

Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales

Cortés Rosas Jesús Javier, González Cárdenas Miguel Eduardo
Pinilla Morán Víctor Damián, Salazar Moreno Alfonso
Tovar Pérez Víctor Hugo *

2021

Resumen

Esta publicación pertenece al proyecto *Plataforma educativa para Análisis Numérico*, realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE105117.

En este texto se mostrará el proceso numérico para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Es un tema integrador de los esquemas de derivación surgidos de los polinomios interpolantes de Newton-Gregory aplicados a dos variables independientes y el método de las Diferencias finitas utilizado para resolver ecuaciones diferenciales con valores en la frontera¹.

Palabras clave: Diferencias finitas, esquemas numéricos de derivación parcial, pivoteo.

La mayoría de los fenómenos estudiados o de los problemas a solucionar, tanto en las ciencias físicas como en las ingenierías, se describen o involucran a ecuaciones diferenciales. Esto obedece a la necesidad que siempre se tiene de cuantificar la evolución temporal y espacial de los objetos físicos bajo observación.

Las derivadas parciales son utilizadas cuando en el modelo del fenómeno se requiere analizar el comportamiento de dos (o más) variables independientes, lo que hace que la abstracción sea más completa pero su solución más compleja. Los métodos analíticos suelen ser limitados (como separación de variables), a diferencia de los procesos numéricos que permiten una mayor versatilidad en el diseño del modelo.

En general, el proceso de solución numérico es el mismo que el utilizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valores en la frontera: inicialmente se debe aplicar Diferencias finitas y con una ecuación de recurrencia construir un sistema de ecuaciones (no se recomienda el método del artillero). Dado lo anterior, será necesario contar con esquemas numéricos de derivación parcial para aplicarlos como diferencias finitas.

1. La ecuación en derivadas parciales

La solución de ecuaciones en derivadas parciales es uno de los clásicos dolores de cabeza a los que se enfrentan los profesionales de la ingeniería; los modelos matemáticos que hacen uso de ellos son muy

*Profesores de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

comunes y están presentes en todas las ramas de la física: electromagnetismo, térmica, mecánica clásica y de fluidos, entre muchas otras.

El Análisis numérico resuelve estas ecuaciones a través del método de las diferencias finitas. En realidad la dificultad en la solución de modelos en derivadas parciales radica en establecer claramente las condiciones iniciales y de frontera que definen al fenómeno; esto implica por necesidad incluir las características inherentes a los materiales de los objetos que participan en el fenómeno.

Es por lo anterior que la revisión de las técnicas numéricas de solución de ecuaciones en derivadas parciales pudiera dejar en el lector un sentimiento de insatisfacción por considerar que se recurre a artilugios matemáticos; en realidad, la plenitud del uso del Análisis numérico se obtiene en el laboratorio disponiendo de las condiciones de desarrollo del fenómeno y de las cualidades de los materiales.

Una *ecuación en derivadas parciales* es aquella que expresa una relación entre una función de varias variables y todas o algunas de sus derivadas parciales. Su representación general es:

$$f\left(x, y, \dots, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots\right) = 0$$

Donde $U = f(x, y)$ es la variable dependiente.

1.1. Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales

Las ecuaciones en derivadas parciales suelen clasificarse a partir de su *orden*. El orden de una ecuación diferencial parcial es el orden de la derivada mayor que aparece en ella. En este caso, se analizarán modelos matemáticos que corresponden a ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, de la forma:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + F = 0 \quad (1)$$

Donde los coeficientes A , B y C son en general, funciones de las variables x y y y F es función de x , y , U , $\frac{\partial U}{\partial x}$ y $\frac{\partial U}{\partial y}$.

En función de los valores de los coeficientes A , B y C la ecuación diferencial parcial (1) tiene tres variantes:

- Si $B^2 - 4AC < 0$ se le conoce como *EDP Elíptica*. En esta clasificación destacan las ecuaciones de Laplace y de Poisson.
- Si $B^2 - 4AC = 0$ se le conoce como *EDP Parabólica*. En esta clasificación destaca la ecuación de transferencia de calor.
- Si $B^2 - 4AC > 0$ se le conoce como *EDP Hiperbólica*. En esta clasificación destaca la ecuación de onda.

1.2. Esquemas numéricos para derivadas parciales

El método utilizado en la solución de ecuaciones en derivadas parciales es *diferencias finitas* que consiste en sustituir en la ecuación diferencial a resolver los esquemas de derivación numérica necesarias. Resulta entonces necesario disponer de esquemas numéricos para derivadas parciales.

La obtención de las mismas puede hacerse por varios caminos; se logra a través del polinomio de Taylor para la función $f(x, y)$ o bien, a partir de las ecuaciones de derivación numéricas para la función $y = f(x)$ respetando todas sus condiciones. Sea cual sea el camino elegido, deben hacerse un par de consideraciones:

- Se requiere de una función $U(x_i, y_j)$; donde x y y son las variables independientes, i es el índice de la posición para x y j es el índice para la posición de y ; estos índices hacen referencia al pivoteo de los esquemas de derivación y en consecuencia el uso de un paso constante para la variable x y otro también constante para y que no necesariamente deben ser iguales entre sí.
- La solución de la ecuación en derivadas parciales es una matriz, es decir, un arreglo de dos dimensiones.

La obtención de una la derivada parcial de una función $U(x, y)$ se logra aplicando una derivada ordinaria a la función con respecto a una de las variables independientes, considerando a la otra constante. Bajo este principio, a partir de un esquema de derivación numérico ordinario se obtiene un esquema de derivación parcial.

A partir del esquema de la primera derivada de primer orden de interpolación:

$$y'_{x=x_0} = \frac{1}{h} [-y_0, y_1] \quad (2)$$

Si consideramos en lugar de la función $f(x)$ a la función $f(x, y)$ y si además observamos que la ecuación (2) utiliza un punto pivote y otro punto posterior, se puede plantear la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} [-U(x_0, y_0) + U(x_1, y_0)] \quad (3)$$

En la ecuación (3) se plantea derivar parcialmente con respecto a x , por lo que y deberá permanecer constante. En consecuencia, se utiliza como pivote al punto $U(x_0, y_0)$ y al punto siguiente $U(x_1, y_0)$. El espaciamiento para la variable x es Δx y deberá ser constante. La ecuación resultante conserva su orden de error y se escribe en forma general y coloquialmente (omitiendo a las variables independiente pero mostrando los índices respectivos) como:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} [-U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (4)$$

Aplicando los mismos criterios de define:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} [-U_{i,j} + U_{i,j+1}] \quad (5)$$

Si se sigue este criterio respetando las reglas de derivación pueden obtenerse otras fórmulas adicionales:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} [-U_{i-1,j} + U_{i+1,j}] \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y} [-U_{i,j-1} + U_{i,j+1}] \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [U_{i-1,j-1} - U_{i-1,j+1} - U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1}] \quad (10)$$

2. La ecuación en derivadas parciales elípticas

Este caso corresponde a la ecuación de *Laplace*, que es un caso particular de la ecuación de *Poisson* cuando $f(x, y) = 0$ que tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y) = f(x, y) = 0 \quad (11)$$

Para $(x, y) \in \mathbb{R}$. De acuerdo al método de diferencias finitas debe disponerse de los valores de los pasos para la variable x y y . Si los intervalos de solución para x y y respectivamente son $[a, b]$ y $[c, d]$, sean n y m el número de espacios, el tamaño de los pasos será $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $\Delta y = \frac{d-c}{m}$. En consecuencia, los valores de las variables independientes serán: $x_i = a + i\Delta x$ y $y_j = c + j\Delta y$.

Los esquemas de derivación parcial numéricos propuestos y que serán sustituidos en la ecuación (11) son:

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^2} [U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] \quad (13)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (11):

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] + \frac{1}{(\Delta y)^2} [U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] = 0 \quad (14)$$

La expresión (14) es la ecuación de recurrencia del fenómeno.

El problema de la transmisión de calor en una placa es un típico ejemplo de la ecuación de Laplace. Para pivotear la ecuación de recurrencia es necesario crear una malla de referencia; las rectas $x = x_i$ y $y = y_j$ que se trazan dentro de la placa se denomina *líneas de red* y sus intersecciones se llaman *puntos de red*. Cada punto de red que forma la malla tendrá la forma (x_i, y_j) para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ y $j = 1, 2, 3, \dots, m-1$ como se observa en la figura 1.

Esta ecuación tiene como punto pivote a $U_{i,j}$ y alrededor el resto de puntos, de acuerdo a la figura 2.

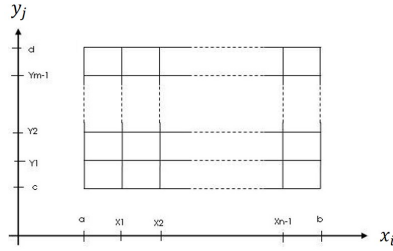


Figura 1: Líneas de red

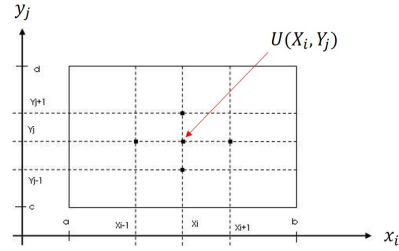


Figura 2: Puntos de red

Si usamos la información de las condiciones de frontera donde sea apropiado en el sistema que se producirá al pivotear la ecuación (14) en todos los puntos (x_i, y_j) que están adyacentes a un punto de red en la frontera se tendrá un sistema de $(n-1)(m-1)$ ecuaciones lineales con $(n-1)(m-1)$ incógnitas, siendo éstas las aproximaciones de $U(n-1)(m-1)$ para los puntos interiores de la red.

Ejemplo de aplicación

Se tiene una delgada placa de acero rectangular de $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$. Uno de los bordes de 10 cm se mantiene a 100°C y los otros tres bordes a 0°C , estas temperaturas son producto de una fuente de calor colocada debajo de ella. Se desea conocer la distribución de la temperatura al interior de la placa de acuerdo a la figura 3.

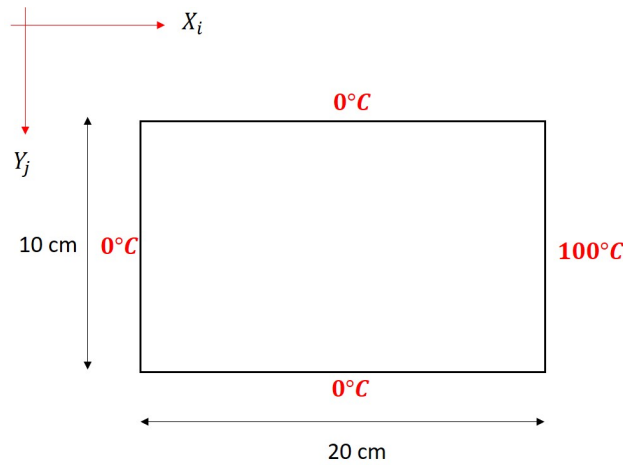


Figura 3: Dimensiones de la placa y condiciones iniciales de frontera

Se propone un análisis inicial en donde $n = 4$ y $m = 2$ por lo que los espaciamientos son:

$$\Delta x = \frac{20-0}{4} = 5$$

$$\Delta y = \frac{10-0}{2} = 5$$

Una vez teniendo las líneas y puntos de red, las condiciones de frontera son las siguientes, de acuerdo con la figura 4:

$$U(x_1, y_1) = 0^\circ C$$

$$U(x_1, y_2) = 0^\circ C$$

$$U(x_1, y_3) = 0^\circ C$$

$$U(x_2, y_1) = 0^\circ C$$

$$U(x_3, y_1) = 0^\circ C$$

$$U(x_4, y_1) = 0^\circ C$$

$$U(x_5, y_1) = 100^\circ C$$

$$U(x_5, y_2) = 100^\circ C$$

$$U(x_5, y_3) = 100^\circ C$$

$$U(x_4, y_3) = 0^\circ C$$

$$U(x_3, y_3) = 0^\circ C$$

$$U(x_2, y_3) = 0^\circ C$$

(15)

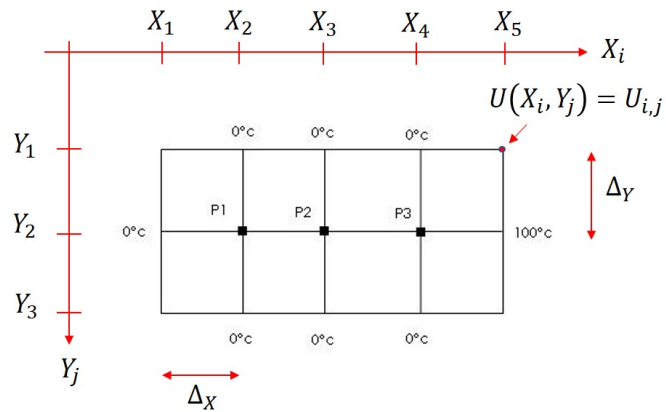


Figura 4: Pivoteo para $n = 4$ y $m = 2$

Por claridad se renombrará a los puntos i, j como P_i y a su temperatura $U_{i,j}$ como $W(P_i)$, tomados de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

Sustituyendo los espaciamientos Δ_x y Δ_y en la ecuación de recurrencia (14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] + \frac{1}{25} [U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] &= 0 \\ \frac{1}{25} [U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j}] &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Pivoteando en los puntos P_1 , P_2 y P_3 , las temperaturas $W_i = U(P_i)$ respectivamente son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} [-4W_1 + W_2] &= 0 \\ \frac{1}{25} [W_1 - 4W_2 + W_3] &= 0 \\ \frac{1}{25} [W_2 - 4W_3 + 100] &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $W_1 = 1,786$, $W_2 = 7,142$ y $W_3 = 26,786$.

Es posible obtener resultados más aproximados. En un segundo análisis, se propone elevar el número de líneas y puntos de red con $n = 8$ y $m = 4$ que arroja una $\Delta_x = \Delta_y = 2,5$. La malla resultante se muestra en la figura 5.

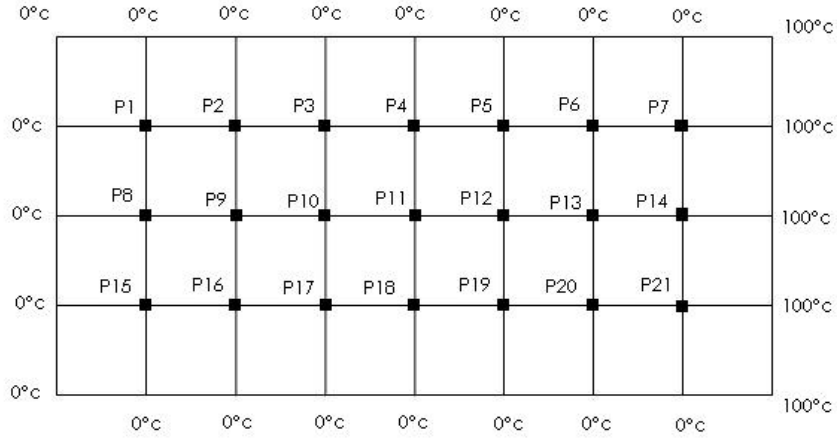


Figura 5: Malla para $n = 8$ y $m = 4$

El sistema de ecuaciones producto del pivoteo es:

$$-4W_1 + W_2 + W_8 = 0$$

$$W_1 - 4W_2 + W_3 + W_9 = 0$$

$$W_2 - 4W_3 + W_4 + W_{10} = 0$$

$$W_3 - 4W_4 + W_5 + W_{11} = 0$$

$$W_4 - 4W_5 + W_6 + W_{12} = 0$$

$$W_5 - 4W_6 + W_7 + W_{13} = 0$$

$$W_6 - 4W_7 + W_{14} = -100$$

$$W_1 - 4W_8 + W_9 + W_{15} = 0$$

$$W_2 + W_8 - 4W_9 + W_{10} + W_{16} = 0$$

$$W_3 + W_9 - 4W_{10} + W_{11} + W_{17} = 0$$

$$W_4 + W_{10} - 4W_{11} + W_{12} + W_{18} = 0$$

$$W_5 + W_{11} - 4W_{12} + W_{13} + W_{19} = 0$$

$$W_6 + W_{12} - 4W_{13} + W_{14} + W_{20} = 0$$

$$W_7 + W_{13} - 4W_{14} + W_{21} = -100$$

$$W_8 - 4W_{15} + W_{16} = 0$$

$$W_9 + W_{15} - 4W_{16} + W_{17} = 0$$

$$W_{10} + W_{16} - 4W_{17} + W_{18} = 0$$

$$W_{11} + W_{17} - 4W_{18} + W_{19} =$$

$$W_{12} + W_{18} - 4W_{19} + W_{20} = 0$$

$$W_{13} + W_{19} - 4W_{20} + W_{21} = 0$$

$$W_{14} + W_{20} - 4W_{21} = -100$$

Cuya solución es:

$W_1 = 0,3530$	$W_8 = 0,4988$	$W_{15} = 0,3530$
$W_2 = 0,9132$	$W_9 = 1,2894$	$W_{16} = 0,9132$
$W_3 = 2,0103$	$W_{10} = 2,8323$	$W_{17} = 2,0103$
$W_4 = 4,2957$	$W_{11} = 6,0193$	$W_{18} = 4,2957$
$W_5 = 9,1531$	$W_{12} = 12,6537$	$W_{19} = 9,1531$
$W_6 = 19,6631$	$W_{13} = 26,2983$	$W_{20} = 19,6631$
$W_7 = 43,2101$	$W_{14} = 53,1774$	$W_{21} = 43,2101$

3. La ecuación en derivadas parciales parabólicas

Las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas se presentan en problemas de propagación del calor en una dimensión en función del tiempo. En este tipo de problemas la solución avanza en intervalos indefinidamente satisfaciendo las condiciones de frontera conocidas, conforme el fenómeno progresa. Este tipo de dominio de solución, de extremo abierto, se muestra en la figura 6.

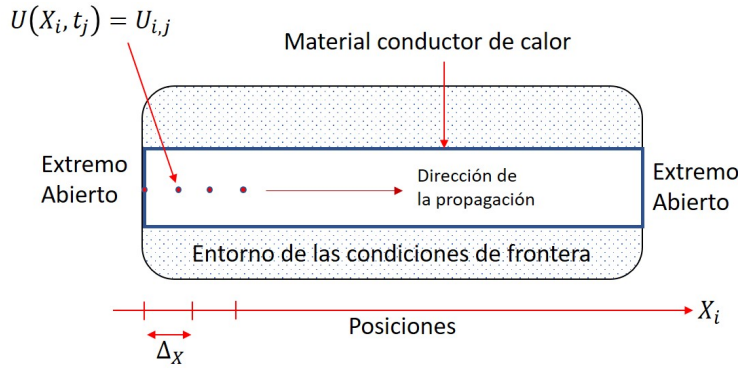


Figura 6: Propagación del calor en una dirección

En estos modelos la variable dependiente es U (calor) y sus variables independientes son x_i y t_j . La solución debe satisfacer la ecuación diferencial parcial en todo el dominio abierto, así como las condiciones iniciales y de frontera; el problema unidimensional del flujo transitorio de calor que se define mediante la ecuación diferencial parcial (17).

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x_i, t_j) = \frac{k}{C \cdot P} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x_i, t_j) \quad (17)$$

Donde C es la capacidad calorífica del material, P es su densidad y k es la conductividad térmica.

Como se mencionó, la temperatura $U(x_i, t_j)$ se propaga en un plano espacio-tiempo como el mostrado en la figura 7. Si se considera una red espacio-tiempo como la mostrada, la solución de la ecuación (17) consiste en determinar la temperatura $U(x_i, t_j)$ en cada punto de la red utilizada.

$t_j \backslash X_i$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	...	$i = n$
$j = 0$					
$j = 1$					
$j = 3$					
$\vdots$					
$j = n$					

Δ_x (horizontal arrow below the table)
 Δ_t (vertical arrow to the right of the table)
 $U(X_i, t_j) = U_{i,j}$ (label with an arrow pointing to the cell at $i=2, j=3$)

Figura 7: Solución espacio-temporal

Para utilizar la red propuesta, en la ecuación (17) deberán sustituirse los esquemas numéricos de derivación parcial de acuerdo a lo establecido por el método de las diferencias finitas. Se propone el uso de las siguientes ecuaciones:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{1}{\Delta_t} [-U_{i,j} + U_{i,j+1}] \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta_x)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (19)$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{\Delta_t} [-U_{i,j} + U_{i,j+1}] = \frac{k}{C \cdot P} \frac{1}{(\Delta_x)^2} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (20)$$

Despejando el término incógnita $U_{i,j+1}$ (posición i en el momento futuro $j + 1$), resulta:

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} \frac{k}{C \cdot P} [U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}] \quad (21)$$

Con la ecuación (21) puede obtenerse la temperatura U en la coordenada x_i en el instante t_{j+1} en función de las temperaturas en los puntos adyacentes de la red. Las temperaturas iniciales conocidas y las temperaturas de la frontera suministran valores necesarios para iniciar los cálculos que proceden entonces renglón por renglón satisfaciendo los puntos extremos de cada renglón, las condiciones de frontera dadas, hasta que satisfaga en forma aproximada algún estado final de temperatura (en función del tiempo), conforme la solución se aproxima a un estado estacionario. Esta progresión de renglón por renglón en función del tiempo, que continúa indefinidamente, ilustra la naturaleza de extremo abierto del dominio de solución de una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico.

La solución numérica está sujeta a condiciones de estabilidad en función de la ponderación del término $U_{i,j}$. Estas condiciones dependen de los valores de las constantes del diseño del experimento.

La ecuación (21) será estable si:

$$\frac{k}{C \cdot P} \frac{\Delta_t}{(\Delta_x^2)} \leq 0,5 \quad (22)$$

Por otra parte, será estable y no oscilatoria si:

$$\frac{k}{C \cdot P} \frac{\Delta_t}{(\Delta_x^2)} \leq 0,25 \quad (23)$$

La referencia hacia la estabilidad del modelo matemático radica en que si los coeficientes antes citados no tienen los valores necesarios para cumplir con las condiciones (22) y (23) los términos de la ecuación (21) tendrán valores tales que no se logrará que la ecuación completa tienda a un determinado valor.

Ejemplo de aplicación

Determinar la distribución estacionaria de temperatura a lo largo de una barra delgada de aluminio de longitud $l = 1 ft$; esta se muestra en la figura 8. Se supone que está perfectamente aislada en todas sus fronteras, excepto en el extremo derecho en que está en contacto con una fuente de calor que se mantiene a $100^\circ F$ constantes; en principio, al inicio del experimento, también se encuentra aislada en su extremo izquierdo.

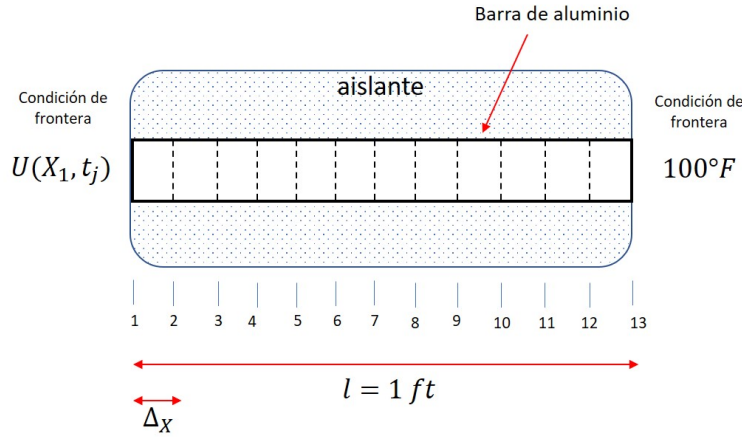


Figura 8: Barra de aluminio

Las propiedades del material son:

$$k = 0,0370 \frac{Btu}{s \cdot ft \cdot ^\circ F}$$

$$C = 0,212 \frac{Btu}{Lb \cdot ^\circ F}$$

$$P = 168 \frac{Lb}{ft^3}$$

La barra se divide en doce intervalos iguales mediante las trece estaciones mostradas, de acuerdo a la figura 8. Las condiciones de frontera son:

$$U_{x_i, t_0} = 100^\circ F \quad (24)$$

Significa que en $t = 0$ toda la barra se encuentra en equilibrio térmico a $100^\circ F$. Un instante (Δt) después, se retira el aislante del extremo izquierdo de la barra y súbitamente la temperatura cambia a $20^\circ F$, es decir:

$$U_{x_0, t_j} = 20^\circ F \quad \text{para } j > 0 \quad (25)$$

Implica que para un intervalo después de iniciar el experimento ($j > 0$) en la posición $i = 1$ habrá una temperatura constante de $20F$. A partir de ese instante, la distribución de temperatura en la barra pasa a un estado transitorio. Este existe hasta el instante en que la temperatura en todos los puntos de la barra se aproxime al estado final de equilibrio a $20F$.

En este sentido, los valores dados de k , C y P establecen una difusividad térmica $\frac{k}{C \cdot P}$ de $0,00104 \frac{ft^2}{s}$.

Con el número de estaciones mostrado en la figura 8, el valor de Δ_x es $\frac{1}{12} ft$. Con todos estos datos y haciendo referencia al criterio de estabilidad ya mencionado en la ecuación (23) para una solución estable y no oscilatoria, se observa que el uso de un valor conveniente es $\Delta t = 1,0 s$ para satisfacer el requisito para dicha solución.

En el esquema de solución propuesto en la figura 6, el renglón correspondiente a t_0 corresponde a $100^\circ F$ en todas las posiciones i , ya que es la temperatura de equilibrio inicial.

Asimismo, desde el instante t_1 y hasta concluir el experimento, la temperatura en la estación x_1 será de $20^\circ F$ (cuando se retira el aislante del extremo izquierdo de la barra).

Por último, ya que el extremo derecho de la barra permanece constantemente en contacto con la fuente de calor, el punto x_{13} siempre será de $100^\circ F$.

La figura 9 muestra los resultados para los primeros 30 instantes; las líneas punteadas delimitan las condiciones de frontera.

Se observa que después de eliminar el aislante izquierdo de la barra, la temperatura en cada estación cambia progresivamente según se avanza a lo largo de la barra. Eventualmente, después del suficiente transcurrir del tiempo, la barra quedará en equilibrio.

Condiciones de estabilidad. Para ejemplificar los efectos de los valores de las constantes en la solución numérica, se modificará el valor de Δ_t para que la solución sea inestable. Con el mismo procedimiento planteado, con $\Delta_t = 5,0$ se obtiene:

$$\frac{k}{C \cdot P} \frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} = 0,7479$$

La solución obtenida se muestra en la figura 10; se puede observar, los valores de las temperaturas cambian sin patrón alguno, incluso descienden por debajo de los $20^\circ F$ o se elevan por arriba de los $100^\circ F$; estos son los efectos de una *solución inestable*.

4. La ecuación en derivadas parciales hiperbólicas

El ejemplo típico de este tipo de ecuación en derivadas parciales es la ecuación de onda unidimensional que responde a la forma:

		Posición Xi												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Instante tj	0	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	1	0.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	2	0.00000	85.04043	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	3	0.00000	74.55664	97.76211	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	4	0.00000	66.87472	94.62545	99.66522	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	5	0.00000	61.02194	91.22799	98.96138	99.94992	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	6	0.00000	56.41202	87.86618	97.95238	99.80953	99.99251	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	7	0.00000	52.67843	84.66962	96.72135	99.55908	99.96626	99.99888	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	8	0.00000	49.58371	81.68676	95.34297	99.19548	99.91022	99.99417	99.99983	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	9	0.00000	46.96868	78.92720	93.87638	98.72608	99.81586	99.98246	99.99901	99.99997	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	10	0.00000	44.72322	76.38267	92.36554	98.16361	99.67776	99.96001	99.99668	99.99983	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	11	0.00000	42.76894	74.03752	90.84194	97.52276	99.49347	99.92327	99.99166	99.99939	99.99997	100.00000	100.00000	100.00000
	12	0.00000	41.04854	71.87375	89.32749	96.81815	99.26296	99.86921	99.98259	99.99832	99.99989	100.00000	100.00000	100.00000
	13	0.00000	39.51917	69.87343	87.83706	96.06331	98.98792	99.79548	99.96798	99.99620	99.99967	99.99998	100.00000	100.00000
	14	0.00000	38.14814	68.01985	86.38039	95.27021	98.67122	99.70047	99.94640	99.99250	99.99920	99.99994	100.00000	100.00000
	15	0.00000	36.91002	66.29783	84.96361	94.44910	98.31641	99.58329	99.91650	99.98660	99.99831	99.99984	99.99999	100.00000
	16	0.00000	35.78473	64.69386	83.59028	93.60865	97.92740	99.44362	99.87714	99.97787	99.99678	99.99963	99.99997	100.00000
	17	0.00000	34.75617	63.19600	82.26216	92.75601	97.50815	99.28165	99.82736	99.96563	99.99438	99.99925	99.99992	100.00000
	18	0.00000	33.81127	61.79374	80.97978	91.89707	97.06256	99.09798	99.76641	99.94925	99.99081	99.99862	99.99983	100.00000
	19	0.00000	32.93931	60.47783	79.74281	91.03663	96.59432	98.89348	99.69377	99.92811	99.98576	99.99764	99.99968	100.00000
	20	0.00000	32.13137	59.24015	78.55036	90.17853	96.10686	98.66926	99.60910	99.90168	99.97891	99.99616	99.99942	100.00000
	21	0.00000	31.38001	58.07351	77.40116	89.32586	95.60333	98.42653	99.51227	99.86946	99.96994	99.99407	99.99902	100.00000
	22	0.00000	30.67893	56.97161	76.29371	88.48106	95.08658	98.16661	99.40329	99.83106	99.95852	99.99120	99.99843	100.00000
	23	0.00000	30.02277	55.92884	75.22638	87.64604	94.55918	97.89085	99.28228	99.78613	99.94434	99.98739	99.99758	100.00000
	24	0.00000	29.40693	54.94024	74.19748	86.82229	94.02341	97.60060	99.14950	99.73443	99.92711	99.98248	99.99642	100.00000
	25	0.00000	28.82745	54.00136	73.20530	86.01093	93.48129	97.29718	99.00530	99.67575	99.90657	99.97628	99.99487	100.00000
	26	0.00000	28.28090	53.10828	72.24814	85.21279	92.93459	96.98186	98.85007	99.60998	99.88247	99.96863	99.99286	100.00000
	27	0.00000	27.76427	52.25745	71.32436	84.42849	92.38490	96.65589	98.68427	99.53707	99.85460	99.95937	99.99030	100.00000
	28	0.00000	27.27493	51.44570	70.43235	83.65841	91.83358	96.32040	98.50841	99.45699	99.82277	99.94832	99.98712	100.00000
	29	0.00000	26.81056	50.67018	69.57059	82.90282	91.28182	95.97651	98.32300	99.36981	99.78683	99.93534	99.98325	100.00000
	30	0.00000	26.36911	49.92830	68.73761	82.16184	90.73066	95.62523	98.12857	99.27559	99.74666	99.92029	99.97859	100.00000

Figura 9: Solución de la propagación de calor en la barra de aluminio

		Posición Xi												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Instante tj	0	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	1	0.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	2	0.00000	25.20216	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	3	0.00000	62.29866	44.05283	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	4	0.00000	2.05311	99.54760	58.15272	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	5	0.00000	73.44120	-4.33865	120.41606	68.69914	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	6	0.00000	-39.66888	147.15283	-11.58091	130.79465	76.58763	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	7	0.00000	129.74120	-111.31520	213.64236	-16.24488	134.64526	82.48805	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	8	0.00000	-147.60741	312.05104	-201.36959	268.56839	-17.22978	134.59908	86.90144	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	9	0.00000	306.61436	-415.79113	534.16144	-296.70595	310.10580	-14.64244	132.37569	90.20256	100.00000	100.00000	100.00000	100.00000
	10	0.00000	-463.07029	835.09663	-797.85349	778.64705	-386.68099	338.22863	-9.13529	129.07542	92.67173	100.00000	100.00000	100.00000
	11	0.00000	854.29717	-1357.31572	1602.74640	-1272.18160	1027.17602	-463.80885	354.06406	-1.53239	125.38230	94.51861	100.00000	100.00000
	12	0.00000	-1438.93744	2510.98566	-2761.70039	2598.07247	-1807.91843	1263.16698	-523.66572	359.37554	7.36747	121.70394	95.90004	100.00000
	13	0.00000	2591.81405	-4387.32711	5191.14960	-4706.50824	3784.77342	-2370.45102	1473.34243	-564.41472	356.18313	16.88196	118.26749	100.00000
	14	0.00000	-4567.05406	7997.41402	-9376.57907	9048.02198	-7170.49731	5108.59875	-2925.93060	1648.37103	-586.19417	346.50610	28.76962	100.00000
	15	0.00000	8246.95509	-14395.90937	17399.99741	-16864.28502	14145.10447	-10085.55503	6505.20309	-3444.51454	1782.85211	-588.79363	319.70845	100.00000
	16	0.00000	-14857.96384	26323.11763	-32011.59964	31959.01406	-27173.26101	20447.98511	-13346.50047	7907.61723	-3901.04530	1864.68621	-524.16870	100.00000
	17	0.00000	27058.03367	-48112.55393	59470.15061	-60119.29223	52676.07087	-40449.22661	27828.66775	-16822.62943	9244.22248	-4234.76859	1729.50799	100.00000
	18	0.00000	-49406.77065	88582.96782	-110449.71704	113699.53162	-101348.14290	80276.88049	-56639.93239	36073.02117	-20335.21533	10308.37634	-3950.47912	100.00000
	19	0.00000	90761.77728	-163502.53750	206081.24402	-214810.29637	195354.48155	-157985.54422	115118.18132	-75466.41344	44777.67501	-23277.68586	9744.50834	100.00000
	20	0.00000	-167310.29966	303122.38628	-385177.25148	406801.90937	-375730.64789	310580.87354	-231710.68359	157026.73910	-96066.25272	52326.14576	-22169.26512	100.00000

Figura 10: Solución inestable

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(t_i, x_j) = \frac{Fg}{W} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(t_i, x_j) \quad (26)$$

La solución de (26) existe en un plano general espacio-tiempo, como el que se observa en la figura

11. El valor de la variable dependiente Y se determina entonces en todos los puntos de la red sobre el intervalo deseado.

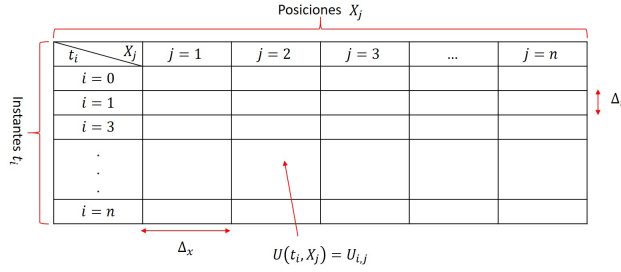


Figura 11: Solución espacio-tiempo

El procedimiento numérico comienza utilizando los valores conocidos de la condición inicial y se procede a partir de ahí en una progresión renglón por renglón conforme avanza el tiempo, satisfaciendo siempre las condiciones de frontera especificadas conforme la solución progresa.

En la ecuación (26) deberán sustituirse dos ecuaciones de derivación parcial numéricas de acuerdo a lo establecido en el método de las diferencias finitas, en particular:

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta t)^2} [Y_{i-1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i+1,j}] \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [Y_{i,j-1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j+1}] \quad (28)$$

De la sustitución resulta:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} [Y_{i-1,j} - 2Y_{i,j} + Y_{i+1,j}] = \frac{Fg}{W} \frac{1}{(\Delta x)^2} [Y_{i,j-1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j+1}] \quad (29)$$

Despejando a la incógnita (ubicación del punto en el instante futuro $i + 1$ en la posición j):

$$Y_{i+1,j} = 2Y_{i,j} - Y_{i-1,j} + C [Y_{i,j-1} - 2Y_{i,j} + Y_{i,j+1}] \quad (30)$$

Donde: $C = \frac{Fg}{W} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$.

El coeficiente $\frac{Fg}{W}$ es un dato de diseño del material de la cuerda que se hará oscilar, tiene que ver con la velocidad de propagación de la cuerda.

El valor de C es importante ya que de él depende la estabilidad de la solución; será inestable cuando $C > 1$ y será estable cuando $C \leq 1$.

Ejemplo de aplicación

Condiciones iniciales y de frontera. Una cuerda con una longitud de $1,5ft$ y un coeficiente $\frac{fg}{W} = 9651 \frac{lb^2}{s^2}$ es estirada entre los apoyos A y B . La cuerda es desplazada de su posición de equilibrio

jalando en el punto correspondiente a los dos tercios de su longitud, adquiriendo la configuración de la figura 12. Se desean determinar las configuraciones intermedias de la cuerda durante los primeros 0,2s a partir del instante en que la cuerda se deja en libertad a partir de la configuración mostrada. Para determinar las configuraciones debemos calcular los desplazamientos Y en diferentes puntos a lo largo de la cuerda correspondientes en los distintos períodos de tiempo.

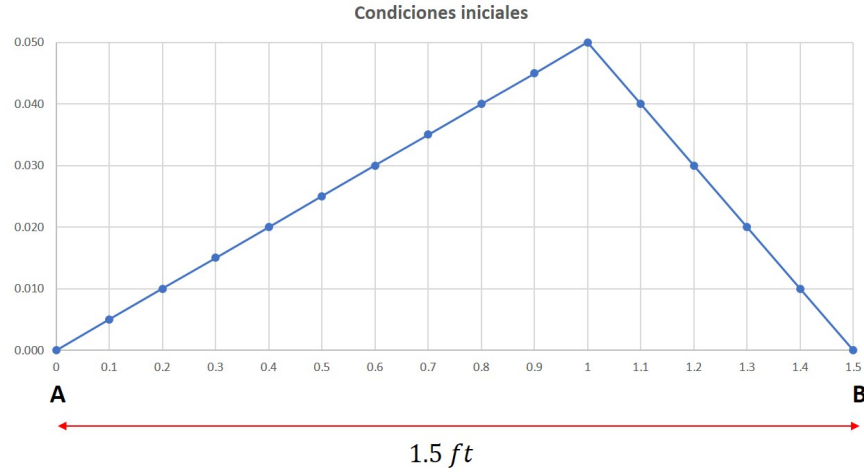


Figura 12: Cuerda tensionada, condiciones iniciales $t_0 = 0$

Analíticamente, estas condiciones iniciales son:

$$Y(0, x) = \begin{cases} 0,05x & 0 \leq x \leq 1,0 \\ -0,1x + 0,15 & 1,0 < x \leq 1,5 \end{cases} \quad (31)$$

El anclaje de la cuerda implica que:

$$\begin{aligned} Y(t_i, x_1) &= 0 \\ Y(t_i, x_{16}) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

En cualquier instante, los puntos x_0 y x_{16} están fijos (condiciones de frontera). Asimismo, dado que la cuerda parte del reposo:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = 0 \quad (33)$$

El valor de la constante C es determinante para obtener una solución estable. Por condiciones de diseño $\Delta_x = \frac{1,5ft}{10} = 0,1ft$, por lo que para cumplir con la condición de estabilidad deberá escogerse un valor para el intervalo de $\Delta_t = 0,001s$. La observación solicitada se logrará después de 200 intervalos. Por lo anterior:

$$C = \frac{Fg}{W} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} = 0,9651 \quad (34)$$

Primera iteración. Sustituyendo la constante C en la ecuación de recurrencia (30) para pivotar en t_0 ($i = 0$) resulta:

$$Y_{1,j} = 2Y_{0,j} - Y_{-1,j} + C[Y_{0,j-1} - 2Y_{0,j} + Y_{0,j+1}] \quad (35)$$

Antes de pivotar para $j = 2, 3, \dots, 15$ se observa que el término $Y_{-1,j}$ no existe; no hay ninguna condición antes de $i = 0$. La solución para este término parte de la condición inicial (33), que utilizando los esquemas numéricos de derivación parcial se expresa como:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} Y(t_i, x_j) \right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta_t} [-Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j}] = 0 \quad (36)$$

Para $i = 0$ y despejando:

$$Y_{-1,j} = Y_{1,j} \quad (37)$$

Sustituyendo (37) en (35) resulta:

$$Y_{1,j} = Y_{0,j} + \frac{C}{2} [Y_{0,j+1} - 2Y_{0,j} + Y_{0,j-1}] \quad (38)$$

La ecuación (38) se utiliza exclusivamente para cuando $i = 0$. Para valores de $i = 1, 2, 3, \dots$ podrá utilizarse (30) ya que no se producirá ninguna irregularidad.

Articulación de la solución. Los pasos a seguir son:

1. Partiendo del esquema mostrado en la figura 11, las condiciones iniciales (33) corresponden a las columnas $j = 1$ y $j = 16$ y son 0 para toda i , es decir, para todo el proceso.
2. Las condiciones iniciales (31) completan el renglón correspondiente a $i = 0$, debiendo calcular cada valor de $j = 2, 3, \dots, 15$ con el respectivo valor de x con $\Delta_x = 0,1ft$.
3. El renglón que corresponde a $Y(1, j)$ se obtiene pivotando la ecuación (38) para $j = 2, 3, \dots, 15$; esta expresión sólo debe aplicarse en estas condiciones.
4. Finalmente, para cada $i > 0$ se pivotea la ecuación (35) en los respectivos puntos de j .

La figura 13 muestra los resultados para los primeros 20 intervalos; las líneas punteadas delimitan las condiciones de frontera e iniciales.

Por claridad, la figura 14 muestra sólo los resultados para los primeros 10 intervalos; se observa claramente el desplazamiento de cada punto en j .

5. Conclusiones

Se mostraron las soluciones a tres típicos problemas que involucran ecuaciones en derivadas parciales, todos resueltos a través de análisis numérico como una alternativa practica a los métodos analíticos.

	Posición (Xj)																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
Instante (ti)	0	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.03000	0.03500	0.04000	0.04500	0.05000	0.04000	0.03000	0.02000	0.01000	0.00000
	1	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.03000	0.03500	0.04000	0.04500	0.04276	0.04000	0.03000	0.02000	0.01000	0.00000
	2	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.03000	0.03500	0.04000	0.03801	0.03502	0.03301	0.03000	0.02000	0.01000	0.00000
	3	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.03000	0.03500	0.03326	0.03005	0.02823	0.02505	0.02326	0.02000	0.01000	0.00000
	4	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.03000	0.02849	0.02510	0.02343	0.02014	0.01843	0.01510	0.01349	0.01000	0.00000
	5	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.02500	0.02372	0.02017	0.01860	0.01524	0.01357	0.01024	0.00860	0.00517	0.00372	0.00000
	6	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.02000	0.01894	0.01525	0.01376	0.01037	0.00868	0.00541	0.00368	0.00037	-0.00124	-0.00475	0.00000
	7	0.00000	0.00500	0.01000	0.01500	0.01415	0.01034	0.00890	0.00552	0.00378	0.00059	-0.00125	-0.00441	-0.00622	-0.00948	-0.00525	0.00000
	8	0.00000	0.00500	0.01000	0.00936	0.00544	0.00403	0.00068	-0.00113	-0.00421	-0.00620	-0.00918	-0.01120	-0.01421	-0.01049	-0.00477	0.00000
	9	0.00000	0.00500	0.00455	0.00056	-0.00085	-0.00415	-0.00606	-0.00901	-0.01115	-0.01395	-0.01618	-0.01895	-0.01571	-0.00957	-0.00521	0.00000
	10	0.00000	-0.00026	-0.00432	-0.00574	-0.00897	-0.01099	-0.01380	-0.01611	-0.01872	-0.02116	-0.02370	-0.02090	-0.01440	-0.01036	-0.00483	0.00000
	11	0.00000	-0.00918	-0.01065	-0.01379	-0.01592	-0.01859	-0.02106	-0.02350	-0.02612	-0.02847	-0.02606	-0.01928	-0.01547	-0.00972	-0.00513	0.00000
	12	0.00000	-0.01066	-0.01859	-0.02086	-0.02339	-0.02600	-0.02830	-0.03106	-0.03326	-0.03118	-0.02420	-0.02053	-0.01466	-0.01020	-0.00491	0.00000
	13	0.00000	-0.00950	-0.02107	-0.02819	-0.03093	-0.03310	-0.03598	-0.03807	-0.03628	-0.02917	-0.02554	-0.01966	-0.01520	-0.00988	-0.00505	0.00000
	14	0.00000	-0.01034	-0.01925	-0.03130	-0.03792	-0.04089	-0.04290	-0.04134	-0.03416	-0.03051	-0.02470	-0.02017	-0.01491	-0.01004	-0.00498	0.00000
	15	0.00000	-0.00980	-0.02046	-0.02918	-0.04138	-0.04776	-0.04637	-0.03919	-0.03545	-0.02978	-0.02509	-0.01998	-0.01499	-0.01002	-0.00499	0.00000
	16	0.00000	-0.01009	-0.01979	-0.03042	-0.03922	-0.04713	-0.04425	-0.04036	-0.03487	-0.03000	-0.02507	-0.01991	-0.01508	-0.00994	-0.00503	0.00000
	17	0.00000	-0.01000	-0.02002	-0.02989	-0.03620	-0.03608	-0.04116	-0.03998	-0.03489	-0.03016	-0.02482	-0.02016	-0.01487	-0.01009	-0.00495	0.00000
	18	0.00000	-0.00993	-0.02011	-0.02592	-0.02699	-0.03004	-0.03204	-0.03582	-0.03526	-0.02974	-0.02523	-0.01981	-0.01515	-0.00990	-0.00505	0.00000
	19	0.00000	-0.01010	-0.01599	-0.01737	-0.01970	-0.02298	-0.02465	-0.02747	-0.03084	-0.03030	-0.02475	-0.02020	-0.01486	-0.01010	-0.00495	0.00000
20	0.00000	-0.00620	-0.00752	-0.00973	-0.01333	-0.01436	-0.01837	-0.01965	-0.02264	-0.02603	-0.02522	-0.01983	-0.01512	-0.00992	-0.00504	0.00000	

Figura 13: Resultados para los primeros 20 intervalos

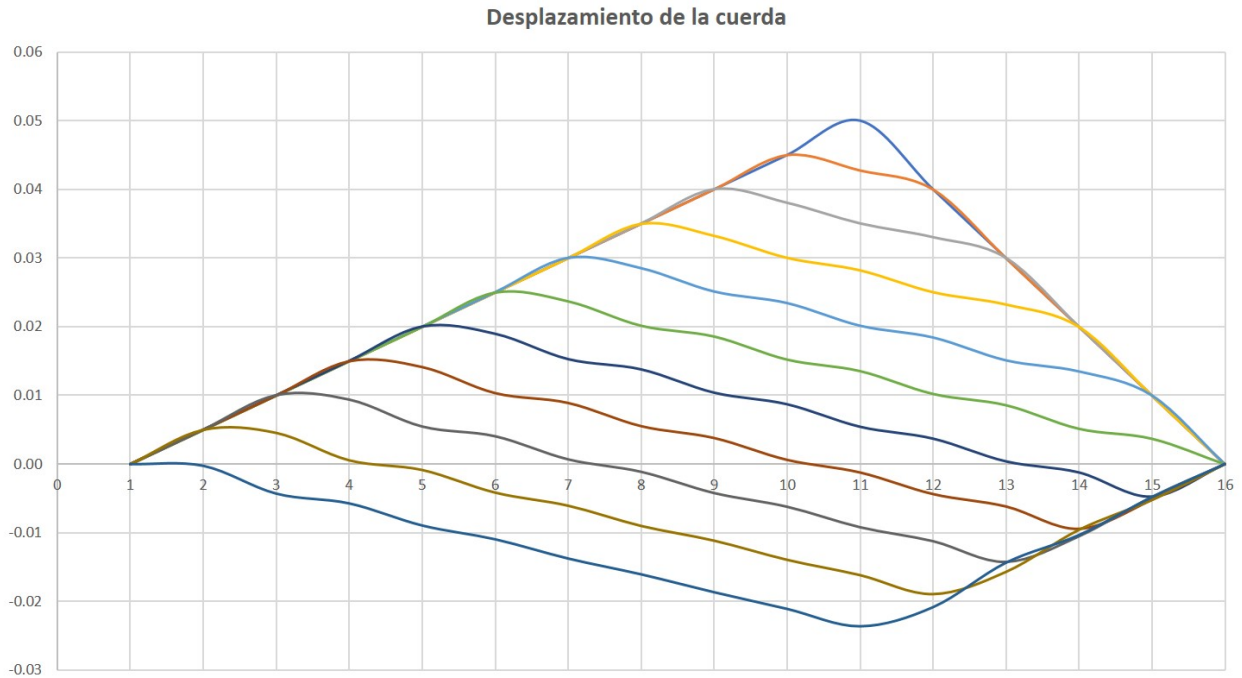


Figura 14: Comportamiento de la cuerda en los primeros 10 intervalos

Las soluciones numéricas permiten involucrar mayor detalle sobre las variables que modelan el fenómeno, aunque suelen presentar problemas de estabilidad, los cuales se resuelven con la adecuada selección de los pasos Δ para cada variable. Estos procesos son la base de simulaciones de fenómenos más complejos que reflejan de mejor forma las soluciones de la ingeniería a problemas reales.

Notas

¹Las figuras y gráficas incluidas en este trabajo fueron elaboradas por los autores

Referencias

- Borras, H., Duran, R., y Iriarte, R. (1984). *Apuntes de métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Burden, R., y Faires, D. (2011). *Análisis numérico* (C. Learning, Ed.).
- Chapra, S., y Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros* (M. Hill, Ed.).
- García B., S. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).
- Gerald, C. (1991). *Análisis numérico* (Alfaomega, Ed.).
- Gerald, C., y Wheatley, P. (2000). *Análisis numérico con aplicaciones* (P. Hall, Ed.).
- Olivera Salazar, A. (s.f.). *Métodos numéricos* (Limusa, Ed.).
- Sandoval, H. (s.f.). *Métodos numéricos* (F. de Ingeniería UNAM, Ed.).

Plataforma educativa de Análisis Numérico by Víctor Pinilla is licensed under CC BY-NC-SA 4.0.
To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0>



Revisión: 4 de enero de 2021