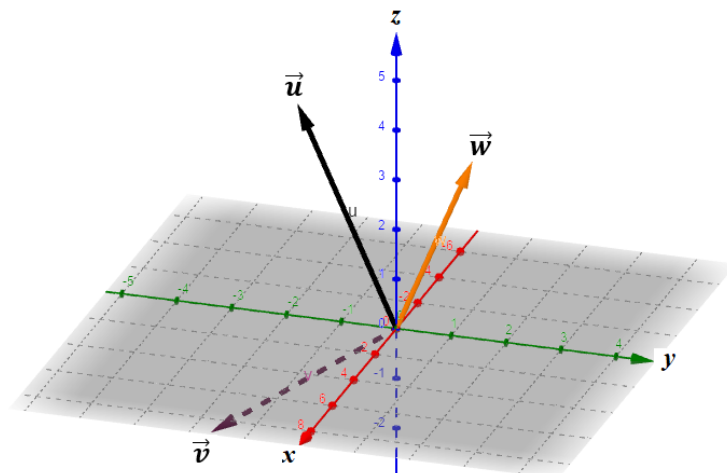


FASCÍCULO DE ÁLGEBRA VECTORIAL



María del Carmen Valderrama Bravo

Juan Alfonso Oaxaca Luna

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM-DGAPA PAPIME PE106219



Atribución-NoComercial-CompartirIgual
CC BY-NC-SA

Enero 2021

ÍNDICE

	Página
Prólogo	2
1. CONCEPTOS BÁSICOS	3
1.1. Sistema en dos y tres dimensiones	3
1.2. Representación gráfica en dos y tres dimensiones en GeoGebra	4
2. VECTORES	7
2.1. Vectores en GeoGebra	8
2.2. Vector posición dados dos puntos	8
2.3. Módulo y dirección de vectores en 2D	9
2.4. Módulo en 3D	10
2.5. Cálculo de módulo de vectores en GeoGebra	11
2.6. Operaciones de vectores	12
2.6.1. Adición de vectores	12
2.6.2. Sustracción de vectores	14
2.6.3. Multiplicación escalar-vector	15
2.7. Vector unitario	20
2.7.1. Vector unitario en GeoGebra	21
3. PRODUCTO ESCALAR	25
3.1. Producto escalar en GeoGebra	26
3.2. Ortogonalidad entre dos vectores	26
3.3. Componente escalar sobre otro vector	28
3.4. Componente vectorial sobre otro vector	30
3.4.1. Componente vectorial sobre otro vector en GeoGebra	33
3.5. Ángulo entre dos vectores aplicando producto escalar	34
3.5.1. Ángulo entre dos vectores con GeoGebra	36
3.6. Ángulo de un vector con los vectores unitarios (Cosenos y ángulos directores)	37
3.6.1. Ángulo de un vector con los vectores directores en GeoGebra	41
4. PRODUCTO VECTORIAL	44
4.1. Módulo del producto vectorial	45
4.2. Área de un paralelogramo	48
4.3. Producto vectorial y área de paralelogramo en GeoGebra	50
4.4. Vectores paralelos	51
5. TRIPLES PRODUCTOS	55
5.1. Propiedades del producto vectorial	57
6. EJERCICIOS PROPUESTOS	58
BIBLIOGRAFÍA	59

PRÓLOGO

El aprendizaje de las matemáticas es uno de los aspectos básicos en la formación de los futuros ingenieros y de aquellos profesionales que incursionarán en el mundo de la ciencia y tecnología. Las matemáticas son una herramienta indispensable para resolver diferentes situaciones que se les presentan durante su formación y desarrollo como ingenieros ya que constituyen la esencia de la formación de una mente analítica y ordenada. Para un estudiante de ingeniería, cuya mentalidad es eminentemente práctica, no siempre resulta sencillo comprender la estructura formal y la naturaleza misma de los conceptos fundamentales de las matemáticas.

En este fascículo de **Álgebra Vectorial** se ofrece una alternativa diferente de aprender y enseñar las matemáticas, ya que se orienta al fortalecimiento de la enseñanza empleando el software matemático GeoGebra el cual podrán trabajar en la página www.geogebra.org, con la finalidad de que el estudiante pueda corroborar el resultado de los ejercicios y evaluar su aprendizaje. Tal tendencia se identifica con los avances tecnológicos como un valioso recurso capaz de acompañar a la enseñanza de las matemáticas en cualquier etapa de su formación.

En tiempos actuales la enseñanza presencial ha tenido que impartirse de forma virtual por lo que los estudiantes requieren de un material didáctico que los conduzca de forma ordenada al aprendizaje significativo del **Álgebra Vectorial**.

En el fascículo de **Álgebra Vectorial** se integran 6 temas que son un soporte para la asignatura de Geometría Analítica de las carreras de Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica y Eléctrica. En cada uno de ellos se desarrolla parte de la teoría que lo sustenta y la solución de los ejercicios analíticamente, corroborado los resultados de algunos de estos ejercicios con GeoGebra.

Nuestro agradecimiento por el apoyo brindado al Departamento de Matemáticas, Sección de Matemáticas Discretas y de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico a través del Proyecto **PAPIME clave PE106219**.

Así mismo, nuestro reconocimiento al comité evaluador del trabajo por sus valiosas aportaciones, las cuales enriquecieron y fortalecieron los temas propuestos.

Esta obra es dedicada a nuestros estudiantes, por ser el elemento más noble en la enseñanza ya que sin alumnos no existen profesores y juntos cada día enaltecemos nuestra Universidad.

Los autores

1. CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. Sistema en dos y tres dimensiones

En un sistema de dos dimensiones, los puntos están definidos por una pareja ordenada de números reales; tienen dos coordenadas. Pueden representarse geoméricamente en un plano determinado por dos ejes perpendiculares llamados coordenadas, que se cortan en un origen común. Por facilidad se acostumbra a dibujar los ejes con direcciones horizontal y vertical, hacia la derecha y hacia arriba respectivamente los valores positivos y en sentido contrario los negativos. A dichos ejes se les denomina "x" abscisas y el eje "y" ordenadas, ambas forman las coordenadas del punto y se representa por el símbolo (x, y) .

Un par ordenado es una pareja de números escritos de forma ordenada; usualmente está escrito entre paréntesis: $(4,5)$, el cual es empleado para mostrar la posición en un gráfico donde el valor "x" (horizontal "abscisa") es primero y el valor "y" (vertical "ordenada") es el segundo. Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

En el siguiente gráfico se representa el par ordenado $(12, 5)$ que indica 12 unidades desplazadas horizontalmente y 5 unidades desplazadas verticalmente.

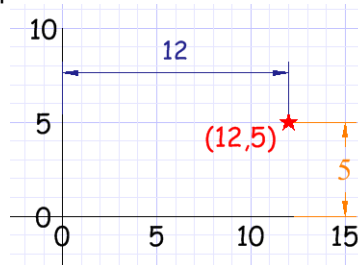


Fig. 1. Representación del par ordenado $(12,5)$

En un sistema de tres dimensiones, los puntos están definidos por una terna ordenada de números reales. La representación geométrica de un punto en el espacio está definido por tres ejes perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto en común llamado origen. Los ejes se llaman coordenadas y se designan normalmente con las letras (x, y, z) .

Si las direcciones positivas de los ejes coordenados corresponden a las mostradas en las siguientes figuras y siguen el sentido contrario al de las manecillas del reloj será un sistema derecho, pero si siguen el sentido de las manecillas es izquierdo.

Los tres ejes definen planos llamados planos coordenados, que dividen al espacio tridimensional en ocho partes llamadas octantes. El plano xy contiene los ejes "x" y "y", el plano xz contiene los x y z y el plano yz contiene los ejes "y" y "z".

Un punto en el plano tridimensional queda definido si se conocen sus tres dimensiones dirigidas a los tres planos coordenados. La distancia del punto al plano yz se llama abscisa o eje "x", la distancia al plano xz se llama ordenada o eje "y", por último, su distancia al plano xy se llama cota o eje "z". En tal situación a cada punto en el espacio se hacen corresponden las coordenadas (abscisa, ordenada, cota) o (x, y, z) .

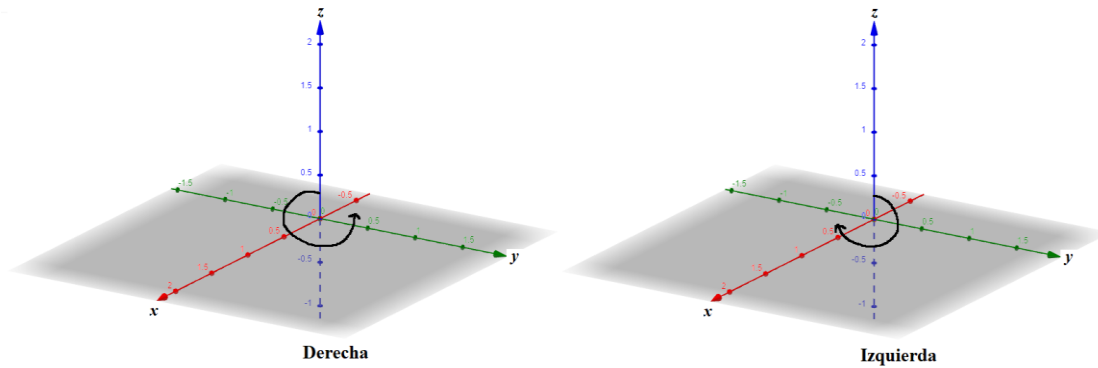


Fig. 2. Representación de los ejes en el espacio 3D

Ejemplo 2

Sea el punto $M(3, 2, 4)$, realizar su representación geométrica.

Para representar un punto en el plano tridimensional se sigue el siguiente procedimiento: En el punto $M(3, 2, 4)$, desplazamos tres unidades en el eje "x" o eje de las abscisas a partir del origen, desplazamos dos unidades en el eje "y" o eje de las ordenadas a partir del origen. Y finalmente se trazan las correspondientes perpendiculares a los desplazamientos realizados anteriormente y en el punto de intersección se traza una perpendicular al plano para ubicar el eje cota o "z", entonces se desplazan cuatro unidades hacia arriba, si el valor fuera negativo sería hacia abajo. En el extremo final tenemos el punto M como se muestra a continuación.

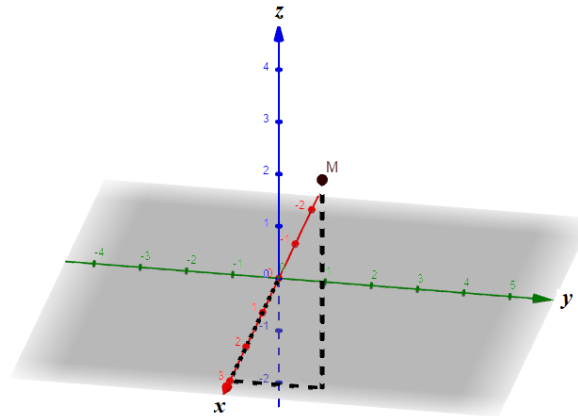


Fig. 3. Representación del punto M en el espacio

1.2. Representación gráfica en dos y tres dimensiones en GeoGebra

Una vez que se ha instalado GeoGebra, al abrir el programa aparecerá la pantalla, sólo mostrando el plano en dos dimensiones.

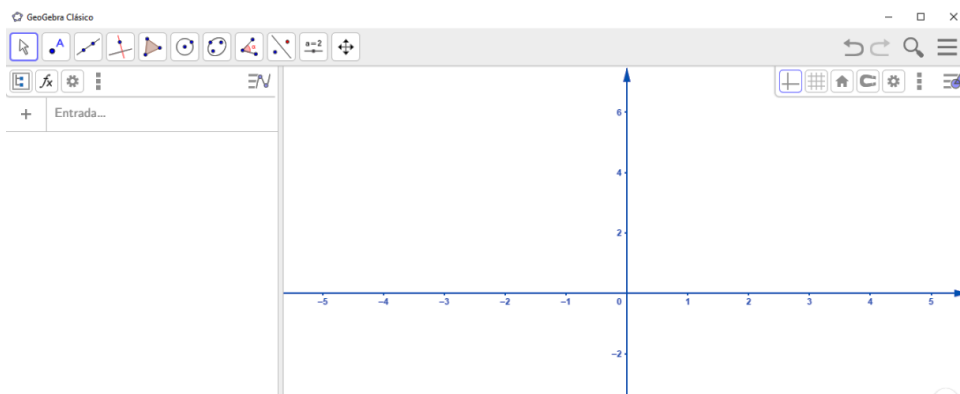


Fig. 4. Pantalla de inicio de GeoGebra en Vista 2D

Para mejorar la presentación se presiona el botón derecho y elegir cuadrícula como se muestra en la siguiente figura 5.

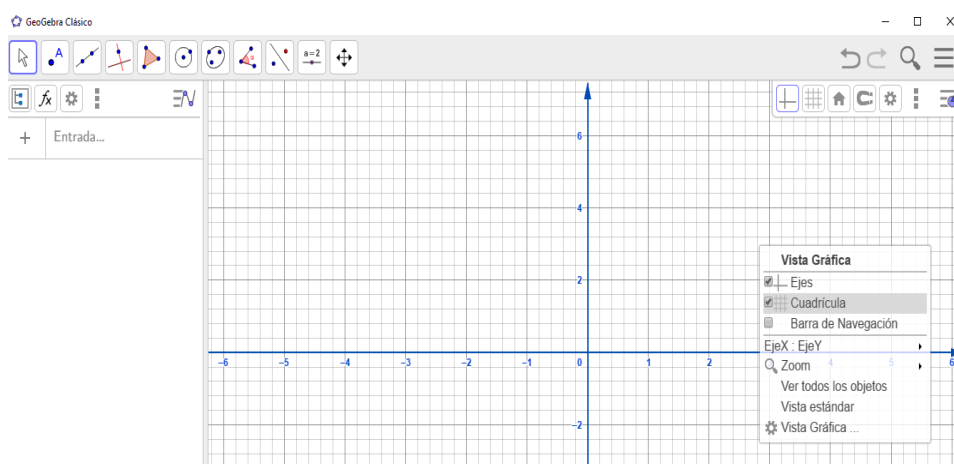


Fig. 5. Pantalla de GeoGebra con cuadrícula

Para mostrar la gráfica en 3D, en la esquina superior derecha se elige la vista gráfica 3D.

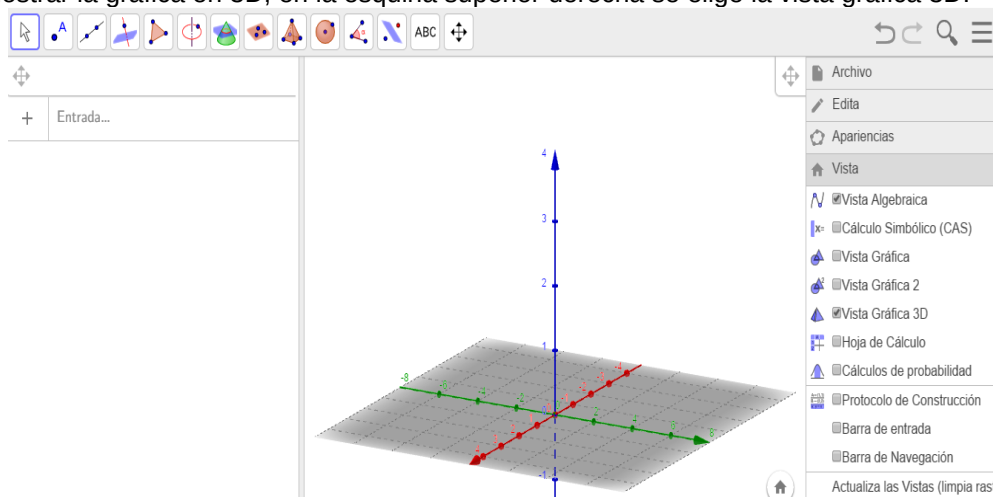


Fig. 6. Vista gráfica de GeoGebra en 3D

Para introducir un par ordenado o una terna en GeoGebra se puede hacer de dos formas: una es utilizando el icono nuevo punto de la barra de herramientas que se localiza en la parte superior; preparando previamente en vista gráfica cuadrícula y localizar directamente en el plano cartesiano el punto, apareciendo en la vista algebraica del punto localizado.



La segunda forma es introducir en la parte inferior de “Entrada” el par ordenado A (2,3) y dar Enter. En la terna se puede introducir en la entrada B (2, 3, 0) y dar Enter. En la vista algebraica se indica el par ordenado o terna y en vista gráfica, el punto localizado en vista gráfica 2D y 3D.

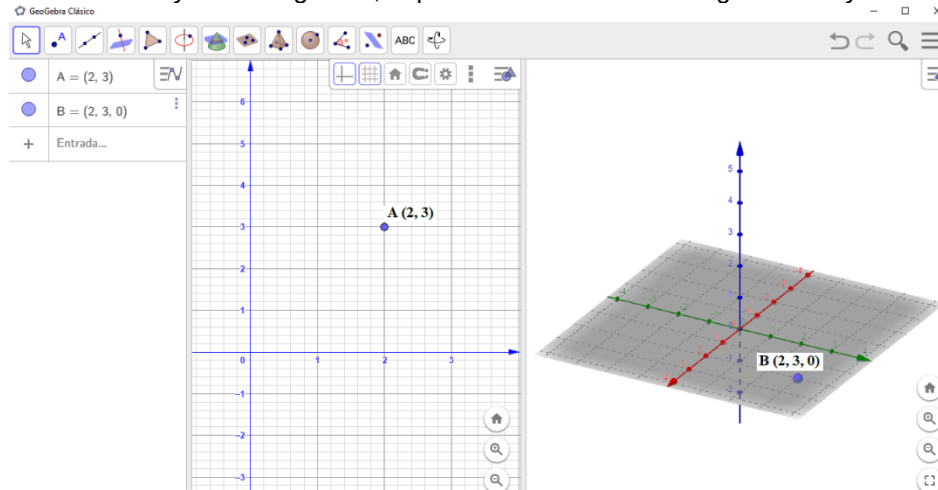


Fig. 7. Representación gráfica del par ordenado y terna en GeoGebra

Ejemplo 3

Para los siguientes puntos: $A(2,3,-4)$, $B(-2,4,3)$, $C(0,5,-2)$, $D(3,0,-1)$, $E(-2,-1,4)$, $F(0,5,0)$, $G(3,-3,0)$, $H(-5,-8,1)$. Realizar su representación geometría en el espacio en GeoGebra:

En la barra de entrada se van colocando los puntos y en la vista gráfica se muestran los puntos.

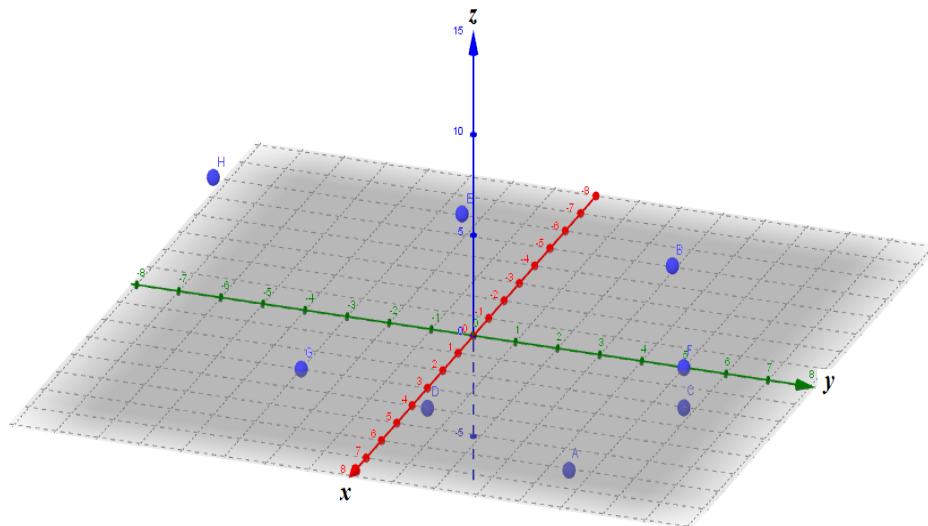


Fig 8. Representación de puntos en el espacio en GeoGebra

2. VECTORES

El concepto de vector guarda estrecha relación con la idea geométrica de segmento de línea dirigido, de manera que un vector es un segmento de recta que tiene *magnitud, dirección y sentido*.

Los vectores pueden representarse geoméricamente (ver figura 9), como segmentos de rectas dirigidas, o flechas, en un espacio bidimensional o tridimensional; la punta de la flecha especifica la dirección del vector y la longitud describe su magnitud. El inicio de la flecha se llama punto inicial u *origen* del vector y la punta es el punto final o extremo, también conocido como punto de aplicación.

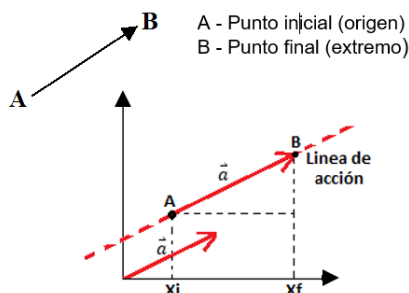


Fig. 9. Representación de un vector

Notación: para denotar un vector, generalmente usaremos una letra con una raya encima, por ejemplo,

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \text{etc.}$$

Para denotar el vector que va de A a B, es decir, aquel cuyo origen es A y cuyo extremo es B, escribiremos $\overrightarrow{AB}$.

Se dice que *dos vectores son iguales* si tienen la misma magnitud y dirección. De esta manera, dos vectores pueden considerarse iguales aun cuando puedan estar localizados en lugares diferentes.

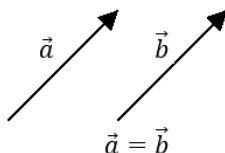


Fig. 10. Vectores iguales

Así, para cada vector dado, $\overrightarrow{QR}$ existirá una infinidad de vectores iguales, pero sólo uno de ellos tiene su punto inicial en el origen del sistema coordenado. Se llamará *vector de posición* a todo vector cuyo origen coincide con el del sistema coordenado.

De esta manera, si cada vector en el plano se identifica con el vector de posición que es igual al vector dado, entonces quedará identificado con un punto del plano: el extremo del vector de posición correspondiente. En adelante, para referirse a un vector en el plano, se recurrirá con frecuencia al vector de posición correspondiente, y, por lo tanto, al extremo de dicho vector.¹

Así, por ejemplo, el vector $\overrightarrow{AB}$ de la figura 11, se identificará con el vector $\overrightarrow{OP}$, el cual se traza, por supuesto, de manera que sea paralelo a $\overrightarrow{AB}$ y que tenga su misma magnitud; y, por lo tanto, con el punto de coordenadas (4, 3).

¹ Otra manera de proceder con los vectores, equivalente a la aquí descrita, es la de imaginar un sistema coordenado cuyo origen coincida con el del vector de interés.

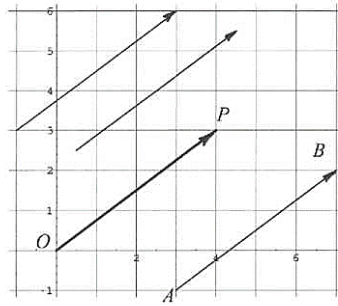


Fig. 11. Vectores paralelos

2.1. Vectores en GeoGebra

Graficar vectores en GeoGebra se puede realizar en 2 y 3 dimensiones, pero en ambos se aplica el comando **Vector(<Punto>)**.

Ejemplo 4

Graficar en GeoGebra los vectores $A = (3, 4)$ y $B = (-1, 3, 4)$

Para el vector $\vec{u} = (3, 4)$, colocar en la barra de entrada **Vector** $((3, 4))$.

Para el vector $\vec{v} = (-1, 3, 4)$, colocar en la barra de entrada **Vector** $((-1, 3, 4))$.

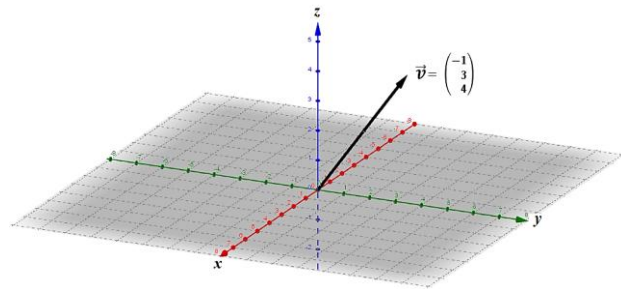
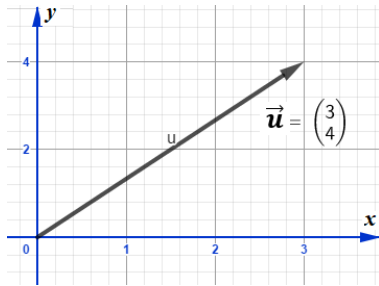


Fig. 12. Vectores en el plano y espacio graficados en GeoGebra

2.2. Vector posición dados dos puntos

Dados dos puntos en el espacio $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$, el vector posición $\overrightarrow{AB}$, se obtiene:

$$\overrightarrow{AB} (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Ejemplo 5

Sean los puntos $P(-3, 4, 1)$, $Q(0, -3, 4)$ y $R(-2, 4, 5)$, obtener los vectores posición $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (0 - (-3), -3 - 4, 4 - 1) & \overrightarrow{PQ} &= (3, -7, 3) \\ \overrightarrow{PR} &= (-2 - (-3), 4 - 4, 5 - 1) & \overrightarrow{PR} &= (1, 0, 4) \\ \overrightarrow{RQ} &= (0 - (-2), -3 - 4, 4 - 5) & \overrightarrow{RQ} &= (2, -7, -1) \end{aligned}$$

En la figura 13 se muestran los vectores posición.

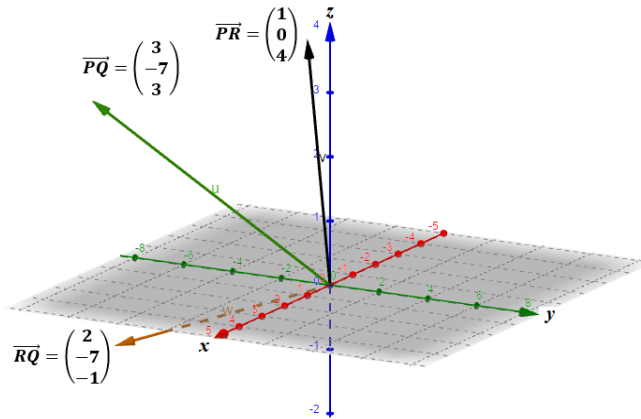


Fig. 13. Representación gráfica de los vectores posición $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$

2.3. Módulo y dirección de vectores en 2D

Dado en el plano un vector de posición (ver figura 14) cuyo extremo sea el punto (x, y) , su magnitud, $\|\vec{v}\|$, se determina aplicando el teorema de Pitágoras:

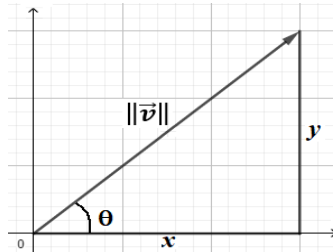


Fig. 14. Vectores en el plano

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si el vector es de posición en el plano cartesiano $\vec{a} = (a_1, a_2)$, su **módulo** se obtiene aplicando la ecuación obtenida:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La dirección de un vector en dos dimensiones se determina por su *ángulo en posición normal* del vector, es decir, aquel ángulo cuyo lado inicial es el lado positivo del eje "x" y lado terminal el vector mismo, para obtener su desviación o ángulo de inclinación, se obtiene aplicando la tangente en la figura 14 y posteriormente para conocer θ aplicamos:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

Ejemplo 6

Sean los vectores $\vec{u}(-1, 8)$ y $\vec{v}(5, 3)$, hallar su módulo y dirección. Para el vector $\vec{u}(-1, 8)$ el módulo se obtiene aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (8)^2} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{65} \\ \|\vec{u}\| &= 8.06\end{aligned}$$

Para la dirección se aplica la fórmula:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{8}{-1} \right)$$

$$\theta_1 = -82.87^\circ$$

El ángulo debe ser positivo y como el vector se encuentra en el segundo cuadrante, entonces se suma 180° .

$$\theta_1 = -82.87^\circ + 180^\circ$$

$$\theta_1 = 97.13^\circ$$

Para el vector $\vec{v}$ (5, 3) el módulo se obtiene aplicando la fórmula:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{34}$$

Para la dirección se aplica:

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$\theta_2 = 30.96^\circ$$

El ángulo es positivo y se encuentra en el primer cuadrante. En la figura 15, se grafican los vectores.

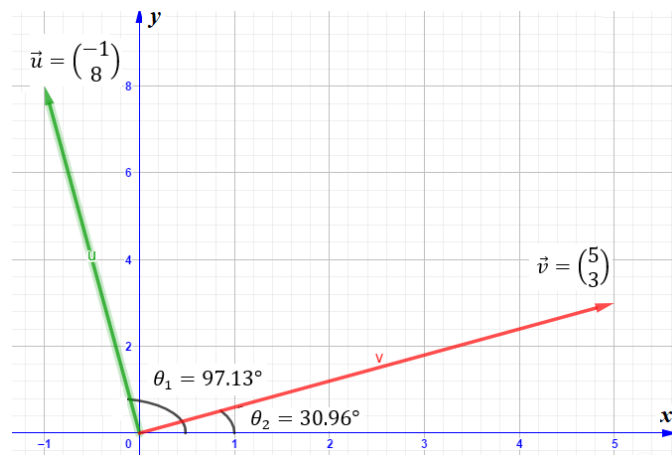


Fig. 15. Vectores posición en el plano

2.4. Módulo en 3D

En la Fig. 16, se visualiza gráficamente el vector $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

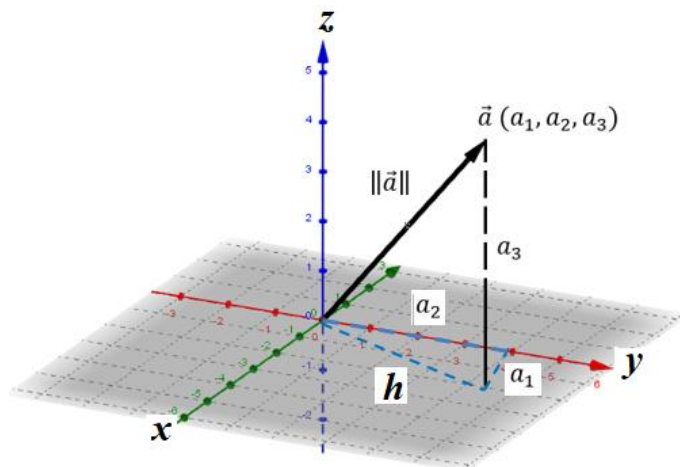


Fig. 16. Vector posición en el espacio

El módulo del vector $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$, se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras en relación con la figura 16.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{h^2 + a_3^2}$$

Relacionando “h” como la hipotenusa del triángulo formado por h, a_1 y a_2 , se aplica también el teorema de Pitágoras.

$$h = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sustituyendo “h” en $\|\vec{a}\|$, se obtiene el módulo de un vector en 3D:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ejemplo 7

Sean el vector $\vec{v}(1, -2, 3)$, calcular el módulo del vector.

Aplicando la fórmula de módulo de un vector:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{v}\| = 3.74$$

2.5. Cálculo de módulo de vectores en GeoGebra

En el caso de dimensión 2D, el cálculo del módulo o magnitud de vectores se obtiene colocando los dos puntos que forman el vector con el comando punto.



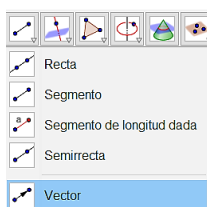
El primer punto se traza en el origen y el segundo es la parte terminal del vector y posteriormente se utiliza el comando de vector.



Posteriormente se usa el comando de segmento y se coloca desde el punto inicial hasta el final del vector, marcando la longitud, que en este caso es el módulo del vector.



Para la dimensión 3D en la barra de entrada se escriben los puntos que forman el vector, siempre se pone el primer punto con coordenadas (0, 0, 0). Posteriormente se utiliza el comando de vector.



Una vez que se tiene el vector se utiliza el comando de distancia o longitud y se obtiene el módulo o magnitud del vector.



Ejemplo 8

Graficar en GeoGebra el vector $\vec{u} (-1, -8)$ en 2D y el vector $\vec{v} (1, -2, 3)$ en 3D y calcular su módulo.

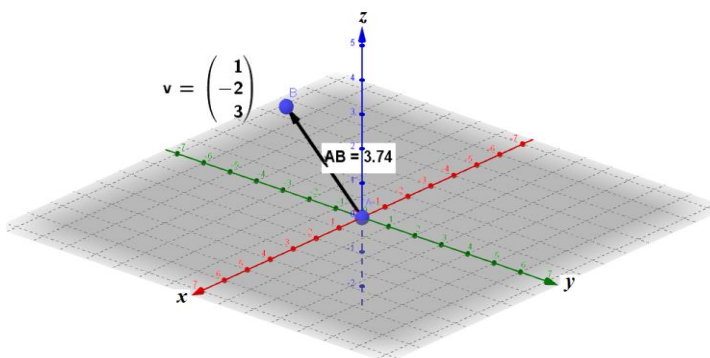
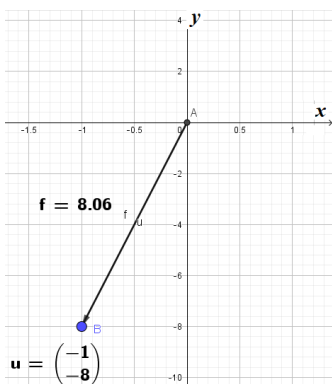


Fig. 17. Cálculo de módulos 2D y 3D en GeoGebra

Como se observa en la figura 17, los módulos fueron iguales que los calculados analíticamente.

2.6. Operaciones de vectores

2.6.1. Adición de vectores

La adición de dos o más vectores se define gráficamente (ver figura 18) por la *ley del polígono* desde el extremo de cualquiera de ellos se traza un segundo vector (conservando su magnitud y

dirección), partiendo del extremo de éste se traza un tercer vector, y así sucesivamente. Una vez que se dibujan todos los vectores, el vector suma, o vector *resultante* (en la figura), es aquel que va del origen del primero al extremo del último.

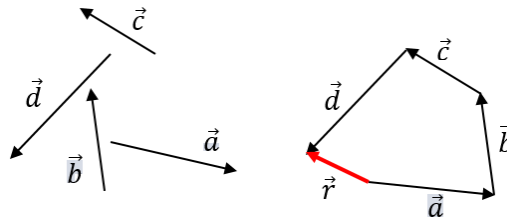


Fig. 18. Suma de vectores gráficamente por el método del polígono

En el caso de que se sumen sólo dos vectores, el polígono resulta ser un triángulo (figura 19). Si los dos vectores se dibujan de manera que sus orígenes coincidan, el vector resultante será la diagonal del paralelogramo definido por los dos vectores. En tal caso se habla de la *regla del paralelogramo* para sumar dos vectores.

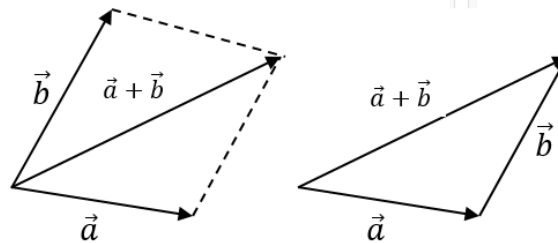


Fig. 19. Suma de vectores gráficamente por el método del paralelograma y polígono

La suma de los vectores $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$ se resuelven analíticamente como:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Ejemplo 9

Sean los vectores $\vec{a} (3, 1, 2)$ y $\vec{b} (3, 0, 4)$, realizar la suma con los dos vectores.

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 3, 1 + 0, 2 + 4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (6, 1, 6)$$

La representación gráfica de los vectores se muestra en la figura 20.

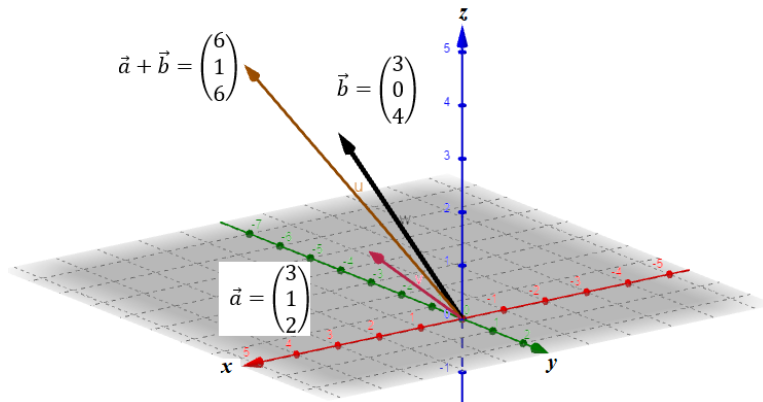


Fig. 20. Suma de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2.6.2. Sustracción de vectores

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores, entonces $(\vec{a} - \vec{b})$ debe ser el vector que ha de sumarse a $\vec{b}$ para obtener $\vec{a}$. De esta manera (ver figura 21), si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen origen común, entonces $(\vec{a} - \vec{b})$, deberá ser el vector que va del extremo de $\vec{b}$ al extremo de $\vec{a}$, ya que $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$.

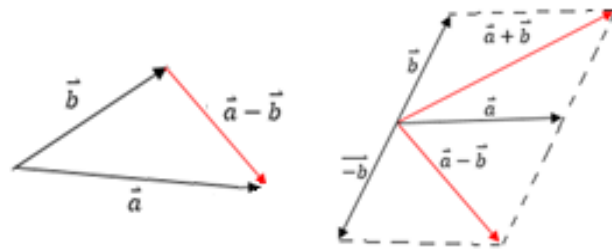


Fig. 21. Sustracción de vectores por el método del paralelograma 1

No debemos perder de vista que en la resta el minuendo es donde se juntan las flechas, como se muestra en la figura.

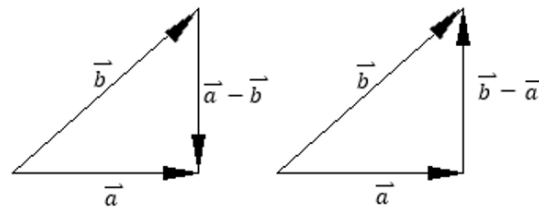


Fig. 22. Sustracción de vectores por el método del paralelograma 2

La sustracción de los vectores $\vec{a} (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} (b_1, b_2, b_3)$ se resuelven analíticamente como:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Ejemplo 10

Sean los vectores $\vec{a} (3, 1, 2)$ y $\vec{b} (3, 0, 4)$, realizar la resta.

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (3 - 3, 1 - 0, 2 - 4) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (0, 1, -2)\end{aligned}$$

La representación gráfica de los vectores se muestra en la figura 23, en la que se observa al vector $\vec{a} - \vec{b}$ obtenido por el método del paralelograma y al vector posición que es el mismo.

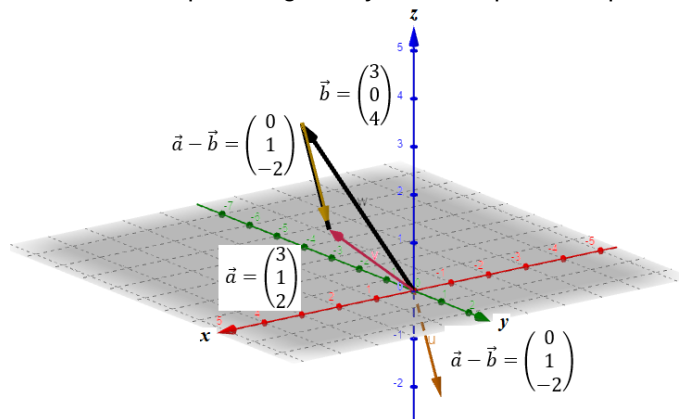


Fig. 23. Resta de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2.6.3. Multiplicación escalar-vector

Observemos que, de acuerdo con la definición dada para la adición de dos vectores, $\vec{a} + \vec{a}$ será un vector con la misma dirección que $\vec{a}$, pero cuya magnitud será el doble que la de $\vec{a}$. Similarmente, $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{a}$, pero con la magnitud del triple de $\vec{a}$.

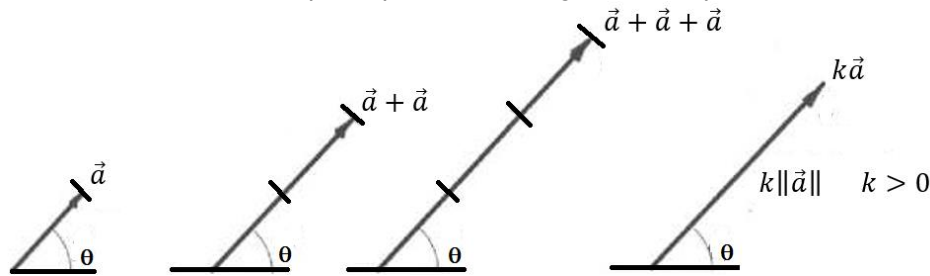


Fig. 24. Multiplicación de vectores por un escalar gráficamente

Como además cabe esperar que $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$ y $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$, resulta razonable proponer que, siendo $\vec{a}$ un vector cualquiera, y k un escalar (número real) positivo, $k\vec{a}$ sea un vector con la misma dirección que $\vec{a}$ y cuya magnitud sea $k \|\vec{a}\|$ (k veces la magnitud de $\vec{a}$).

En si la multiplicación de un escalar por un vector, el escalar multiplica a cada componente del vector como se ve en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) & \vec{a} &= (3, -4, 5) \\ k\vec{a} &= k(a_1, a_2, a_3) & 2\vec{a} &= (6, -8, 10) \\ k\vec{a} &= (ka_1, ka_2, ka_3) & -3\vec{a} &= (-9, 12, -15) \end{aligned}$$

Ahora debemos preguntarnos cómo debe ser $k\vec{a}$ para los casos en los que el escalar k sea cero o negativo. Primeramente, para definir un vector *cero* ($\vec{0}$), se espera que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (ver figura 25), lo que implica que tal vector tenga magnitud cero, de manera que su origen y extremo deben ser el mismo punto.

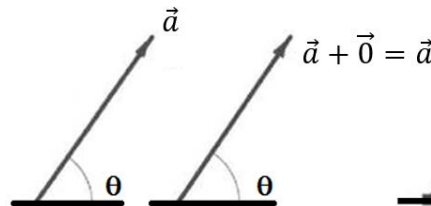


Fig. 25. Suma con vector nulo

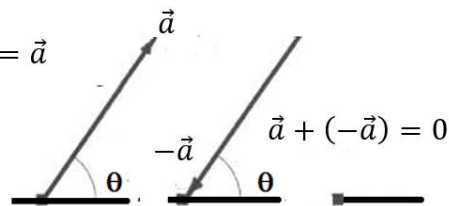


Fig.26. Vector y su opuesto

Por otra parte, dado cualquier vector $\vec{a}$, el vector $-\vec{a}$ se define como aquel para el cual $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, de manera que $-\vec{a}$ debe ser el vector que tiene la misma magnitud que $\vec{a}$ pero la dirección opuesta (ver figura 26).

Ejemplo 11

Sean los vectores:

$$\vec{a} = (3, 2, 1) \quad \vec{b} = (4, 0, -2) \quad \vec{c} = (3, -2, 0)$$

Calcular:

- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
- $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$
- $-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$
- $\|\vec{a}\|$

e) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$

f) $\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\|$

Solución

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Para sumar dos o más vectores únicamente se suman sus componentes

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3 + 4 + 3, 2 + 0 - 2, 1 - 2 + 0)$$

Entonces

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (10, 0, -1)$$

En la figura 27 se observa la representación gráfica de los vectores; en la primera figura se grafican los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que parten del origen, pero en la siguiente imagen se representan los vectores uno continuo de otro siguiendo el método del polígono para obtener el vector resultante $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (10, 0, -1)$.

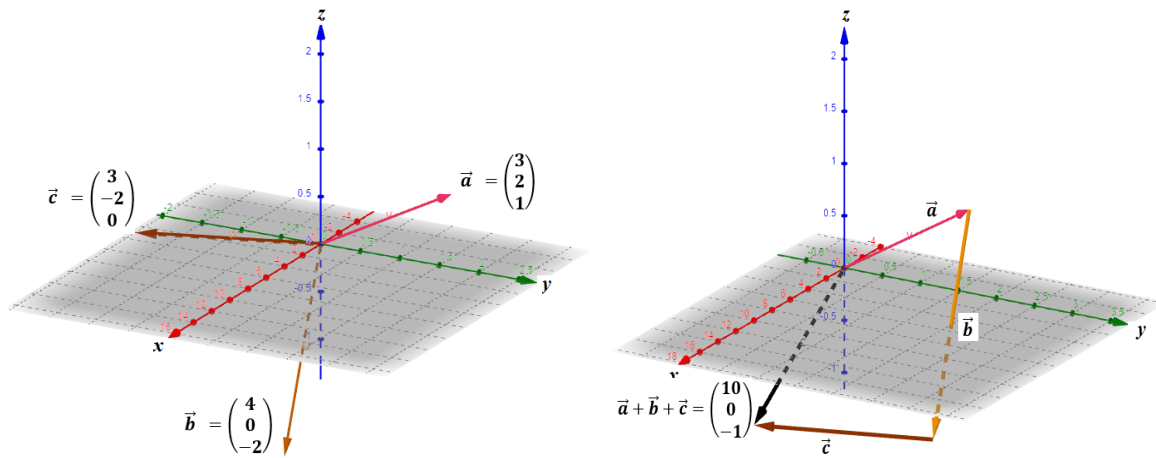


Fig. 27. Representación gráfica de la suma de los vectores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

Multiplicando cada vector por los escalares correspondientes

$$2\vec{a} = (6, 4, 2)$$

$$3\vec{b} = (12, 0, -6)$$

$$-2\vec{c} = (-6, 4, 0)$$

Entonces:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (6, 4, 2) + (12, 0, -6) + (-6, 4, 0)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (6 + 12 - 6, 4 + 0 + 4, 2 - 6 + 0)$$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (12, 8, -4)$$

En la figura 28 se observa la representación gráfica de los vectores; en la primera figura se grafican los vectores $2\vec{a}$, $3\vec{b}$ y $-2\vec{c}$ que parten del origen, pero en la siguiente imagen se representan los vectores uno continuo de otro siguiendo el método del polígono para obtener el vector resultante $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (12, 8, -4)$.

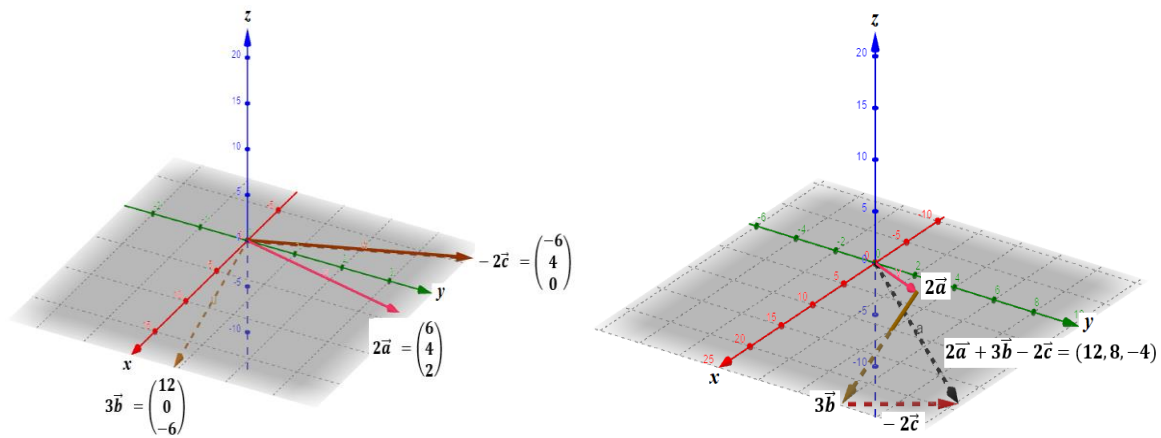


Fig. 28. Representación gráfica de la suma de los vectores $2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

c) $-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$

Multiplicando cada vector por el escalar correspondiente

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad 2\vec{b} = (8, 0, -4) \quad \vec{c} = (3, -2, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} = -\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) + (8, 0, -4) - (3, -2, 0)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \left(-\frac{3}{2} + 8 - 3, \quad -1 + 0 + 2, \quad -\frac{1}{2} - 4 - 0\right)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \left(\frac{7}{2}, 1, -\frac{9}{2}\right)$$

En la figura 29 se observa la representación gráfica de los vectores; en la primera figura se grafican los vectores $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $2\vec{b}$ y $-\vec{c}$ que parten del origen, pero en la siguiente imagen se representan los vectores uno continuo de otro siguiendo el método del polígono para obtener el vector resultante

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \left(\frac{7}{2}, 1, -\frac{9}{2}\right).$$

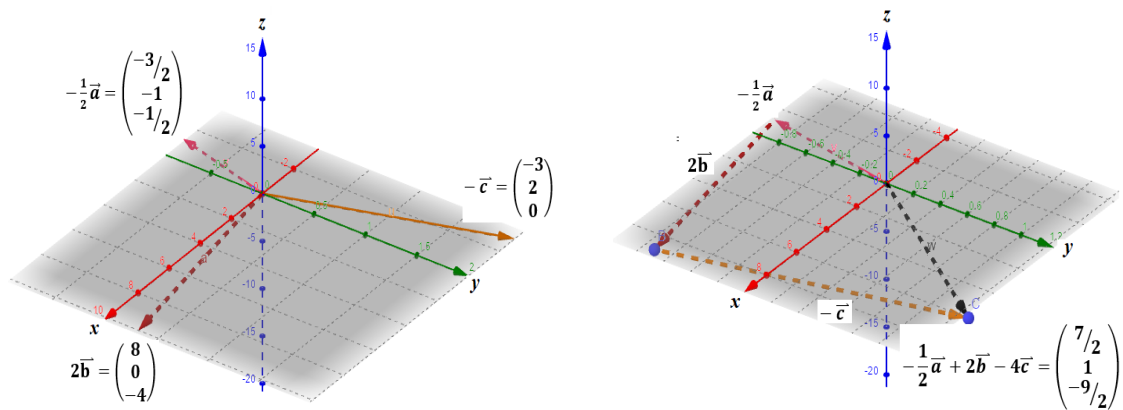


Fig. 29. Representación gráfica de la suma de los vectores $-\frac{1}{2}\vec{a}$, $2\vec{b}$ y $\vec{c}$

d) $\|\vec{a}\|$

Para calcular el módulo del vector aplicamos la ecuación:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (1)^2}$$

Simplificando

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{9 + 4 + 1}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{14} \quad \|\vec{a}\| = 3.7417$$

En la figura 30, se muestra el vector y el valor del módulo obtenido en GeoGebra como se explicó en la sección 2.5.

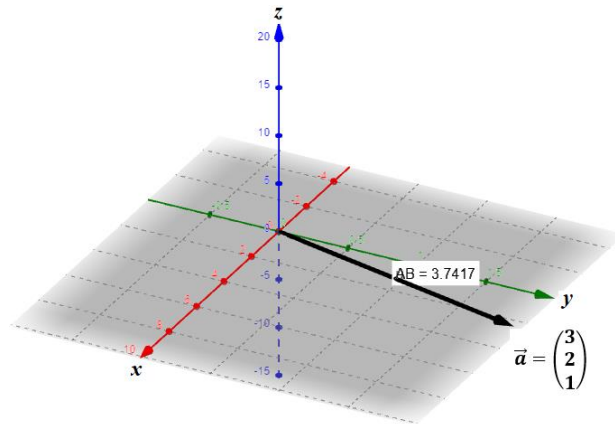


Fig. 30. Representación gráfica del vector $\vec{a}$ y cálculo del módulo

e) $\|\vec{a} + \vec{b}\|$

Primero obtenemos la suma de los vectores $\vec{a} + \vec{b}$

Sustituyendo valores

$$\vec{a} = (3, 2, 1) \quad \vec{b} = (4, 0, -2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 4, \quad 2 + 0, \quad 1 - 2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (7, 2, -1)$$

Calculando el módulo del nuevo vector

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{(7)^2 + (2)^2 + (-1)^2}$$

Simplificando

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{49 + 4 + 1}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{54} \quad \|\vec{a} + \vec{b}\| = 7.3485$$

En la figura 31, se muestra el vector y el valor del módulo obtenido en GeoGebra como se explicó en la sección 2.5.

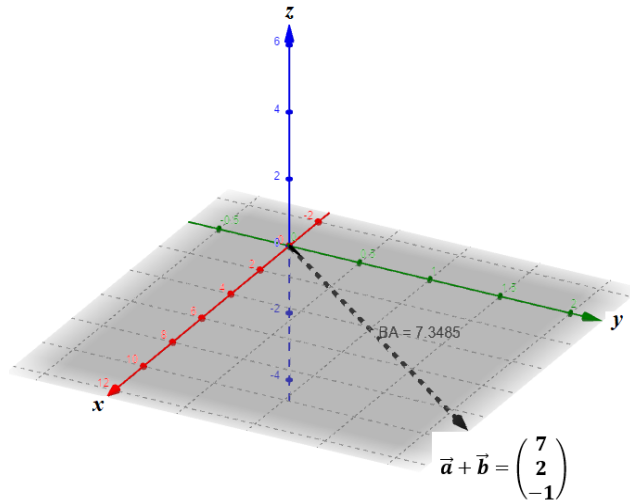


Fig. 31. Representación gráfica del vector $(\vec{a} + \vec{b})$ y cálculo del módulo

f) $\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\|$

Del inciso “b” se tiene:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (12, 8, -4)$$

De la misma forma que el ejemplo anterior

$$\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\| = \sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-4)^2}$$

Simplificando

$$\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\| = \sqrt{144 + 64 + 16}$$

$$\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\| = \sqrt{224}$$

$$\|2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\| = 14.9666$$

En la figura 32, se muestra el vector y el valor del módulo obtenido en GeoGebra como se explicó en la sección 2.5.

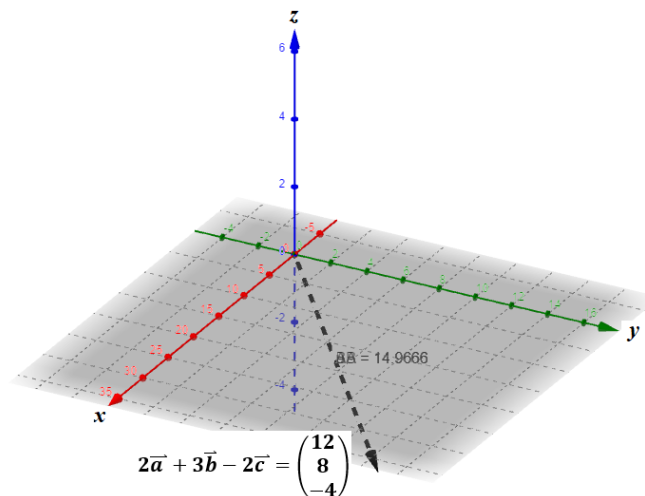


Fig. 32. Representación gráfica del vector $(2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c})$ y cálculo del módulo

2.7. Vector unitario

Un **vector unitario** es todo vector cuya magnitud sea la unidad que conserva la misma dirección y sentido del vector original. Ahora bien, de acuerdo con la definición dada para la multiplicación de un escalar por un vector, si $\vec{a}$ es un vector cualquiera, no nulo, y $\vec{a}_u$ es el vector unitario cuya dirección es la de $\vec{a}$, entonces $\|\vec{a}_u\|$ será un vector cuya magnitud es igual a uno con la dirección del vector original, es decir

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}_u\|$$

De la ecuación anterior, despejamos $\vec{a}_u$

$$\vec{a}_u = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

O bien

$$\vec{a}_u = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

La primera ecuación es muy importante, y nos indica que cualquier vector puede expresarse como el producto de su magnitud y el vector unitario con la misma dirección que el vector dado.

Demostración

Sea el vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Para el vector unitario se puede utilizar

$$\vec{a}_u = \frac{1}{\|\vec{a}\|} \vec{a}$$

O bien

$$\vec{a}_u = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

Sustituyendo

$$\vec{a}_u = \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)$$

El módulo de $\vec{a}$ se calcula aplicando la ecuación

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\|\vec{a}\|^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right)^2$$

Simplificando

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

De acuerdo a lo anterior

$$\|\vec{a}_u\| = \sqrt{\left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right)^2 + \left(\frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)^2}$$

$$\|\vec{a}_u\| = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\|\vec{a}\|^2}}$$

$$\|\vec{a}_u\| = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\|\vec{a}_u\| = \sqrt{1}$$

$$\|\vec{a}_u\| = 1$$

Ejemplo 12

Sea el vector $\vec{a} = (5, -4, 3)$ obtenga su vector unitario

Solución:

Calculando el módulo del vector aplicando la ecuación

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (3)^2}$$

Simplificando

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{25 + 16 + 9}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{50}$$

$$\|\vec{a}\| = 7.0711 \text{ unidades}$$

Como el vector unitario se obtiene aplicando la ecuación

$$\vec{a}_u = \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)$$

Sustituyendo valores

$$\vec{a}_u = \left(\frac{5}{\sqrt{50}}, \frac{-4}{\sqrt{50}}, \frac{3}{\sqrt{50}} \right)$$

$$\vec{a}_u = (0.7071, \quad 0.5657, \quad 0.4243)$$

Se observa que el vector unitario es un vector de magnitud uno en la misma dirección del vector original

2.7.1. Vector unitario en GeoGebra

Introducir en la barra de entrada el comando **Vector(<Punto>)** y posteriormente **VectorUnitario(<Objeto>)**.

Ejemplo 13

Calcular y graficar el vector $\vec{a} = (5, -4, 3)$ con su vector unitario.

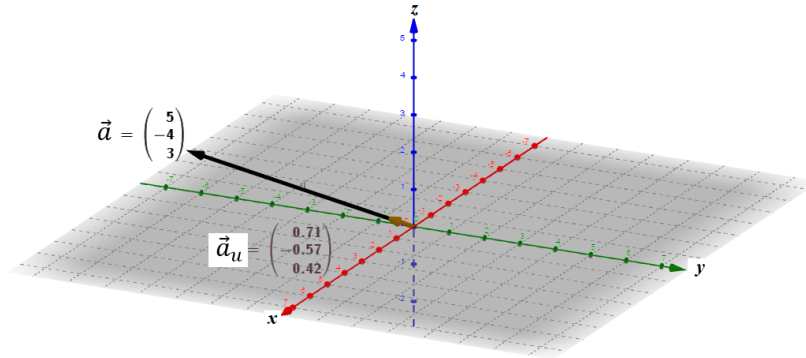


Fig. 33. Representación gráfica y cálculo de vector unitario del ejemplo 13 en GeoGebra

Como se observa en la figura 33, el vector unitario calculado en GeoGebra es igual que el obtenido analíticamente.

Ejemplo 14

Una partícula se mueve con una velocidad de 5 m/s , en la dirección opuesta del vector $\vec{a} = (2, -3, 5)$. Determine las componentes del vector velocidad.

Solución:

Conocemos las componentes del vector $\vec{a} = (2, -3, 5)$, como la partícula se mueve en la dirección opuesta del vector; calculamos el vector unitario y luego multiplicamos por -5 .

Calculando el módulo del vector

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{38}$$

Dividiendo cada componente del vector entre el valor de su módulo

$$\vec{a}_u = \left(\frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{-3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}} \right)$$

$$\vec{a}_u = (0.3244, -0.4867, 0.8111)$$

Multiplicando cada componente por el escalar -5 que es la velocidad de la partícula.

$$\vec{V} = -5 \left(\frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{-3}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}} \right)$$

O bien

$$\vec{V} = \left(\frac{-10}{\sqrt{38}}, \frac{15}{\sqrt{38}}, \frac{-25}{\sqrt{38}} \right)$$

$$\vec{V} = (-1.6222, 2.4333, -4.0555)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para obtener el vector unitario en GeoGebra, en la figura 34 se muestran los vectores correspondientes.

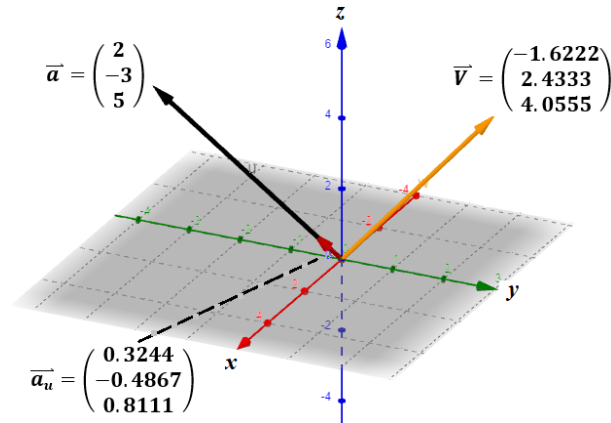


Fig. 34. Representación gráfica y cálculo de vector unitario del ejemplo 14 en GeoGebra

Como se muestra en la figura 34 los valores de los vectores obtenidos en GeoGebra es igual que el obtenido analíticamente.

Ejemplo 15

Determinar un vector $\vec{q}$ en la misma magnitud que el vector $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ y en la dirección opuesta que el vector $\vec{d}$ y $\vec{e}$, donde:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (2, -3, 1) \\ \vec{b} &= (-4, 1, -2) \\ \vec{c} &= (3, -2, 1) \\ \vec{d} &= (2, -1, 3) \\ \vec{e} &= (8, 1, 5)\end{aligned}$$

Solución:

Como se requiere un vector en la dirección opuesta que el vector resultante de $\vec{d} + \vec{e}$, calculamos su vector unitario.

$$\vec{d} + \vec{e} = (10, 0, 8)$$

$$|\vec{d} + \vec{e}| = \sqrt{10^2 + 0^2 + 8^2}$$

$$|\vec{d} + \vec{e}| = \sqrt{164}$$

$$(\vec{d} + \vec{e})_u = \left(\frac{10}{\sqrt{164}}, \frac{0}{\sqrt{164}}, \frac{8}{\sqrt{164}} \right)$$

La dirección opuesta es

$$(\vec{d} + \vec{e})_u = \left(-\frac{10}{\sqrt{164}}, \frac{0}{\sqrt{164}}, -\frac{8}{\sqrt{164}} \right)$$

Como se requiere que tenga la magnitud del vector $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

Calculamos

$$4\vec{a} = (8, -12, 4)$$

$$-3\vec{b} = (12, -3, 6)$$

$$\vec{c} = (3, -2, 1)$$

Sumando

$$\vec{p} = (23, -17, 11)$$

Calculando su módulo

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{23^2 + 17^2 + 11^2}$$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{529 + 289 + 121}$$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{939}$$

Como los vectores $\vec{q} = \vec{p}$ en magnitud, pero en dirección opuesta a vector $\vec{d}$ y $\vec{e}$, entonces multiplicamos la magnitud de $\vec{p}$ por el vector unitario opuesto $(\vec{d} + \vec{e})_u$

$$\vec{q} = \sqrt{939} \left(\frac{-10}{\sqrt{164}}, \frac{0}{\sqrt{164}}, \frac{-8}{\sqrt{164}} \right)$$

Simplificando

$$\vec{q} = (-23.93, 0, -18.14)$$

En la figura 35 se muestra la representación gráfica del vector $\vec{q}$.

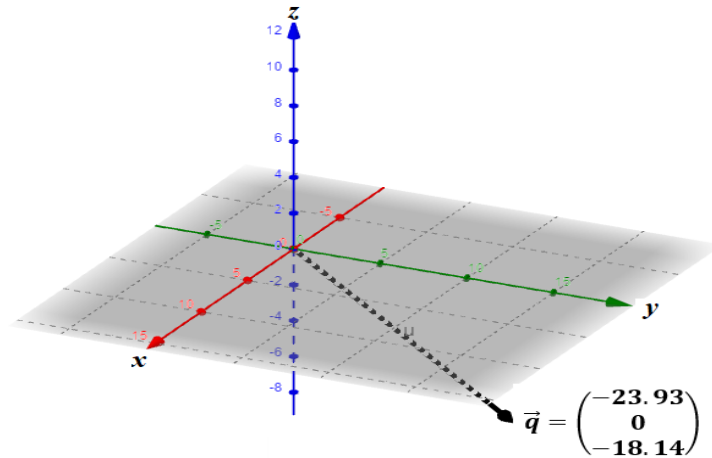


Fig. 35. Representación gráfica del vector $\vec{q}$ del ejemplo 15

3. PRODUCTO ESCALAR

El producto escalar, también conocido como producto interno, producto interior o producto punto. Para realizar esta operación se requieren dos vectores y da como resultado un escalar, el cual resulta de la sumatoria de los productos de las correspondientes componentes de cada vector.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + \dots + a_n b_n$$

Ejemplo 16

Si $\vec{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\vec{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcular

a) $\vec{a} + 5\vec{b}$ y

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Solución:

$$a) \vec{a} + 5\vec{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} + 5(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\vec{a} + 5\vec{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{i} - \mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\vec{a} + 5\vec{b} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(1) + 3(-1) - 1(1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 - 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$$

El producto escalar es conmutativo y distributivo con respecto a la suma, es decir, si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores cualesquiera, ya sea en el plano, o en el espacio, entonces, se cumple:

$$a) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$c) k\vec{a} \cdot \lambda\vec{b} = k\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Ejemplo 17

Sean los vectores

$$\vec{a} = (3, 2, -4) \quad \vec{b} = (6, -3, 1)$$

Realizar la siguiente operación $3\vec{a} \cdot 6\vec{b}$

Solución:

Realizamos el producto de un escalar por un vector

$$3\vec{a} = (9, 6, -12)$$

$$6\vec{b} = (36, -18, 6)$$

$$3\vec{a} \cdot 6\vec{b} = (9, 6, -12) \cdot (36, -18, 6)$$

$$3\vec{a} \cdot 6\vec{b} = (9)(36) + (6)(-18) + (-12)(6)$$

$$3\vec{a} \cdot 6\vec{b} = 324 - 108 - 72$$

$$3\vec{a} \cdot 6\vec{b} = 144$$

Ejemplo 18

Sean los vectores

$$\vec{a} = (5, -1, 4)$$

$$\vec{b} = (0, -3, 2)$$

$$\vec{c} = (1, 7, 5)$$

Realizar la operación

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Solución

$$\vec{b} + \vec{c} = (1, 4, 7)$$

Entonces

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (5, -1, 4) \cdot (1, 4, 7)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 5 - 4 + 28$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 29$$

Del otro lado de la igualdad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = (5, -1, 4) \cdot (0, -3, 2) + (5, -1, 4) \cdot (1, 7, 5)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 + 3 + 8 + 5 - 7 + 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 29$$

3.1. Producto escalar en GeoGebra

El cálculo del producto escalar se realiza introduciendo en la barra de entrada **ProductoEscalar(<Vector>,<Vector>)**.

Ejemplo 19

Calcular en GeoGebra $3\vec{a} \cdot 6\vec{b}$, donde, $\vec{a} = (3, 2, -4)$ y $\vec{b} = (6, -3, 1)$ (Ejemplo 15).

En la barra de entrada se introduce la siguiente instrucción: **ProductoEscalar(3(3,2,-4),6(6,-3,1))**.

El resultado es **144**, que fue el mismo del ejemplo 17.

3.2. Ortogonalidad entre dos vectores

Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman los catetos de un triángulo rectángulo, como se observa en la figura 36.

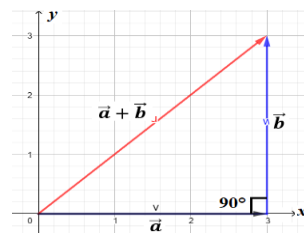


Fig. 36. Vectores ortogonales

Geoméricamente se puede establecer que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales (perpendiculares), si y sólo si el triángulo descrito cumple con la siguiente condición.

$$(\|\vec{a}\|)^2 + (\|\vec{b}\|)^2 = (\|\vec{a} + \vec{b}\|)^2$$

Como

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad y \quad (\|\vec{a}\|)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \quad y \quad (\|\vec{b}\|)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$(\|\vec{a} + \vec{b}\|)^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2$$

Sustituyendo los vectores por sus componentes y desarrollando los binomios

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 + 2a_3b_3 + b_3^2$$

Simplificando

$$0 = 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\frac{0}{2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Como

$$\frac{0}{2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Si observamos el segundo miembro de la igualdad corresponde al producto escalar.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + \dots + a_n b_n$$

Entonces

$$0 = \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{o también} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Queda demostrado que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, no debemos perder de vista que todo vector nulo es ortogonal a todo vector.

Ejemplo 20

Determinar cuáles de los siguientes vectores son ortogonales

$$\vec{a} = (-2, 6, 4) \quad y \quad \vec{b} = \left(3, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{c} = (2, -5, 1) \quad y \quad \vec{d} = (-3, 0, 6)$$

$$\vec{e} = (3, -1) \quad y \quad \vec{f} = (4, -12)$$

Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 3 + 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \neq 0 \quad \text{No son ortogonales}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = -6 + 0 + 6$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \quad \text{son ortogonales}$$

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = 12 + 12 + 0$$

$$\vec{e} \cdot \vec{f} = 24 \neq 0 \quad \text{No son ortogonales}$$

En la figura 37 se representan los vectores del ejemplo 20.

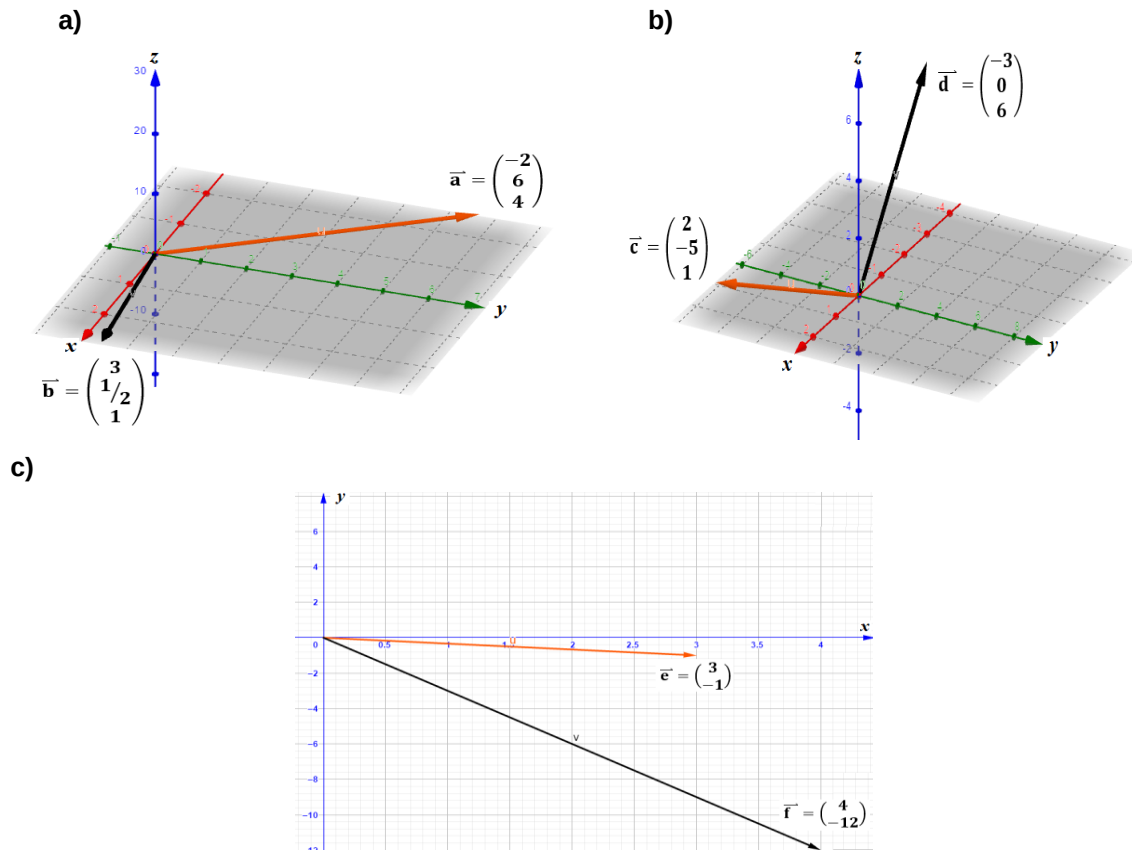


Fig. 37. Representación gráfica de vectores a) No ortogonal en 3D b) Ortogonal en 3D y c) No ortogonal en 2D

En la figura 37 se observa que sólo la pareja de vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son ortogonales.

3.3. Componente escalar sobre otro vector

Sean dos vectores cualesquiera $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en un espacio de tres dimensiones. Consideremos al vector $\vec{b}$, al que le corresponde un vector unitario $\vec{b}_u$ en la misma dirección del vector original.

Un escalar k de tal manera que el vector $\vec{b} - k\vec{b}_u$ sea ortogonal al vector $\vec{b}$.

Geométricamente se muestran los vectores en la figura 38.

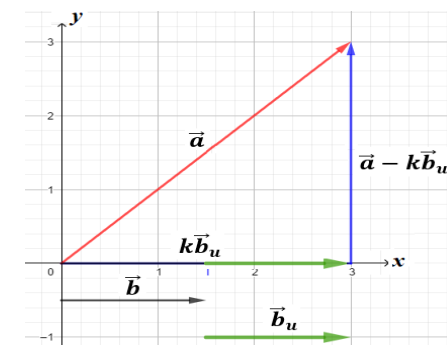


Fig. 38. Componente escalar sobre un vector

Interpretando la figura, tenemos que, para que dos vectores sean perpendiculares u ortogonales se tiene que cumplir que:

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} - k \vec{b}_u) = 0$$

Desarrollando el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot k \vec{b}_u = 0$$

Despejando

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot k \vec{b}_u$$

Recordando

$$\vec{b}_u = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

$$\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b}_u = \vec{b} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Sustituyendo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \vec{b} \cdot \vec{b}_u$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \vec{b} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Multiplicando

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Simplificando

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = k \frac{\|\vec{b}\|^2}{\|\vec{b}\|}$$

Despejando

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Expresión que se conoce como componente escalar del vector, la cual se representa como:

$$Comp. Esc. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Se lee como: la componente escalar del vector $\vec{a}$ con base al vector $\vec{b}$, es igual al producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sobre el módulo del vector base. La solución es un escalar, el cual representa el tamaño o módulo del vector base sobre el cual se tiene que proyectar el vector $\vec{a}$ en forma ortogonal. Si queremos obtener la componente escalar del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$, la ecuación será:

$$Comp. Esc. \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

3.4. Componente vectorial sobre otro vector

La componente vectorial de un vector $\vec{a}$ sobre otro vector $\vec{b}$ la cual se simboliza $Comp. Vec. \vec{a}_{\vec{b}}$ es un vector, el cual resulta de multiplicar la componente escalar del vector $\vec{a}$ con base el vector $\vec{b}$ por el vector unitario de la base, esto es:

$$Comp. Vec. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \vec{b}_u$$

Sustituyendo

$$Comp. Vec. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Simplificando

$$Comp. Vec. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

Si queremos obtener la componente vectorial del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$, la ecuación será:

$$Comp. Vec. \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Ejemplo 21

Sean los vectores $\vec{a} = (3,5)$ $\vec{b} = (-2,4)$. Calcule las componentes escalar y vectorial del vector $\vec{a}$ sobre otro vector $\vec{b}$ y en forma recíproca.

Solución:

Cálculo de la componente escalar, aplicamos la ecuación: $Comp. Esc. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

Calculamos el módulo del vector base aplicando la ecuación:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 16}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{20}$$

Calculando el producto escalar entre ambos vectores

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3,5) \cdot (-2,4)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 + 20$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$$

Sustituyendo en la ecuación

$$Comp. Esc. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

$$Comp. Esc. \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{14}{\sqrt{20}}$$

$$Comp. Esc. \vec{a}_{\vec{b}} = 3.13$$

Cálculo de la componente vectorial, aplicando la ecuación:

$$\text{Comp. Vec. } \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{Comp. Vec. } \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{14}{(\sqrt{20})^2} (-2, 4)$$

$$\text{Comp. Vec. } \vec{a}_{\vec{b}} = \left(\frac{(14)(-2)}{20}, \frac{(14)(4)}{20} \right)$$

Simplificando

$$\text{Comp. Vec. } \vec{a}_{\vec{b}} = (-1.40, 2.80)$$

En forma recíproca se calculará la componente escalar del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$, aplicando la ecuación

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

Calculando el módulo del vector $\vec{a}$, aplicando la ecuación.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$$

Simplificando

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{9 + 25}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{34}$$

Sustituyendo valores

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{14}{\sqrt{34}}$$

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = 2.4$$

Calculo de la componente vectorial aplicando la ecuación:

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Sustituyendo valores

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{14}{(\sqrt{34})^2} (3, 5)$$

Simplificando

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \left(\left(\frac{14}{34} \right) (3), \left(\frac{14}{34} \right) (5) \right)$$

Simplificando

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = (1.23, 2.058)$$

Gráficamente tenemos:

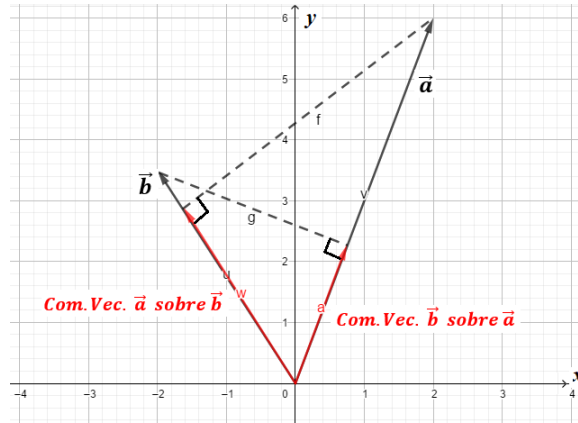


Fig. 39. Componente vectorial sobre un vector

Ejemplo 22

Sean los vectores $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ $\vec{b} = (5, -4, 1)$. Calcular su componente escalar y componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.

Solución:

Calculando el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 - 12 + 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$$

Calculando el módulo del vector $\vec{a}$, aplicando la ecuación:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1 + 9 + 4}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{14}$$

Cálculo de la componente escalar

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

Sustituyendo valores

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{-15}{\sqrt{14}}$$

$$\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = -4.0089$$

Cálculo de la componente vectorial aplicando la ecuación:

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

Sustituyendo valores

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{-15}{(\sqrt{14})^2} (-1, 3, 2)$$

Simplificando

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \left(\frac{15}{14}, \frac{-45}{14}, \frac{-30}{14} \right)$$

$$\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = (1.071, -3.2143, -2.1429)$$

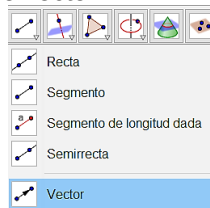
3.4.1. Componente vectorial sobre otro vector en GeoGebra

El cálculo y la gráfica de la componente vectorial de un vector se obtienen con el procedimiento del siguiente ejemplo:

Ejemplo 23

Dados los vectores $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ $\vec{b} = (5, -4, 1)$, apoyándose de GeoGebra obtener la componente escalar y componente vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$. Realizar el gráfico correspondiente de los vectores.

Para la dimensión 3D en la barra de entrada se escriben tres puntos $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 3, 2)$ y $C(5, -4, 1)$. El vector $\vec{a}$ se forma con los puntos A y B . El vector $\vec{b}$ se forma con los puntos A y C . En ambos casos se utiliza el comando de vector.



Se calcula el producto escalar con el comando **ProductoEscalar((-1, 3, 2), (5, -4, 1))**.

Una vez que se tienen los vectores se utiliza el comando de distancia o longitud y se selecciona el vector $\vec{a}$ para obtener el módulo o magnitud del vector.



La $\text{Comp. Esc. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$, se calcula introduciendo en la entrada la operación de los resultados de $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$, que para este ejercicio es: $\left(\frac{-15}{3.74} \right)$.

Por último la componente vectorial $\text{Comp. Vec. } \vec{b}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$ se obtiene utilizando el comando **Vector((15/(3.74^2))(-1, 3, 2))**.

En la Fig. 40 se muestra el resultado de obtener la componente vectorial en GeoGebra, que es el mismo resultado del ejemplo 22.

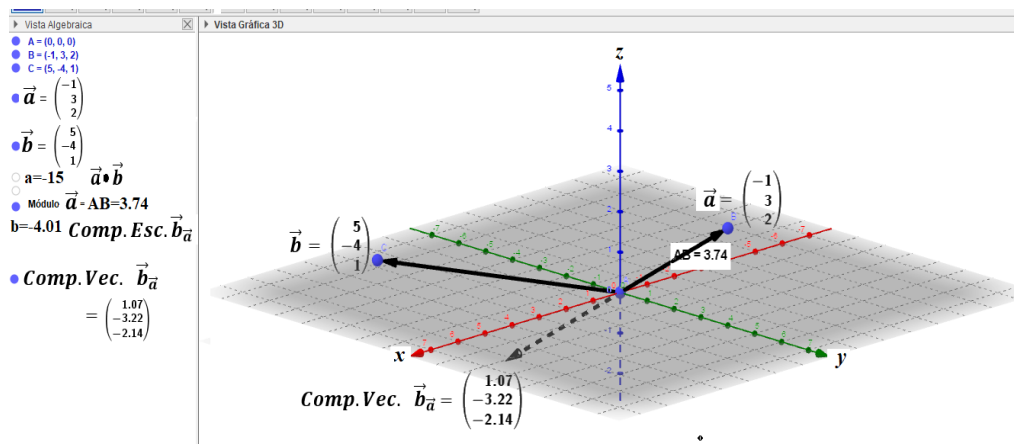


Fig. 40. Componente vectorial en GeoGebra del ejemplo 23

3.5. Ángulo entre dos vectores aplicando producto escalar

De la siguiente figura:

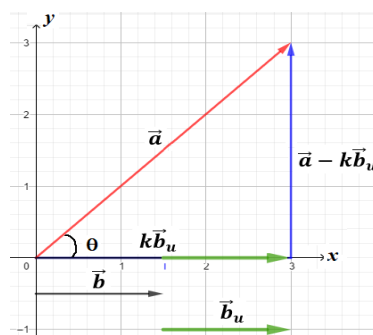


Fig. 41. Ángulo entre dos vectores

De la cual obtenemos:

$$\cos(\theta) = \frac{k\vec{b}_u}{\vec{a}}$$

Como el coseno de cualquier ángulo es un escalar y no un vector, entonces en el numerador y denominador calculamos su módulo, esto es:

$$\cos(\theta) = \frac{\|k\vec{b}_u\|}{\|\vec{a}\|}$$

Como k es una constante que puede salir del módulo:

$$\cos(\theta) = \frac{k\|\vec{b}_u\|}{\|\vec{a}\|}$$

Pero k es la componente escalar, definida por la relación:

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|}$$

Sustituyendo en la ecuación de coseno, así como la relación de vector unitario

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}}{\|\vec{a}\|}$$

Simplificando:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{b}\| \|\vec{b}\|}}{\|\vec{a}\|}$$

Como el módulo se calcula de un vector y no de un escalar, entonces el módulo del módulo sigue siendo el mismo módulo, esto es.

$$\|\vec{b}\| \|\|\vec{b}\|\| = \|\vec{b}\|$$

$$\|\|\vec{b}\|\| = \|\vec{b}\|$$

Simplificando:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} \|\vec{b}\|}{\|\vec{b}\| \|\vec{b}\| \|\vec{a}\|}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\| \|\vec{a}\|}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\| \|\vec{a}\|} \right)$$

Ecuación para obtener el ángulo entre dos vectores

Considerando la ecuación:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\| \|\vec{a}\|}$$

Despejando:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\theta)$$

La ecuación anterior nos permite calcular el producto escalar cuando conocemos el ángulo entre los dos vectores.

Ejemplo 24

Sean los vectores: $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ $\vec{b} = (5 - 4, 1)$. Calcular el ángulo que se forma entre ambos vectores.

Solución:

Calculamos su producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 - 12 + 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$$

Calculamos el módulo de cada uno de los vectores:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (2)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1 + 9 + 4}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Sustituyendo valores:

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (1)^2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{25 + 16 + 1}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{42}$$

Aplicando la ecuación:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\| \|\vec{a}\|} \right)$$

Sustituyendo valores:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-15}{(\sqrt{14})(\sqrt{42})} \right)$$

Realizando los cálculos:

$\theta = 128.2132^\circ$, que es un ángulo que se localiza en el segundo cuadrante

3.5.1. Ángulo entre dos vectores con GeoGebra

En GeoGebra se introducen los vectores en la Entrada con el comando **Vector(<Punto>)**. Posteriormente se elige en la ventana ángulo y se eligen los dos vectores.



Y finalmente se seleccionan los dos vectores.

Ejemplo 25

Dados los vectores del problema 20 $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ y $\vec{b} = (5, -4, 1)$, obtener el ángulo que se forma entre ambos vectores utilizando GeoGebra.

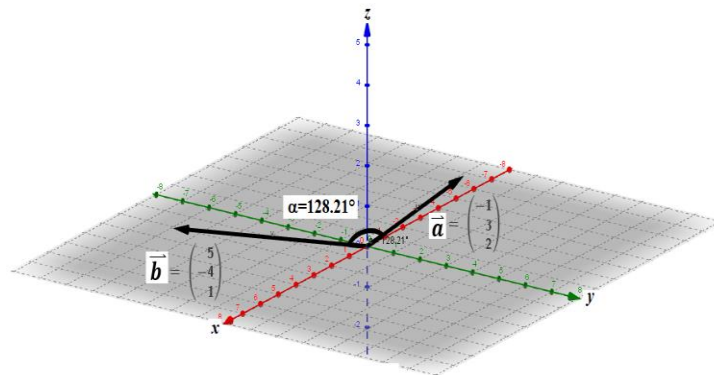


Fig. 42. Cálculo de ángulo entre dos vectores empleando GeoGebra

Como se observa en la Fig.42, el valor del ángulo con GeoGebra es igual al obtenido analíticamente en el ejemplo 24.

3.6. Ángulo de un vector con los vectores unitarios (Cosenos y ángulos directores)

Sea el vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Este se puede expresar en función de sus vectores unitarios

$$\vec{a} = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$

Sacando como factor cada componente

$$\vec{a} = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$$

Si designamos a: $\vec{i} = (1, 0, 0)$ $\vec{j} = (0, 1, 0)$ $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Geométricamente los vectores unitarios se representan

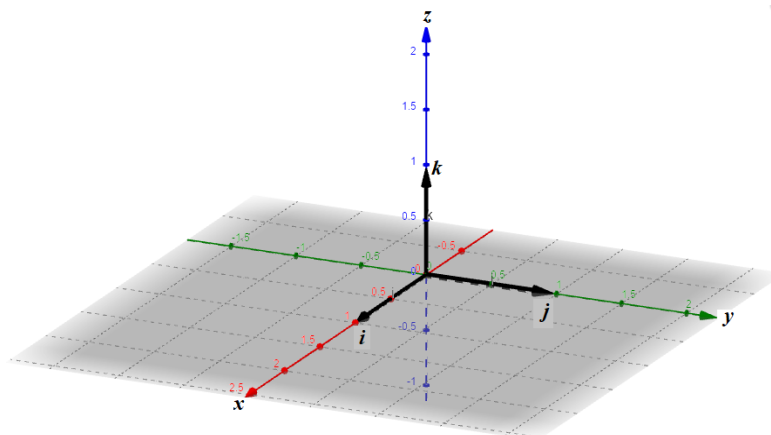


Fig. 43. Vectores unitarios en el espacio

Entonces el vector se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Geométricamente este vector se representa

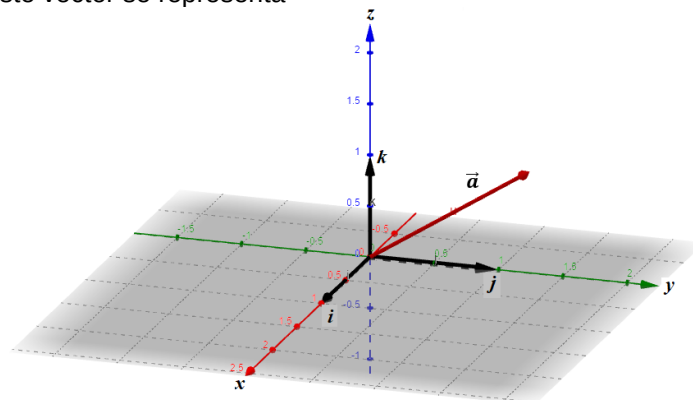


Fig. 44. Vectores en relación con los vectores unitarios en el espacio

Relacionando el ángulo vector que forma con cada uno de los vectores unitarios.

Alfa (α) es el ángulo que se forma entre el eje "x" y el vector $\vec{a}$

Beta (β) es el ángulo que se forma entre el eje "y" y el vector $\vec{a}$

Gama (γ) es el ángulo que se forma entre el eje "z" y el vector $\vec{a}$

Como se muestra en la figura:

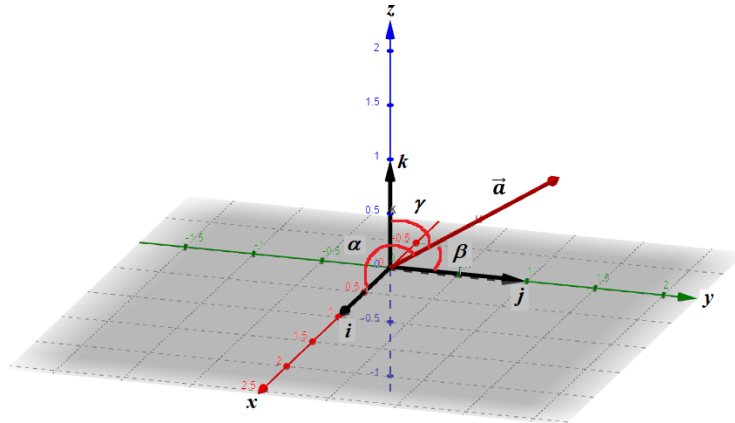


Fig. 45. Vectores en relación con los ángulos directores en el espacio

Para el ángulo alfa (α)

Conociendo los vectores

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

Cálculo del producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{i}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (1, 0, 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_1 + 0 + 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = a_1$$

Cálculo de los módulos

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|\vec{i}\| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2}$$

$$\|\vec{i}\| = 1$$

Aplicando la ecuación para el ángulo entre dos vectores

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\|\vec{i}\| \|\vec{a}\|} \right)$$

Sustituyendo valores

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\| (1)} \right)$$

Entonces

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \right)$$

Para el ángulo beta (β)

Conociendo los vectores

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

Cálculo del producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 1, 0)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = 0 + a_2 + 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{j} = a_2$$

Cálculo de los módulos

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|\vec{j}\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (0)^2}$$

$$\|\vec{j}\| = 1$$

Aplicando la ecuación para el ángulo entre dos vectores

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\|\vec{j}\| \|\vec{a}\|} \right)$$

Sustituyendo valores

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{a_2}{\|\vec{a}\| (1)} \right)$$

Entonces

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right)$$

Para el ángulo gama (γ)

Conociendo los vectores

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

Cálculo del producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = 0 + 0 + a_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{k} = a_3$$

Cálculo de los módulos

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|\vec{k}\| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2}$$

$$\|\vec{k}\| = 1$$

Aplicando la ecuación para el ángulo entre dos vectores

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\|\vec{k}\| \|\vec{a}\|} \right)$$

Sustituyendo valores

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{a_3}{\|\vec{a}\|(1)} \right)$$

Entonces

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)$$

En resumen:

$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \right)$, $\beta = \cos^{-1} \left(\frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right)$, $\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)$ se conocen como los ángulos directores de un vector. De los cuales se forman los cosenos directores.

$$\cos(\alpha) = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \quad \cos(\beta) = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \quad \cos(\gamma) = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

Los cosenos directores de un vector no pueden ser arbitrarios; y su relación se puede establecer como sigue:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{(a_1)^2}{(\|\vec{a}\|)^2} \quad \cos^2(\beta) = \frac{(a_2)^2}{(\|\vec{a}\|)^2} \quad \cos^2(\gamma) = \frac{(a_3)^2}{(\|\vec{a}\|)^2}$$

Sumando:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{(a_1)^2}{(\|\vec{a}\|)^2} + \frac{(a_2)^2}{(\|\vec{a}\|)^2} + \frac{(a_3)^2}{(\|\vec{a}\|)^2}$$

Simplificando:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}{(\|\vec{a}\|)^2}$$

Como:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Entonces:

$$(\|\vec{a}\|)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Que es la expresión que relaciona los cosenos directores.

Ejemplo 26

Si $\vec{v} = 2.3i + 4.2j - 3.1k$. Obtener la magnitud o módulo y los ángulos directores del vector.

De acuerdo con la ecuación:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Tenemos que la magnitud de $\vec{v}$ es:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2.3)^2 + (4.2)^2 + (-3.1)^2}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{32.54}$$

$$\|\vec{v}\| = 5.704 \text{ Unidades}$$

Por otra parte, aplicando las ecuaciones de los ángulos directores:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}\right), \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}\right), \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a_3}{\|\vec{a}\|}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2.3}{5.704}\right)$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0.4032)$$

$$\alpha = 66.22^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4.2}{5.704}\right)$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.7363)$$

$$\beta = 42.58^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{3.1}{5.704}\right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}(-0.5434)$$

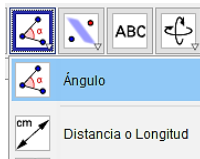
$$\gamma = 122.92^\circ$$

3.6.1. Ángulo de un vector con los vectores directores en GeoGebra

Ejemplo 27

Verificar los ángulos directores del vector $\vec{v} = 2.3i + 4.2j - 3.1k$ en GeoGebra.

En la barra de entrada introducir las componentes del vector con el comando **Vector((2.3, 4.2, 3.1))**. Introducir cada uno de los vectores unitarios (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) con el comando **Vector(<Punto>)**. Posteriormente se selecciona en la ventana ángulo, se elige el vector y cada uno de los vectores unitarios.



En la gráfica se marcan los ángulos directores.

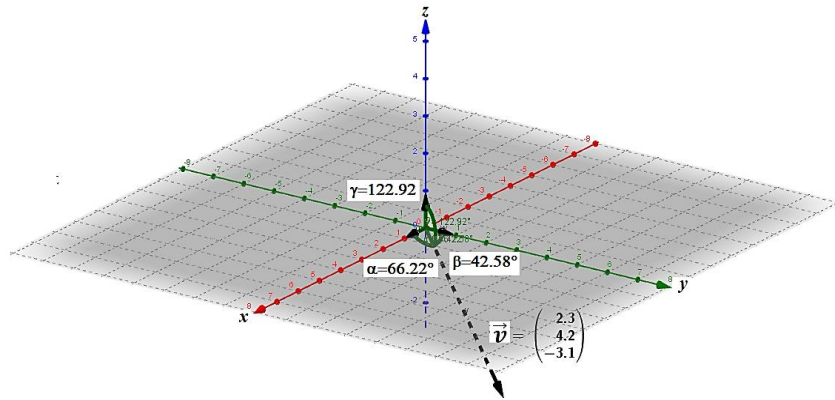


Fig. 46. Obtención de ángulos directores en GeoGebra

Ejemplo 28

Hallar las componentes de un vector $\vec{d}$ con módulo 4 y con ángulos directores iguales.

Como la condición es que los ángulos directores sean iguales, entonces:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

Las componentes del vector serán:

$$\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$$

El módulo del vector es

$$\|\vec{d}\| = 4$$

De la ecuación

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Como los ángulos son iguales, la expresión se puede colocar en función de cualquier ángulo entonces:

$$3\cos^2(\alpha) = 1$$

Despejando

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Simplificando

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como toda raíz tiene un valor positivo y otro negativo, esto indica que hay dos direcciones de vectores que satisfacen la condición de sus ángulos directores son iguales.

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Entonces las componentes del vector se obtienen aplicando las ecuaciones:

$$\cos(\alpha) = \frac{d_1}{\|\vec{d}\|} \quad \cos(\beta) = \frac{d_2}{\|\vec{d}\|} \quad \cos(\gamma) = \frac{d_3}{\|\vec{d}\|}$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{d_1}{4}$$

Simplificando

$$d_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Los calculos son similares para las demas componentes

$$d_2 = \|\vec{d}\| \cos(\beta)$$

$$d_2 = (4) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$d_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$d_3 = \|\vec{d}\| \cos(\gamma)$$

$$d_3 = (4) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$d_3 = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Las componentes del vector son $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ $\vec{d} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$

En la figura 47 se muestra el vector $\vec{d}$.

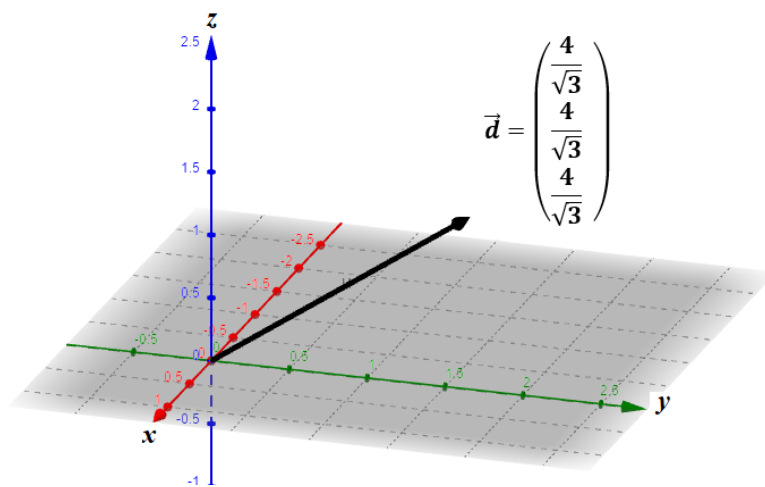


Fig. 47. Vector del ejemplo 28

4. PRODUCTO VECTORIAL

Otra operación entre vectores, es el producto vectorial o producto cruz. A diferencia del producto escalar, es que el producto vectorial sólo es aplicable con dos vectores en el que se obtiene un nuevo vector perpendicular a ambos vectores, por ejemplo sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el espacio tridimensional al realizar el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ se obtiene un nuevo vector $\vec{c}$ en el mismo espacio; es decir $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Como se muestra en la figura 48 el producto vectorial cumple con el principio de la regla de la mano derecha. El sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ es hacia dónde señala la punta de flecha de este vector, el cual nos lo da el dedo pulgar extendido de la mano derecha, Si tomamos el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ con la mano derecha tal como se observa en la figura, cerrando los dedos excepto el pulgar que lo mantienes extendido hacia arriba y giras la mano en el sentido inverso a la marcha de las agujas de un reloj, de $\vec{a} \times \vec{b}$ señala en este caso hacia arriba o *positivo*.

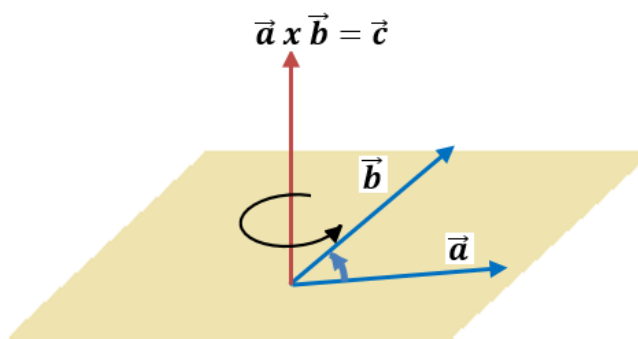


Fig. 48. Producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$

En caso contrario será negativo, el sentido del vector cambia es decir: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{c}$. Por lo que inferimos que el producto vectorial no es conmutativo, es decir $\vec{b} \times \vec{a}$ da también un vector pero en sentido contrario como se muestra en la figura 49.

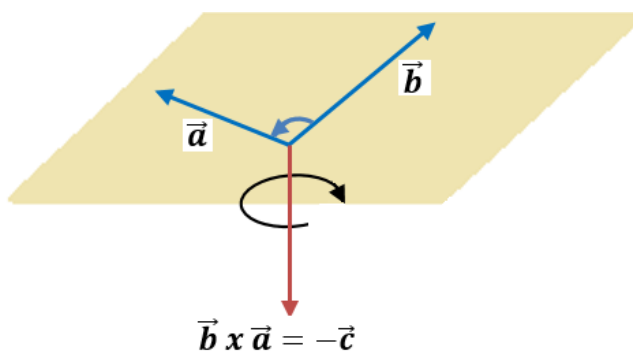


Fig. 49. Producto vectorial $\vec{b} \times \vec{a}$

El producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ da como resultado un nuevo vector $\vec{c}$, perpendicular simultáneamente a ambos vectores, es decir que el vector $\vec{c}$ es perpendicular tanto al vector $\vec{a}$ como al vector $\vec{b}$.

El producto vectorial no es conmutativo, al realizar el producto vectorial $\vec{b} \times \vec{a}$ da un nuevo vector $(-\vec{c})$ igual pero en sentido contrario.

4.1. Módulo del producto vectorial

Consideremos los vectores unitarios en el plano tridimensional

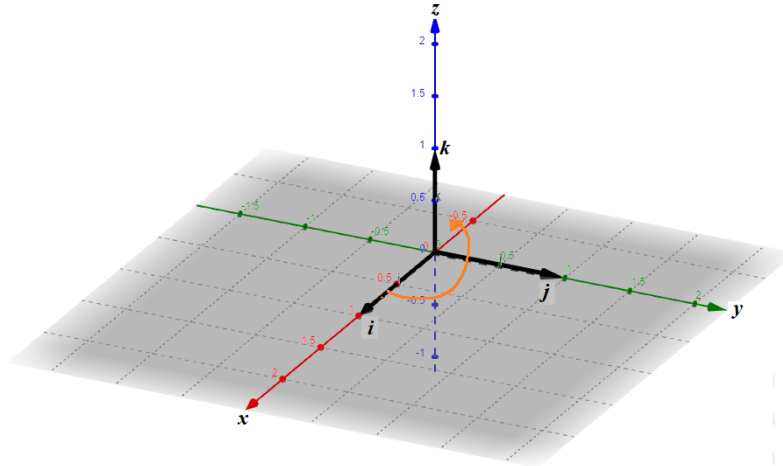


Fig. 50. Vectores unitarios en el espacio

Si realizamos los productos vectoriales con vectores unitarios en ambos sentidos obtenemos:

$$\begin{array}{lll} i \times j = k & j \times i = -k & i \times i = 0 \\ j \times k = i & k \times j = -i & j \times j = 0 \\ k \times i = j & i \times k = -j & k \times k = 0 \end{array}$$

Sean los vectores:

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

Realizamos el producto vectorial, también llamado producto cruz

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k)$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & a_1 b_1 (i \times i) + a_1 b_2 (i \times j) + a_1 b_3 (i \times k) + a_2 b_1 (j \times i) + a_2 b_2 (j \times j) + a_2 b_3 (j \times k) \\ & + a_3 b_1 (k \times i) + a_3 b_2 (k \times j) + a_3 b_3 (k \times k) \end{aligned}$$

Como

$$i \times i = 0, \quad i \times j = k, \quad i \times k = -j \quad j \times i = -k, \quad j \times j = 0, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad k \times j = -i, \quad k \times k = 0$$

Sustituyendo

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 (k) + a_1 b_3 (-j) + a_2 b_1 (-k) + a_2 b_3 (i) + a_3 b_1 (j) + a_3 b_2 (-i)$$

Factorizando

$$\vec{a} \times \vec{b} = i(a_2 b_3 - a_3 b_2) - j(a_1 b_3 - a_3 b_1) + k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Si observamos el modelo matemático anterior corresponde a la solución de un determinante de tercer orden aplicando el método de menores y cofactores, el cual se desarrolla a continuación.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\vec{a} \times \vec{b} = i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

En una forma más simple se observa que la solución de un determinante de tercer orden colocados los vectores en el orden del producto corresponde a la solución de un producto vectorial.

Como el módulo de un vector se obtiene aplicando la ecuación

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

En forma similar

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Donde:

$$a_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$a_2 = (a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$a_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)$$

Sustituyendo

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Reacomodando el segundo término

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Sustituyendo en la ecuación del módulo de un vector

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

Desarrollando los binomios al cuadrado, que dan como solución un trinomio cuadrado perfecto.

$$\begin{aligned} & \|\vec{a} \times \vec{b}\| \\ &= \sqrt{a_3^2b_3^2 - 2a_2a_3b_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_2b_1 + a_2^2b_1^2} \end{aligned}$$

Sumando y restando

$$a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2$$

Reacomodando términos

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_2b_1 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_3b_2)}$$

Recordando:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

Por:

$$((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

Entonces:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1a_2b_2b_1 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_3b_2$$

Por lo que:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned} & \|\vec{a} \times \vec{b}\| \\ &= \sqrt{a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2} \end{aligned}$$

Recordando el producto punto como:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Por lo tanto:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

Recordando:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta)^2$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

Sustituyendo;

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta)^2}$$

Elevando al cuadrado cada término

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta}$$

Sacando como factor común $\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)}$$

De la identidad trigonométrica

$$\text{sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$$

$$\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta$$

Sustituyendo

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \text{sen}^2 \theta}$$

Simplificando

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \text{Sen}(\theta)$$

Ecuación para obtener el ángulo entre dos vectores.

$$\text{Sen}(\theta) = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$

4.2. Área de un paralelogramo

Sean los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos

Del área geométrica de un paralelogramo.

$$A = b * h$$

Dónde:

h = altura

b = base

$$b = \|\vec{b}\|$$

Considerando la siguiente figura.

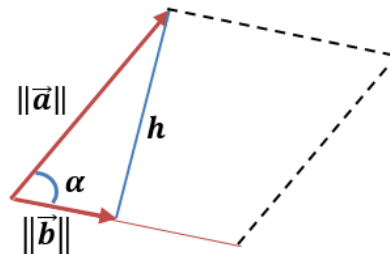


Fig. 51. Vectores formando un plano

$$\text{Sen}(\theta) = \frac{h}{\|\vec{a}\|}$$

$$h = \|\vec{a}\| \text{Sen}(\theta)$$

Sustituyendo en la ecuación de un área del paralelogramo

$$A = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \text{Sen}(\theta)$$

Ecuación que corresponde al módulo del producto vectorial.

Ejemplo 29

Dados los vectores $\vec{a}(-3, 4, 1)$ y $\vec{b}(1, 3, -2)$, hallar el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, el área del paralelogramo y el ángulo formado por los dos vectores.

El producto vectorial quedó definido por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Por lo que colocando los vectores en el determinante.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

La solución del determinante por menores y cofactores queda.

$$\vec{a} \times \vec{b} = i((4)(-2) - (1)(3)) - j((-3)(-2) - (1)(1)) + k((-3)(3) - (4)(1))$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = i(-8 - 3) - j(6 - 1) + k(-9 - 4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -11i - 5j - 13k$$

Que también puede quedar expresado:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-11, -5, -13)$$

El área del paralelogramo es obteniendo el módulo del vector $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sustituyendo valores.

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{(-11)^2 + (-5)^2 + (-13)^2}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{315}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 17.75 \text{ unidades cuadradas}$$

El ángulo entre los dos vectores se obtiene con la fórmula:

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$

El módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ se ha calculado, pero ahora se debe obtener los módulos de los vectores $\vec{a}(-3, 4, 1)$ y $\vec{b}(1, 3, -2)$.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (1)^2}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{14}$$

Sustituyendo los módulos en la fórmula de ángulo entre dos vectores.

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\sqrt{315}}{\sqrt{26}\sqrt{14}} \right)$$

$$\theta = 68.48^\circ$$

Es importante mencionar que el ángulo entre dos vectores también se puede calcular con el producto escalar revisado en el punto 3.5.

4.3. Producto vectorial y área de paralelograma en GeoGebra

Ejemplo 30

Sean los vectores $\vec{a}(-3, 4, 1)$ y $\vec{b}(1, 3, -2)$, hallar el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, el área del paralelograma y el ángulo formado por los dos vectores en GeoGebra.

En la barra de entrada introducir las componentes de los vectores con el comando **Vector((-3, 4, 1))** y **Vector((1, 3, -2))**.

Obtener el producto vectorial con el comando **ProductoVectorial((-3, 4, 1), (1, 3, -2))**.

El resultado que da GeoGebra es un punto, por lo que se introduce el punto A (0, 0, 0) y para formar el vector $\vec{a} \times \vec{b}$, se elige el comando “vector” y selecciona los puntos A y el punto que da como resultado el producto vectorial.



Una vez que se tiene el vector $\vec{a} \times \vec{b}$, se utiliza el comando de distancia o longitud y se selecciona el vector para obtener el módulo o magnitud del vector, que es el área del paralelograma.



Para el ángulo entre los vectores se selecciona la ventana ángulo y se eligen los dos vectores.



En la Fig. 52 se muestra el resultado en GeoGebra, en el cual se verifica que es igual al ejercicio 25, resuelto analíticamente.

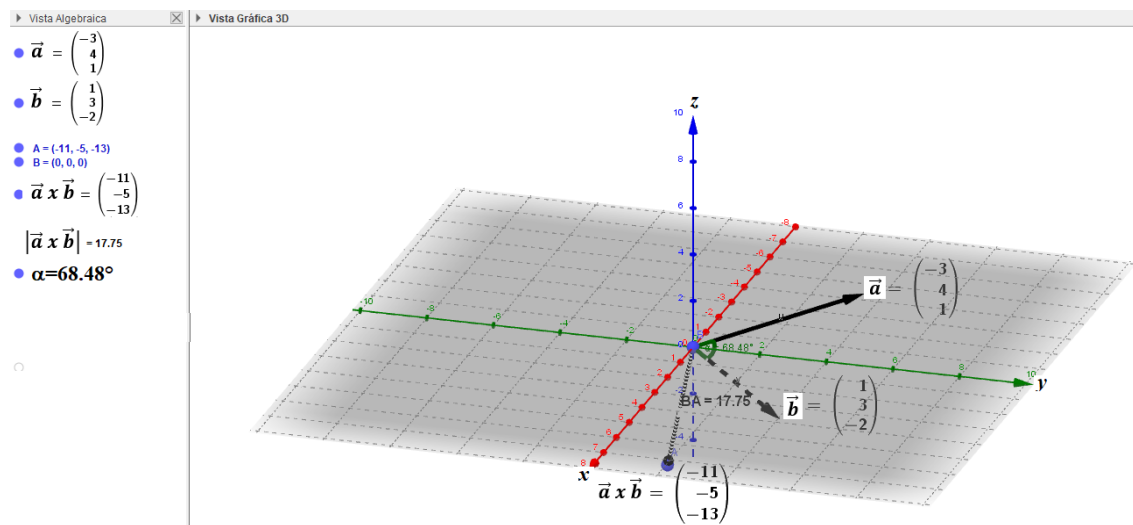


Fig. 52. Producto vectorial, área del paralelogramo y ángulo entre dos vectores en GeoGebra

4.4. Vectores paralelos

Dos vectores son paralelos si la correspondencia entre sus componentes es igual o proporcional.

Sean los vectores:

$$\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$$

Son paralelos si:

$$a_1 \approx b_1 \quad a_2 \approx b_2 \quad a_3 \approx b_3$$

Dos vectores son paralelos si su producto vectorial es igual a cero.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Hasta este momento se tiene que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es igual a cero y son paralelos si su producto vectorial es igual a cero:

$$\parallel \text{ si } \vec{a} \times \vec{b} = 0 \perp \text{ si } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Dos vectores son coincidentes si:

Cuando cumplan con la propiedad de ser paralelos y que un punto $\in \vec{a}$ y $\in \vec{b}$.

Ejemplo 31

Sean los puntos $P(-2, 3, 1)$, $Q(1, -1, 2)$ y $R(-2, 2, -2)$ que forman los vértices de un triángulo. Hallar el área del triángulo y sus ángulos internos.

Para comprender el problema, primero se localizan los puntos en el espacio (figura 53) y se forman los vectores que son los lados del triángulo.

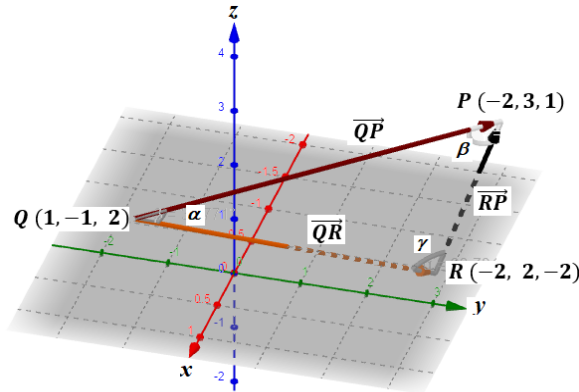


Fig. 53. Vectores formando un triángulo

Del concepto de vector posición se obtienen los vectores $\vec{QP}$, $\vec{QR}$ y $\vec{RP}$.

$$\vec{AB} (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

$$\begin{array}{ll} \vec{QP}(-2-1, 3-(-1), 1-2) & \vec{QP}(-3, 4, -1) \\ \vec{QR}(-2-1, 2-(-1), -2-2) & \vec{QR}(-3, 3, -4) \\ \vec{RP}(-2-(-2), 3-2, 1-(-2)) & \vec{RP}(0, 1, 3) \end{array}$$

Utilizando el concepto de producto vectorial:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Con dos de los vectores que forman el triángulo se podrá obtener el área del paralelogramo y dividido entre dos será el área del triángulo.

$$\vec{QP} \times \vec{QR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

La solución del determinante por menores y cofactores es:

$$\begin{aligned} \vec{QP} \times \vec{QR} &= i((4)(-4) - (-1)(3)) - j((-3)(-4) - (-1)(-3)) + k((-3)(3) - (4)(-3)) \\ \vec{QP} \times \vec{QR} &= i(-16 + 3) - j(12 - 3) + k(-9 + 12) \\ \vec{QP} \times \vec{QR} &= -13i - 9j + 3k \end{aligned}$$

Ahora se obtiene el módulo del vector $\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}$

$$\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| = \sqrt{(-13)^2 + (-9)^2 + (3)^2}$$

$$\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| = \sqrt{259} \text{ unidades cuadradas}$$

Este valor corresponde al área del paralelogramo, por lo que el área del triángulo será:

$$\frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\|}{2} = \frac{\sqrt{259}}{2}$$

$$\frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\|}{2} = 8.05 \text{ unidades cuadradas}$$

Valor que corresponde al área formada por los vectores $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RP}$.

Los ángulos internos del triángulo se obtienen con la fórmula:

$$\theta = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$$

Para el ángulo α , ya se tiene el módulo de $\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| = \sqrt{259}$, por lo que se va a calcular los módulos de $\overrightarrow{QP}$ $(-3, 4, -1)$ y $\overrightarrow{QR}$ $(-3, 3, -4)$.

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-1)^2} \quad \|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{26}$$

$$\|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + (-4)^2} \quad \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{34}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\alpha = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\|}{\|\overrightarrow{QP}\| \|\overrightarrow{QR}\|} \right)$$

$$\alpha = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\sqrt{259}\|}{\|\sqrt{26}\| \|\sqrt{34}\|} \right)$$

$$\alpha = 32.77^\circ$$

Para el ángulo β , el módulo $\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| = \sqrt{259}$, es igual si se calculará el módulo $\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}\|$ (se recomienda al estudiante realice el cálculo para verificar) porque los vectores están en el mismo paralelogramo; por lo tanto sólo se va a calcular el módulo de $\overrightarrow{RP}$ $(0, 1, 3)$ porque el módulo de $\overrightarrow{QP}$ $(-3, 4, -1)$ ya se obtuvo $\|\overrightarrow{QP}\| = \sqrt{26}$.

$$\|\overrightarrow{RP}\| = \sqrt{(0)^2 + (1)^2 + (3)^2} \quad \|\overrightarrow{RP}\| = \sqrt{10}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\beta = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}\|}{\|\overrightarrow{QP}\| \|\overrightarrow{RP}\|} \right)$$

$$\beta = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{\|\sqrt{259}\|}{\|\sqrt{26}\|\|\sqrt{10}\|}\right)$$

$$\beta = 86.44^\circ$$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° , entonces se cumple que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Por lo que el ángulo χ , se obtiene:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

Sustituyendo los valores:

$$\gamma = 180^\circ - 32.77^\circ - 86.44^\circ$$

$$\gamma = 60.79^\circ$$

Resumiendo los resultados, el triángulo formado por los puntos $P(-2, 3, 1)$, $Q(1, -1, 2)$ y $R(-2, 2, -2)$, tiene un área de:

$$\frac{\|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\|}{2} = 8.05 \text{ unidades cuadradas}$$

Y sus ángulos internos:

$$\alpha = 32.77^\circ \quad \beta = 86.44^\circ \quad \gamma = 60.79^\circ$$

En la figura 54 se muestra el triángulo con los valores de los ángulos obtenidos en GeoGebra, como se explicó en el ejemplo 30, que son los mismos valores que los obtenidos analíticamente.

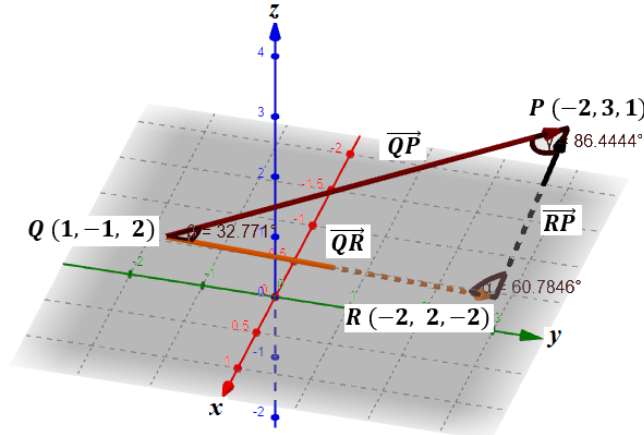


Fig. 54. Vectores formando un triángulo y sus ángulos internos

5. TRIPLES PRODUCTOS

Se ha demostrado que el módulo de un producto vectorial representa el área de un paralelogramo. Si este producto se multiplica por un vector en forma escalar entonces se obtiene un escalar que representa el volumen de un paralelepípedo o área de un prisma rectangular. Si los módulos son iguales, será el volumen de un cubo:

Sean los vectores.

$$\vec{a} = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$\vec{b} = b_1i + b_2j + b_3k$$

$$\vec{c} = c_1i + c_2j + c_3k$$

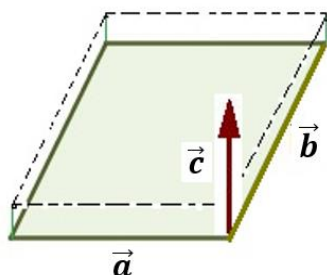


Fig. 55. Producto de tres vectores

El triple producto de los vectores nos da el volumen de un paralelepípedo mediante la siguiente fórmula:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

El resultado del triple producto es un escalar.

Algebraicamente tenemos:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

Para el volumen del paralelepípedo

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Solución que corresponde a:

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Lo que puede representar la solución de un determinante de orden 3.

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Si el volumen se divide entre 3 se tendrá el volumen de una pirámide cuadrada o rectangular.
- Si el volumen se divide entre dos se tiene el volumen de un prisma triangular
- Si el volumen se divide entre seis se tendrá el volumen de un tetraedro.

Ejemplo 32

Sean los vectores $\vec{a}(-1, 2, 3)$, $\vec{b}(0, -2, 4)$ y $\vec{c}(2, -1, 3)$, que forman un prisma rectangular, obtener su volumen.

En la figura 56 se muestran los vectores formado el prisma rectangular.

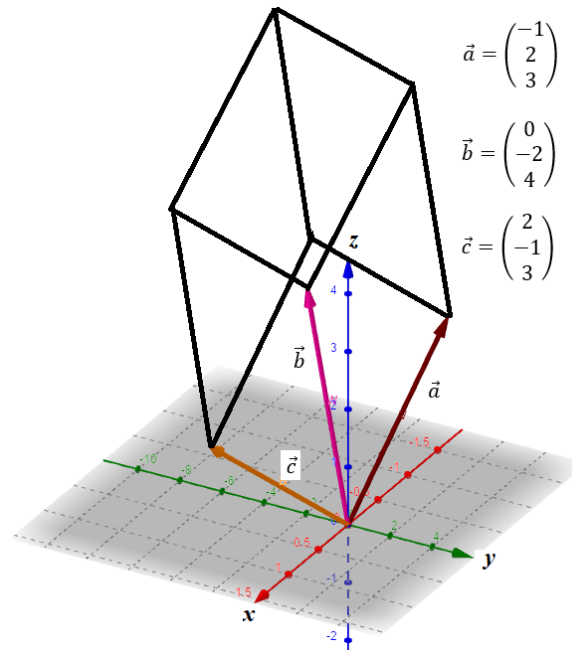


Fig. 56. Prisma rectangular del ejemplo 32

Utilizando el concepto para calcular volúmenes de cuerpos geométricos.

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Se calcula el determinante de orden 3.

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolviendo por menores y cofactores y tomando como cofactor la última fila porque hay un cero el cual anulará al determinante menor:

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 + 2(6 + 3) + 4(4 - 1)$$

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 + 18 + 12$$

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 30 \text{ unidades cúbicas}$$

El resultado es el volumen de un paralelepípedo, pero el volumen de un prisma rectangular es:

$$V_{prisma\ rect} = \frac{c \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{2}$$

$$V_{prisma\ rect} = \frac{30}{2}$$

$$V_{prisma\ rect} = 15 \text{ unidades cúbicas}$$

5.1. Propiedades del producto vectorial

Mediante las definiciones de las operaciones con vectores y las propiedades de los números reales, puede probarse lo siguiente:

- 1) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores cualesquiera, en el espacio tridimensional,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Es decir, el producto vectorial no es conmutativo.

- 2) Si $\vec{a}$ es paralelo de $\vec{b}$, entonces $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

- 3) Si $\vec{a}$ es perpendicular de $\vec{b}$, entonces $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{a} \times \vec{b}$ forman una terna de vectores mutuamente ortogonales y el paralelogramo definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es un rectángulo, de manera que $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$.

- 4) Entre los vectores unitarios, se tiene que:

$$\begin{aligned} i \times i &= j \times j = k \times k = 0 \\ i \times j &= k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j \\ j \times i &= -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j \end{aligned}$$

- 5) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores cualesquiera, en el espacio tridimensional, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. Es decir, el producto vectorial es distributivo respecto a la adición.

- 6) El sentido del producto vectorial (ver figura 35), puede obtenerse por la regla de la mano derecha: el sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ es el desplazamiento de un tornillo de rosca derecha.

- 7) Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son tres vectores cualesquiera, en el espacio tridimensional,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

Esta es una manera de escribir el triple producto vectorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, como una combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

- 8) Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores cualesquiera, en el espacio tridimensional:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Esta identidad es un caso particular de la siguiente proposición: si dos vectores cualesquiera de los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son paralelos, entonces el triple producto vectorial entre ellos es cero.

6. EJERCICIOS PROPUESTOS

Realizar los siguientes ejercicios analíticamente y comprobar su respuesta con GeoGebra.

- Graficar los siguientes puntos: $A(-4, -3, 0)$, $B(5, 2, -1)$, $C(-2, 2, 0)$, $D(-3, -3, 0)$, $E(4, -4, -5)$, $F(5, 1, -6)$, $G(-2, 1, -5)$ y $H(-3, -4, -4)$.
- Con los puntos del ejercicio 1, obtener los vectores siguientes: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{CG}$.
- Graficar los vectores de posición.
 - $\overrightarrow{AB}=(-7, 0, 1)$, $\overrightarrow{BD}=(-8, -5, 2)$, $\overrightarrow{AC}=(-6, 5, 0)$, $\overrightarrow{DG}=(1, 4, -6)$ y $\overrightarrow{EC}=(-6, 6, 5)$.
- Sean los vectores $\vec{a}=(2, -7, 5)$ y $\vec{b}=(4, 8, -3)$. Calcular la suma, resta y módulo de los vectores resultantes respectivamente.
- Multiplicar los vectores del ejemplo anterior por el escalar "3" y representar gráficamente dicho producto.
- Trazar un triángulo con los puntos $A(-2, 3, 5)$, $B(5, 0, 7)$, $C(6, 4, -3)$ mediante segmentos de recta y calcular su perímetro.
- Sean los siguientes vectores $\vec{a} = 2i - j + 3k$, $\vec{b} = -3i + 2j - k$, $\vec{c} = -2i - 4j + k$ y $\vec{d} = -i - j - 3k$. Resolver las operaciones que se indican.
 - $2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$
 - $\|2\vec{b} - \vec{d}\|$
- Sean los vectores $\vec{a} = 2i + j - k$, $\vec{b} = -i + 3j + 4k$, $\vec{c} = i + 2j + 3k$ y $\vec{d} = 2j + 5k$. Calcular:
 - $\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$
 - $7\vec{d} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$
 - $\|3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{3}{2}\vec{c}\|$
 - $\|\vec{b} + 3\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{d}\|$
- Dados los puntos $P = (3, -3, 6)$ y $Q = (9, 0, -8)$ y los vectores $\vec{a} = 2i - 5j + 4k$ y $\vec{b} = i - 5j + 3k$, encontrar el vector $\vec{w} = 3\vec{a} + 5\vec{b} - 4\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{QP}$.
- Calcular el vector unitario de $\hat{V} = -3i - 5j + 6k$.
- Sean los vectores $\vec{a}(-2, 3, 0)$ y $\vec{b}(1, -2, 3)$, resolver las siguientes operaciones:
 - $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 - Comp. Esc. $\vec{b}_{\vec{a}}$
 - Comp. Esc. $\vec{a}_{\vec{b}}$
 - Comp. Vec. $\vec{b}_{\vec{a}}$
 - Comp. Vec. $\vec{a}_{\vec{b}}$
 - $\vec{a} \times \vec{b}$
 - $\vec{b} \times \vec{a}$
 - $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$

12. Calcule el coseno del ángulo formado por los vectores dados.
- a) $\vec{a}(-1, 2, 3)$ y $\vec{b}(-2, -1, 1)$
 b) $\vec{c}(2, 3, 5)$ y $\vec{d}(5, -2, 3)$
13. Encuentre el vector perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ y $\vec{v} = (3, -5, 2)$ de magnitud igual a 3.
14. Hallar el vector unitario en la dirección y sentido de la resultante de los vectores $\vec{a} = 2i + 4j - 5k$ y $\vec{b} = i + 2j + 3k$.
15. Obtenga los cosenos, directores de cada vector dado.
 $\vec{a} = (5, 0, 12)$ y $\vec{b} = (-3, -5, 2)$
16. Si para un vector $\vec{v}$ el $\cos \alpha = \frac{2}{11}$ y $\cos \beta = \frac{-6}{11}$, calcule el $\cos \gamma$.
17. Los puntos $A = (0, -2, 3)$, $B = (3, -1, 5)$ y $C = (-2, 3, 5)$ son los vértices de un triángulo. Determine el área de dicho triángulo y sus ángulos interiores.
18. Obtener un escalar β de manera que $\vec{a} = 3i + \beta j - 5k$ y $\vec{b} = i + 2j + 3k$, sean paralelos.
19. Calcular el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas a los vectores $\vec{a} = -i + j$, $\vec{b} = -2i - j + 4k$ y $\vec{d} = 2i + 2j + 2k$.
20. Calcule el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\vec{u} = 3i - j + k$, $\vec{v} = 3i - 2j - k$.
21. Supóngase que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores no nulos tales que $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$, ¿Qué conclusión geométrica se puede obtener respecto a $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
22. Si $\vec{a} = i + j - 2k$, $\vec{b} = -i + 4j + k$ y $\vec{c} = 2i + 2j + 2k$, calcular:
 a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
 b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
23. Calcular el volumen de un tetraedro con vértices $A(3, -4, 8)$, $B(5, 4, 3)$, $C(3, 7, 3)$ y $D(-5, 7, 0)$.

BIBLIOGRAFÍA

- Grossman, S. I., Flores, G. J. (2014). Álgebra lineal. México: McGraw-Hill.
- Leithold, L. (2000). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Oxford.
- Oteyza, E. (2011). Geometría Analítica. México: Pearson.
- Swokowski, E. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. México: Thomson.
- Zill, D. (2002). Cálculo con Geometría Analítica. México: Oxford.