a partir de (19) y (20):

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \left(2 - \frac{y_i}{x_i} \right) \\
 k_2 &= h \left[2 - \frac{y_i + \frac{k_1}{2}}{x_i + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_3 &= h \left[2 - \frac{y_i + \frac{k_2}{2}}{x_i + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_4 &= h \left[2 - \frac{y_i + k_3}{x_i + h} \right] \\
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

La primera iteración para $i = 0$:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \left(2 - \frac{y_0}{x_0} \right) \\
 k_2 &= h \left[2 - \frac{y_0 + \frac{k_1}{2}}{x_0 + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_3 &= h \left[2 - \frac{y_0 + \frac{k_2}{2}}{x_0 + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_4 &= h \left[2 - \frac{y_0 + k_3}{x_0 + h} \right] \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (0.1) \left(2 - \frac{0}{1} \right) = 0.20000 \\
 k_2 &= (0.1) \left[2 - \frac{0 + \frac{0.20000}{2}}{1 + \frac{0.1}{2}} \right] = 0.19048 \\
 k_3 &= h \left[2 - \frac{0 + \frac{0.19048}{2}}{1 + \frac{0.1}{2}} \right] = 0.19093 \\
 k_4 &= h \left[2 - \frac{0 + 0.19093}{1 + 0.1} \right] = 0.18264 \\
 y_1 &= 0 + \frac{1}{6} (0.20000 + 2(0.19048) + 2(0.19093) + 0.18264) = 0.19091
 \end{aligned}$$

La primera iteración para $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= h \left(2 - \frac{y_1}{x_1} \right) \\
 k_2 &= h \left[2 - \frac{y_1 + \frac{k_1}{2}}{x_1 + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_3 &= h \left[2 - \frac{y_1 + \frac{k_2}{2}}{x_1 + \frac{h}{2}} \right] \\
 k_4 &= h \left[2 - \frac{y_1 + k_3}{x_1 + h} \right] \\
 y_2 &= y_1 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (0.1) \left(2 - \frac{0.19091}{1.1} \right) = 0.18264 \\
 k_2 &= (0.1) \left[2 - \frac{0.19091 + \frac{0.18264}{2}}{1.1 + \frac{0.1}{2}} \right] = 0.17546 \\
 k_3 &= (0.1) \left[2 - \frac{0.19091 + \frac{0.17546}{2}}{1.1 + \frac{0.1}{2}} \right] = 0.17577 \\
 k_4 &= (0.1) \left[2 - \frac{0.19091 + 0.17577}{1.1 + 0.1} \right] = 0.16944 \\
 y_2 &= 0.19091 + \frac{1}{6} (0.18264 + 2(0.17546) + 2(0.17577) + 0.16944) = 0.36667
 \end{aligned}$$

La solución completa se muestra en el cuadro 5.

Cuadro 5: Solución por Runge-Kutta 4°orden

i	X	k_1	k_2	k_3	k_4	y
0	1					0.00000
1	1.1	0.20000	0.19048	0.19093	0.18264	0.19091
2	1.2	0.18264	0.17546	0.17577	0.16944	0.36667
3	1.3	0.16944	0.16389	0.16411	0.15917	0.53077
4	1.4	0.15917	0.15479	0.15495	0.15102	0.68571
5	1.5	0.15102	0.14750	0.14762	0.14444	0.83333

4. Comparación entre métodos

Para realizar una comparación objetiva entre todos los resultados obtenidos al momento, se resuelve la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$ con condición inicial $y(1) = 0$ por medios analíticos, resultando $y = x - \frac{1}{x}$. Valuando esta ecuación en el intervalo solución $[1, 1.5]$ con $h = 0.1$ obtenemos una función tabular de la misma naturaleza que las que proporcionan los métodos ya citados. En el caso de la serie de Taylor, el polinomio resultado $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x - \frac{10}{3}$ también es tabulado:

Cuadro 6: Comparativo de soluciones

X	$(solucion_{exacta})$	Euler	$(Euler_{Gauss})$	$(Runge-Kutta_{2orden})$	$(Runge-Kutta_{4orden})$	Taylor
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1.1	0.19091	0.20000	0.19091	0.19091	0.19091	0.19033
1.2	0.36667	0.38182	0.36667	0.36667	0.36667	0.36267
1.3	0.53077	0.55000	0.53077	0.53077	0.53077	0.51900
1.4	0.68571	0.70769	0.68571	0.68571	0.68571	0.66133
1.5	0.83333	0.85714	0.83333	0.83333	0.83333	0.79167

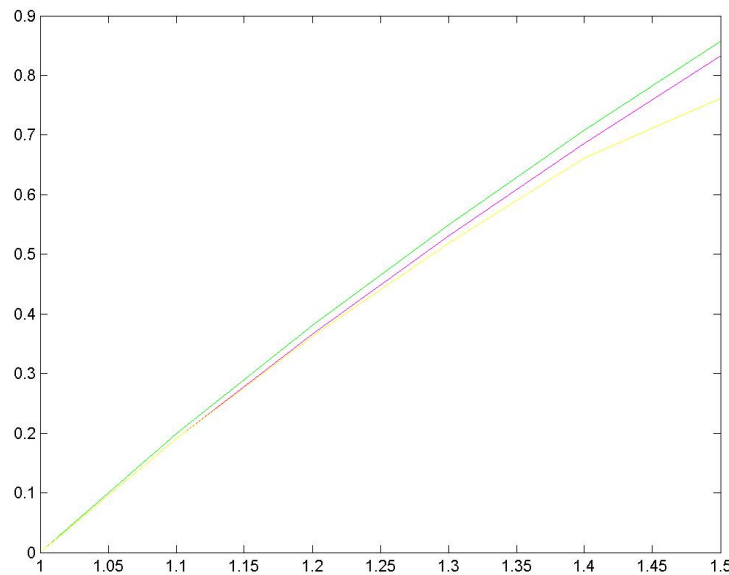


Figura 5: Comparativo entre las soluciones

En la figura 5 se grafican los diversos resultados con el objetivo de comparar visualmente las diferencias en los resultados. En ella se observan sólo tres líneas en lugar de las seis que fueron graficadas. Ocurre que cuatro soluciones son prácticamente idénticas lo que obliga a que se encimen sus líneas: la solución real, Euler-Gauss y Runge-Kutta de 2º y 4º orden. La línea verde corresponde a la solución por Euler y la amarilla a Taylor.

Resultaría muy práctico aumentar la precisión de las cifras utilizadas para buscar una mayor diferenciación en las gráficas, pero definitivamente los resultados serían los mismos. Euler presenta el

mayor error de todos los métodos y Taylor puede mejorarse si se aumenta el número de términos contemplados en su polinomio, considerando que no debe alejarse mucho de su punto x_0 .

5. Conclusiones

Las herramientas numéricas para la solución de ecuaciones diferenciales aportan sin duda alguna una aproximación muy buena en comparación con los resultados obtenidos en forma analítica. Por otra parte, su programación es muy sencilla. Ambas cualidades ha permitido el desarrollo de simulaciones y aplicaciones visuales en sistemas de cómputo que permite la mejor comprensión y solución de problemas físicos.

Notas

¹Las figuras y gráficas incluidas en este trabajo fueron elaboradas por los autores

Referencias

- Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- García B., S. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).
- Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).
- Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
- Sandoval, H. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).

Plataforma educativa de Análisis Numérico by Víctor Pinilla is licensed under CC BY-NC-SA 4.0.
To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



Revisión: 4 de enero de 2021