

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Lección

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Estudios Superiores Aragón

Lección para el aprendizaje de integración numérica (Métodos Numéricos)

Autores: Nelly Rigaud Téllez

Roberto Blanco Bautista

Derechos de autor: CC – BY – NC – SA

Clave del proyecto: PAPIME PE101119

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –
DGAPA – PAPIME

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

ÍNDICE

Pag	CONTENIDO
3	Motivaciones
6	Estructura de la Lección
6	Recursos digitales
7	Desarrollo
10	Actividades de aprendizaje
47	Cierre
51	Créditos
51	Referencias

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Integración numérica

→ Motivaciones

La integración numérica es un tema de los Métodos Numéricos, que consiste en calcular la longitud de una curva, área y/o volumen, con límites bien definidos.

En la integración numérica se emplean procedimientos y algoritmos que, por medio de operaciones aritméticas, generan un valor aproximado de la integración definida.

Los **objetivos** de la presente lección son los siguientes:

Proponer una solución a situaciones que involucren la **síntesis y/ o acumulación** como efecto del producto de una variable independiente con su variable dependiente, en un intervalo $[a, b]$.

Tomar decisiones fundamentadas sobre la **elección de métodos** típicos de solución, desde el reconocimiento del empleo de un **método analítico** y/o en su caso, a las fórmulas de **integración numérica** de la familia Newton-Cotes.

Implementar las fórmulas de la **Regla del Trapecio, Simpson 1/3 y Simpson 3/8**.

Emplear **software indicado** y/o en su caso **diseñar programas especializados** para hacer corridas, y estimar el **concepto de error**.

Interpretar resultados en el contexto del problema.

Para comprender los objetivos de esta lección, te ayudamos a recordar que una **integral**, como su nombre lo indica, expresa:

- Una acción por la cual las partes se integran en un todo, lo que te ayuda a comprender un fenómeno y/o situación en su totalidad.
- Una acción, a partir de la cual es posible completar, con las partes que le faltan, un todo.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Por eso, en una integral se realiza una generalización de una suma continua, encuadrada en el cálculo infinitesimal y en el análisis matemático de una función, donde la integración por medios analíticos consiste en emplear una fórmula exacta o una combinación de fórmulas que generan la primitiva sin margen de error.

La integración numérica se constituye de una familia de algoritmos para estimar el valor numérico de F (la derivada de la función primitiva), mediante aproximaciones, de ahí su nombre.

La integración numérica es diferente de una integración analítica en dos sentidos:

Primero, como método numérico, proporciona una solución aproximada, en este sentido, el análisis del error requiere tomar en cuenta la eficiencia del algoritmo empleado.

Segundo, no produce una función elemental, en realidad produce un valor que representa la longitud de una curva, el área y/ o volumen bajo la curva, de ahí la necesidad de definir intervalos de inicio y fin.

La **elección** entre un **método numérico o un analítico** se debe a uno de los tres siguientes casos:

a. Una función continua en su dominio que puede ser un polinomio, una función exponencial y/ o trigonométrica. La integración puede ser evaluada de manera analítica, esto es, empleando fórmulas de integración. Por ejemplo:

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

Aquí, se ha empleado la integral indefinida, por ello, el empleo de la constante de integración C .

b. Una función continua complicada que es difícil, o prácticamente, imposible integrar directamente, con fórmulas, como la del ejemplo anterior. Por ejemplo, las funciones e^{-x^2} , $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}$. En este tipo de casos se tendrían que abordar integrales dobles y triples.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

c. Una función expresada en forma tabulada, en términos de contar con valores x y $f(x)$ que son dados en un número discreto y finito de puntos, como resultado de un experimento, datos experimentales, de trabajo de campo o, en general, obtenidos de una investigación aplicada. En este caso, solo se cuenta con pares de coordenadas, sin conocer la función.

Por ejemplo, en el experimento de determinar el alargamiento de una pieza mecánica cuando es sometida a cargas diferentes, se tabula el alargamiento para distintas fuerzas. Esto origina una tabla de dos columnas relacionadas con valores discretos (fuerza-alargamiento).

Para tratar con casos como los incisos b. y c. existen procedimientos numéricos, tal es el caso, de las fórmulas de la **Regla del Trapecio, de Simpson 1/3 y de Simpson 3/8**, las cuales corresponden a tres métodos numéricos clásicos de integración definida. En los tres métodos, se requiere definir los límites de la integración, y que las distancias entre las variables independientes $x_0, x_1, \dots, x_n$, sean **equidistantes**.

Asimismo, se emplea un polinomio de interpolación que aproxime la función f en un intervalo $[a, b]$, de acuerdo con el número de intervalos que tengan y también observando la gráfica que se obtiene de la tabulación de coordenadas.

Hay otra familia de métodos, que se emplean cuando se utilizan valores de $f(x)$ en abscisas desigualmente espaciadas, y que están determinadas por ciertas familias de polinomios ortogonales, llamados Fórmulas de Cuadratura Gaussiana.

Como método numérico, es indispensable **programar y/o usar un software** para las fórmulas de la Regla del Trapecio, de Simpson 1/3 y de Simpson 3/8, así como **reinterpretar** los resultados y el concepto de error.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

→ Estructura de la lección

La presente lección está organizada por niveles de aprendizaje, del uno al cuatro, en donde se entremezclan cápsulas explicativas sobre la naturaleza de la integración numérica con la presentación de solución de problemas, paso a paso, que se describen con modelos matemáticos, principalmente, aquellos que se presentan en el desempeño profesional.

Cada nivel tiene un propósito, tal es el caso que el nivel 1, está referido a la adquisición y comprensión del conocimiento. En este nivel el estudiante requiere recordar sus conocimientos previos y ubicar en forma concreta fenómenos proclives a ser tratados con Métodos Numéricos. El nivel 2 trata del uso de conceptos y habilidades cognitivas que permitan la aplicación de la integración numérica.

El nivel 3, tiene una orientación estratégica para razonar acerca de los algoritmos, y para tomar decisiones en la solución de problemas, es un nivel de análisis y síntesis. Finalmente, el nivel 4, va hacia el diseño, tiene una orientación en la que el estudiante use lo que ha aprendido, no solo en la asignatura de Métodos Numéricos, también en otros contextos académicos y externos, que se refleje en su creación.

→ Recursos digitales

<https://cutt.ly/Mfrr1AI>

El sitio comprende software didáctico que te apoya en realizar el análisis y proceso de solución numérica, incluye la integración numérica. Asimismo, contiene videos tutoriales que te orientan en cómo aprovechar los beneficios del software descargable.

<https://www.zweigmedia.com/RealWorld/integral/integral.html>

Es un sitio para estudiantes que desean usar una calculadora para obtener los valores de la integración numérica definida, por distintos métodos.

<http://demonstrations.wolfram.com/NumericalIntegrationExamples/>

Puedes encontrar demostraciones interesantes de integración numérica, mediante el uso de wolfram.

<https://youtu.be/Z3C341IMMx4>

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

https://youtu.be/Oyi7euLTP_I

<https://youtu.be/N47KX1goIPU>

<https://youtu.be/SrVDxL1p430>

<https://youtu.be/rbyEVNSvUoY>

Videos con ejemplos de aplicaciones prácticos.

→ Desarrollo

Nivel 1 ¿En qué situaciones se emplea la integración?

A continuación, se presentan casos que distinguen cuándo emplear el concepto de integración.

Caso 1 Aplicaciones a las leyes de Newton. Un ejemplo típico es conducir un automóvil en una carretera recta, con un conductor que está acelerando y frenando constantemente.

La segunda Ley de Newton se encarga de cuantificar el concepto de fuerza F . Indica que si conocemos $F(t)$, la fuerza en función del tiempo, para movimiento rectilíneo, la segunda ley de Newton nos da $a(t)$, la aceleración en función del tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

Donde las propiedades inerciales de un cuerpo se caracterizan por su masa m . La aceleración se obtiene al derivar la velocidad con respecto al tiempo $\frac{dv}{dt}$, lo cual indica que la aceleración de un cuerpo bajo la acción de un cuerpo de masa es directamente proporcional a la suma infinitesimal de la fuerza neta F .

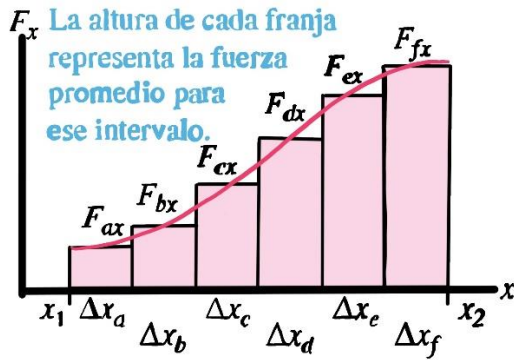
En este caso, la velocidad del móvil tendrá el siguiente formato

$$\int dv = \int \frac{F}{m} dt$$

Caso 2 Trabajo efectuado por una fuerza variable. Considerando de nuevo el primer caso, con desplazamientos sobre la carretera de x_1 a x_2 .

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

La gráfica 1 comprende la componente x , con respecto a la fuerza F_x . En su componente en x , genera lo siguiente:



La gráfica 1 de la fuerza en función de la posición, muestra divisiones de desplazamientos Δx_i .

La multiplicación sucesiva de Δx_i por F_{xi} , genera la obtención sucesiva de las áreas de los rectángulos.

Gráfica 1 Función de trabajo

Esto permite obtener el trabajo (W) realizado por la fuerza de llevar el automóvil de un sitio x_1 a x_2 .

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx$$

Tres implicaciones se muestran con el ejemplo:

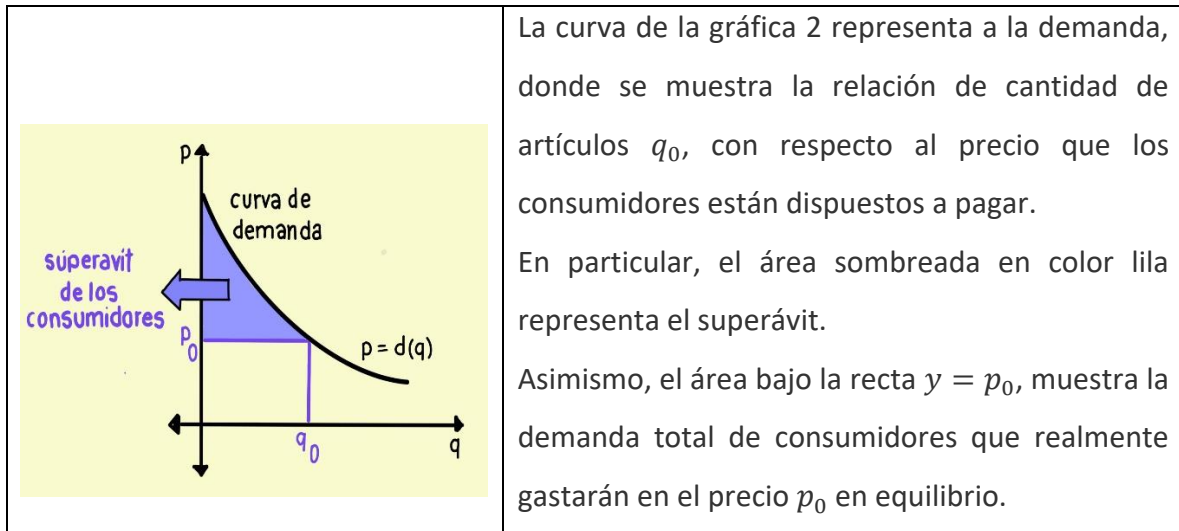
- En una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por **el área bajo la curva** entre las posiciones inicial y final.
- El trabajo W es igual a la suma de los productos de las fuerzas variables F_x , por los desplazamientos infinitesimales dx .
- Se están **relacionando** dos conceptos aparentemente aislados, la fuerza F y el desplazamiento.

Caso 3 Superávit de consumidores y productores. El mercado determina el precio al que un producto se vende. En un mercado en equilibrio, los consumidores compran la misma cantidad del producto que los fabricantes quieren vender.

La **relación** entre la **cantidad producida q** y el **precio p** se llama **demanda d** .

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

No obstante, algunos consumidores están dispuestos a gastar más por un artículo que el precio de equilibrio. El total de las diferencias entre el precio de equilibrio del artículo y los mayores precios que todas esas personas aceptan pagar, se llama superávit.



Gráfica 2 Relación cantidad-precio

Existe una implicación:

(a) El superávit está dado por el área que se forma entre la intersección de dos curvas con el eje y : Una es la función de demanda y la otra es la recta del precio en equilibrio.

Se genera una función primitiva de demanda que representa la ganancia de consumidores:

$$D = \int_0^{q_0} (q(x) - p_0) dq$$

La integración representa el área entre la intersección de las curvas.

Caso 4 Momento estático y momento de inercia. Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada momento de inercia, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

La palabra “momento” implica que la inercia depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia.

La integración tiene que ver directamente con la forma geométrica del objeto. Se obtiene el modelo que represente el área y se divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm , de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación, de modo que el momento de inercia se puede ver como

$$I = \int r^2 dm$$

Donde r representa el radio de giro.

Actividades de aprendizaje

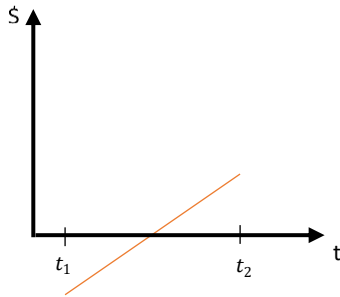
De las siguientes preguntas, lee con atención lo que se te pide y elige la opción correcta.

a. Suponga la curva del seno. Se desea obtener su área en el intervalo $[0, 2\pi]$. ¿Qué sucede con el resultado de la integral definida en ese intervalo?

i. Se considera la simetría de la curva	ii. Se anula el resultado	iii. No es posible obtener el área
---	---------------------------	------------------------------------

b. Suponga una empresa y sus ganancias en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$, de acuerdo con el siguiente gráfico 3. La empresa, ¿ganó?, ¿perdió?, ¿qué ocurrió?

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista



Gráfica 3. Curva de finanzas en un segmento de tiempo

i. No ganó, ni perdió	ii. Perdió	iii. Ganó
-----------------------	------------	-----------

c. Analiza el caso y responde los cuestionamientos. Genera una gráfica para cada caso.

El consumo del gas combustible en tu hogar suele partir de un tanque lleno.	c.1 ¿Cómo será la gráfica de la cantidad de gas contenida en el tanque en cada instante?
	c.2 ¿Cómo será la curva del gasto de gas?
	c.3 ¿Cómo se comporta la presión interna del tanque en este proceso?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate con tu profesor.

Actividad de aprendizaje

FORO DE DISCUSIÓN. Diseñar una infografía ¿Cómo identificar en un evento práctico/fenómeno cuándo derivar o cuándo integrar?

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Nivel 2 Métodos de integración numérica: Newton - Cotes

La integración numérica busca estimar una integral definida

$$Y = \int_a^b f(x)dx$$

Tomando al intervalo $[a, b]$, como dominio de la función.

Existen ocasiones, como ya se ha mencionado, que es imposible o muy difícil evaluar la integral definida mediante métodos analíticos. Teniendo en cuenta del cálculo que la integral Y representa el área de la región entre la curva $y=f(x)$, el eje x y las líneas $x=a$ y $x=b$, se trata de determinar Y mediante el reemplazo de $f(x)$, por un polinomio de interpolación, o sea, reemplazar $f(x)$ por $p(x)$.

Luego, se integra el polinomio al encontrar el área delimitada por los límites $x=a$ y $x=b$.

A este proceso se le llama *cuadratura gaussiana*. Las reglas de integración numérica corresponden al grado del polinomio de interpolación: Los más importantes son aquellos de grado 1, 2 y 3.

Regla del Trapecio

¿Recuerdas cómo obtener el área de un trapecio?

El método numérico más simple para encontrar el área bajo la curva es la Regla del Trapecio.

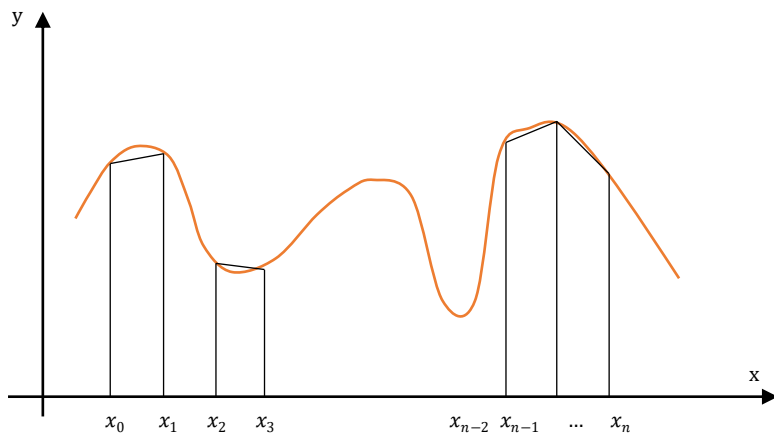
El método se basa en aproximar $f(x)$ por un polinomio lineal, por partes en donde se interpola $f(x)$ en los nodos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ (Gráfica 4).

Por ejemplo, se quiere evaluar la integral

$$Y = \int_a^b f(x)dx$$

Se comienza por dividir el intervalo $[a, b]$, en pasos de tamaño h , los cuales generan “ n ” subintervalos.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista



Gráfica 4 Trapezoides con paso h

Donde

$$h = \frac{b - a}{n}$$

y,

$$x_i = a + ih \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Ahora, se considera cada subintervalo

$$[x_{i-1}, x_i] \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Se aproxima el área bajo la curva $f(x)$ por un trapecoide con paso h y bases $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$.

De manera que, el área del trapecio es:

$$A_{1/3} = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

El área total se extiende sobre el intervalo total $[a, b]$ que es

$$\begin{aligned} A_{total} &= A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

Al agrupar términos semejantes, se obtiene la fórmula

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

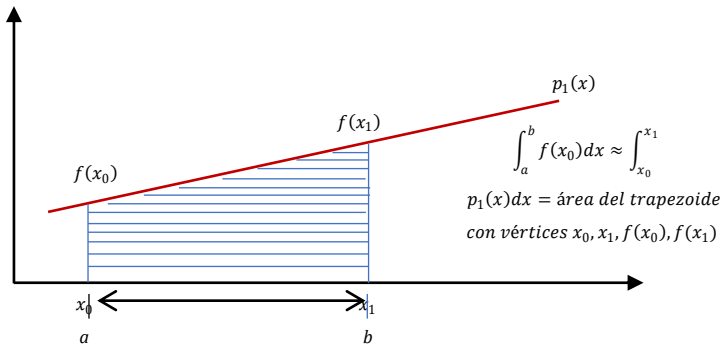
$$A_{total} = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$

La agrupación de términos para la Regla del Trapecio se debe a que se ha realizado una suma de n trapecios.

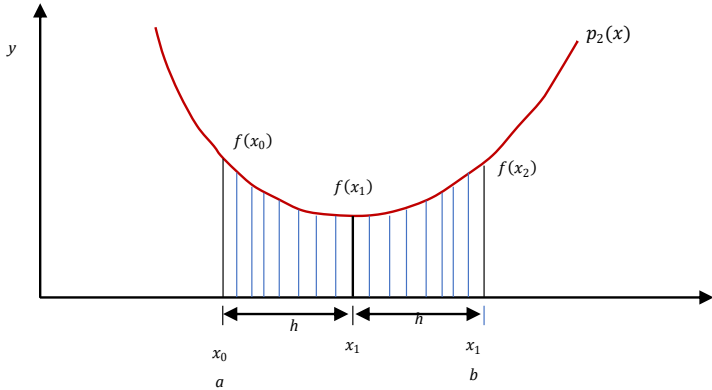
Una forma de escribir la Regla del Trapecio es así:

$$A_{total} = \frac{h}{2} [y_0 + y_n] + h \sum \text{resto de las ordenadas}$$

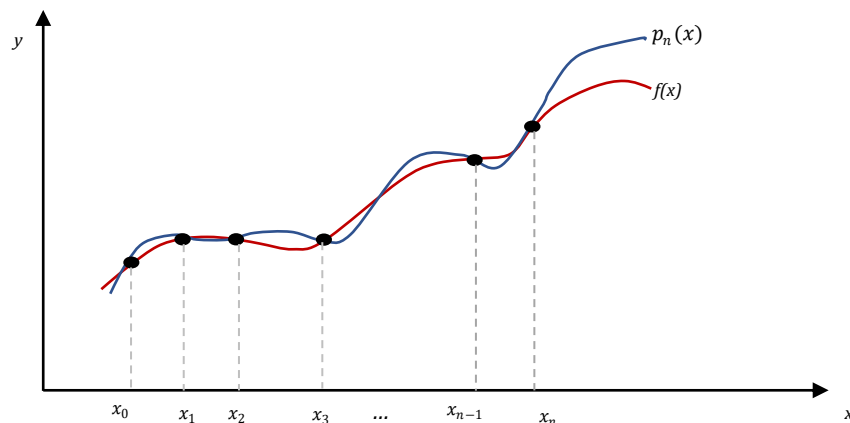
A continuación, con base en lo anteriormente presentado, se tienen las fórmulas de los tres métodos, donde h es la **distancia entre los valores de x (abscisa equidistante)**.

Regla del trapecio	La aproximación considera áreas de trapecios, y su fórmula generalizada es:  $\int_a^b f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x) dx = \text{área del trapecioide}$ con vértices $x_0, x_1, f(x_0), f(x_1)$ <i>Gráfica 5 Aproximación trapezoidal</i> $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{resto de las ordenadas})]$ La fórmula del error $E_t = -1/12 f''(\xi)(b - a)^3$
--------------------	---

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Fórmula Simpson 1/3	La aproximación se subdivide en tres intervalos, lo que ajusta a la curvatura de una parábola.  <i>Gráfica 6 Aproximación por Regla de Simpson 1/3</i> La fórmula generalizada es: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(\sum \text{ordenadas pares}) + 4(\sum \text{ordenadas impares})]$ Nota: El total de intervalos debe ser par. El error de truncamiento en la Regla de Simpson 1/3 se define por: $error = \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
Fórmula Simpson 3/8	En esta fórmula, el intervalo de integración se vuelve a subdividir, lo que permite que el intervalo de interpolación sea de grado tres, que ajusta a regiones no rectangulares de integración.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista



Gráfica 7 Aproximación por Regla de Simpson 3/8

La fórmula generaliza es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [y_0 + y_n + 2(\sum \text{ordenadas múltiplo de 3}) + 3(\sum \text{resto de ordenadas})]$$

Nota: El número de **intervalos debe ser múltiplo de 3**.

En el caso del error en la fórmula de la Regla de Simpson 3/8, está dado por;

$$\text{error} = -\frac{3}{80} \cdot h^5 f^{(4)}(\xi)$$

El error de truncamiento requiere del cálculo de la cuarta derivada, y su aplicación en un punto ξ , que pertenezca al intervalo.

A continuación, te presentamos algunos ejemplos.

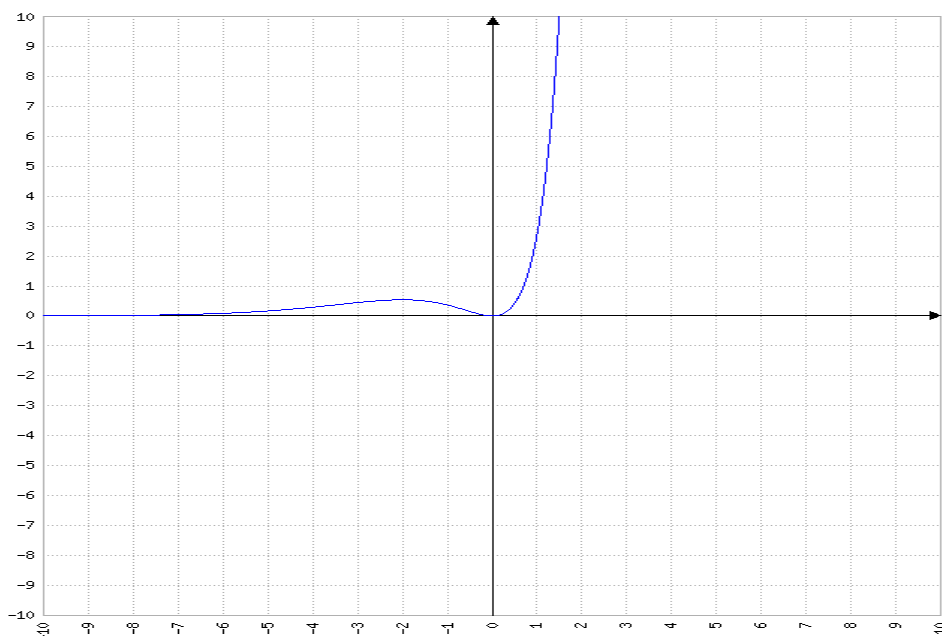
Ejemplo. Contrastar los dos métodos, analítico vs numérico, para resolver la siguiente integración.

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Solución

Te recomendamos realices una gráfica de la función $x^2 e^x$, ya que te permite ver la representación de la curva y distinguir los límites de la integración, así como visualizar el área bajo la curva.



Gráfica 8 Ejemplo

En este caso, sí se puede efectuar la integración por partes analíticamente. A continuación, se procede a calcular la integral, tanto analítica, como numéricamente.

Mediante un enfoque analítico , se tiene la multiplicación de dos funciones- Se procede a realizar la resolución por partes	Mediante un enfoque numérico , se procede a tabular en n subintervalos, respetando los límites de la integración.
$\int_0^3 x^2 e^x dx$ $\int u dx = uv - \int v du$ $u = x^2$	Los límites de la integración van de 0 a 3. El analista puede proponer el número de subintervalos, por ejemplo, n=6. Se deben generar los pasos, a través de

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$du = 2x dx$ $dv = e^x dx$ $v = e^x$ Lo que queda es: $x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$ Se integra de nuevo por partes. La aplicación en dos ocasiones de la integración por partes da por resultado $x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$ La evaluación de la integración en los límites es [0, 3]. El área bajo la curva es 98.42768	$h = \frac{b - a}{n}$ $h = \frac{3 - 0}{6} = 0.5$ De aquí, h=0.5. Se ha utilizado una hoja de cálculo, para obtener $f(x) = x^2 e^x dx$, en cada nodo o punto. <table><tr><th>Iteración</th><th>X</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0.5</td><td>0.41218032</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>2.71828183</td></tr><tr><td>3</td><td>1.5</td><td>10.0838004</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>29.5562244</td></tr><tr><td>5</td><td>2.5</td><td>76.1405873</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>180.769832</td></tr></table> A_{total} $= \frac{h}{2} [y_0 + y_n]$ $+ h \sum \text{resto de las ordenadas}$ Se aplica la fórmula de la Regla del Trapecio, siguiendo como guía el número de iteración para la asignación de “y”.	Iteración	X	f(x)	0	0	0	1	0.5	0.41218032	2	1	2.71828183	3	1.5	10.0838004	4	2	29.5562244	5	2.5	76.1405873	6	3	180.769832
Iteración	X	f(x)																							
0	0	0																							
1	0.5	0.41218032																							
2	1	2.71828183																							
3	1.5	10.0838004																							
4	2	29.5562244																							
5	2.5	76.1405873																							
6	3	180.769832																							

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

	$A_{Trap} = \frac{0.5}{2} [0 + 180.769832] +$ $0.5(0.41218032 +$ $2.71828183 + 10.0838004 + 29.5562244 +$ $76.1405873)$ $A_{Trap} = 104.6479$
--	---

Ejemplo. ¿Cómo obtener información sobre la exactitud del resultado de la Regla del Trapecio?

Cuando se cuenta con los resultados, el analítico y el numérico, el porcentaje de error se obtiene al dividir el resultado analítico entre el numérico, y de ahí al generar un porcentaje.

En el caso de $\int_0^3 x^2 e^x dx$, se tuvieron dos resultados

Analítico	Numérico
Área= 98.42768	$A_{Trap} = 104.6479$
$error = 100 - \frac{98.42768}{104.6479} * 100$ $= 5.94395\%$ Esto significa que el resultado numérico presenta un error del 5.94%, con respecto al resultado analítico.	

Cuando no se conozca el resultado exacto analítico, con el método numérico se pueden hacer corridas, mediante la modificación de h . Cuando se incrementa el número de trapezoides, y se observa que ya no hay una diferencia representativa entre dos corridas, se puede decir que se ha obtenido un resultado satisfactorio.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

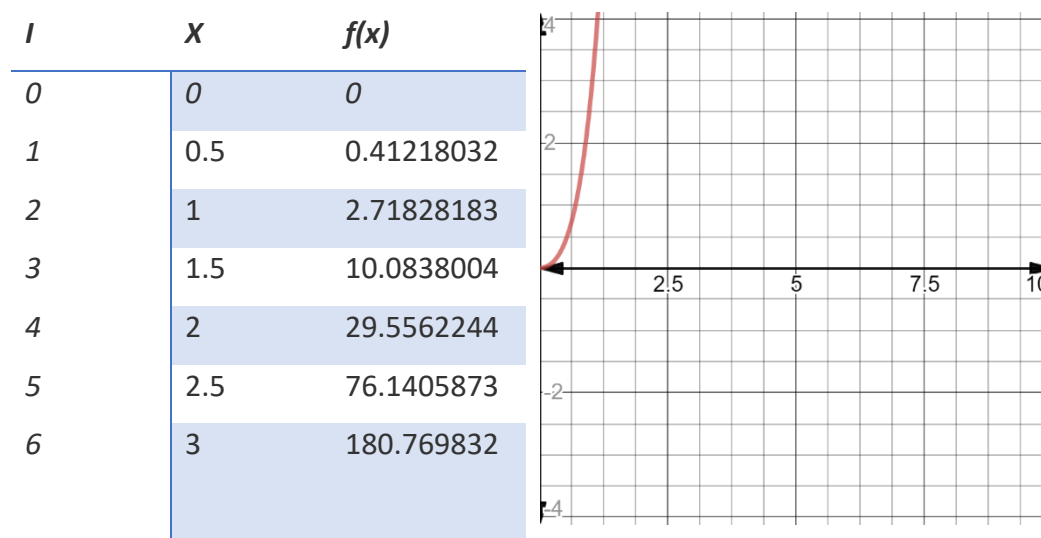
Ejemplo. Obtener el área bajo la curva de la siguiente función, mediante la Regla de Simpson 1/3

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Solución

Se procede a calcular el área bajo la curva, mediante el método de Simpson 1/3, con un número de subintervalos, en este ejemplo $n=6$, para un dominio $[0, 3]$, por lo que el paso resulta en $h=0.5$.

Se genera una tabulación con la función, asimismo, se puede visualizar el segmento de la gráfica que le corresponde:



Gráfica 9 Ejemplo

Es importante, tener en cuenta que el número de intervalos es igual al número de puntos menos 1, esto es, dos intervalos estarán dados por 3 puntos. En el presente ejemplo, existen 6 intervalos, es par, con lo cual se puede emplear la regla de Simpson 1/3.

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{0.5}{3} [0 + 180.769832 + 2(2.71828183 + 29.5562244) + 4(0.41218032 + 10.0838004 + 76.1405873)]$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$$A_{\frac{1}{3}} = 98.6441$$

El error con respecto al resultado analítico corresponde al 0.2194%, lo cual muestra una mejora notable, en comparación con la fórmula del trapecio.

Ejemplo. Obtener el área bajo la curva de la función, por medio de la Regla de Simpson 3/8.

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Solución

De nuevo se tabulan los puntos, buscando que el intervalo sea un múltiplo de 3.

<i>I</i>	<i>x</i>	<i>f(x)</i>	
0	0	0	y_0
1	0.5	0.41218032	
2	1	2.71828183	
3	1.5	10.0838004	Ordenada múltiple de 3
4	2	29.5562244	
5	2.5	76.1405873	
6	3	180.769832	y_n

La tabulación obtenida en casos anteriores es válida, debido a que el número total de intervalos (6), es múltiplo de 3.

$$A_{3/8} = \frac{3}{8}h[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas de orden múltiplo de 3} + 3 \sum \text{resto de las ordenadas}]$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$$A_{\frac{3}{8}} = 0.1875(527.419255)$$

$$A_{\frac{3}{8}} = 98.89111$$

El resultado ha perdido precisión, en comparación con el obtenido por la Regla de Simpson 1/3. Es importante generar una representación gráfica de los puntos, y observar el comportamiento de la función, en el intervalo de la integración.

Nota. Es conveniente que se defina cuándo usar una fórmula de integración numérica. Se elegirá la Regla del Trapecio para ajustar a una línea recta, la Regla de Simpson 1/3 a una parábola, y la Regla de Simpson 3/8, a una forma cúbica.

En el ejemplo, la forma del rango de integración asemeja a una parábola, por ello, la Regla de Simpson 1/3 alcanzó mejor exactitud.

Cabe mencionar que, cuando el comportamiento de la curva sea errático, en términos de contener segmentos rectos, parabólicos y cúbicos, se puede realizar una aplicación múltiple de los tres métodos numéricos. Asimismo, si se tiene un número de intervalo que no corresponde, por ejemplo, a la condición de múltiplo de tres para la Regla del Trapecio 3/8, se puede segmentar las áreas de integración y emplear, por ejemplo, Regla del Trapecio y Regla de Simpson 3/8.

A continuación, te presentamos ejemplos resueltos de problemas de aplicación.

Ejemplo. La siguiente tabla representa el gasto instantáneo del petróleo crudo en un oleoducto (en miles de libras por hora). El flujo se mide a intervalos de 12 minutos.

Hora	6:00	6:12	6:24	6:36	6:48	7:00	7:12	7:24	7:36	7:48	8:00	8:12
Gasto	6.2	6.0	5.9	5.9	6.2	6.4	6.5	6.8	6.9	7.1	7.3	6.9

¿Cuál es la cantidad de petróleo bombeado durante 2 horas y 12 minutos?

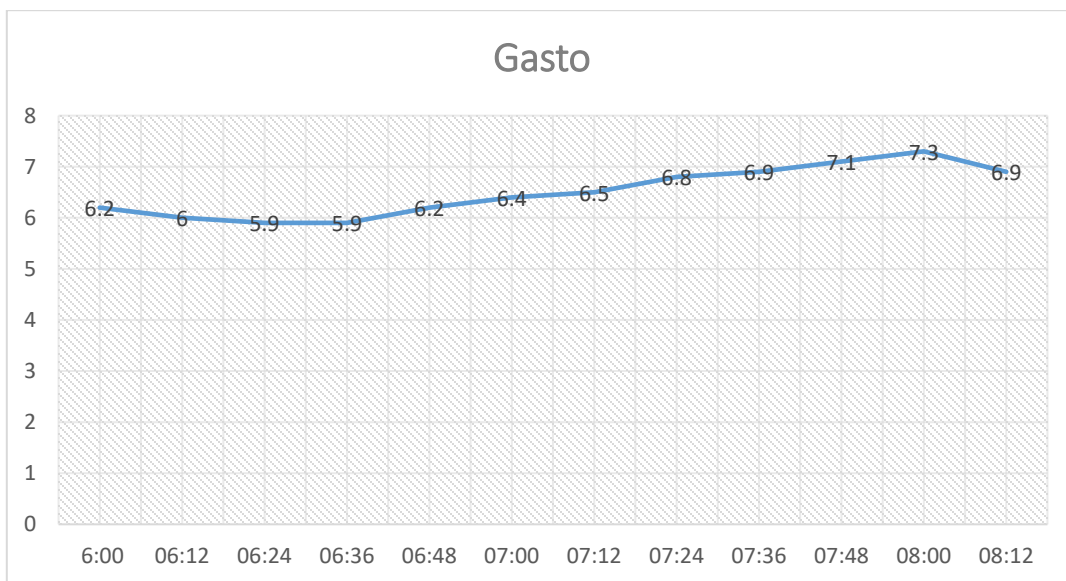
Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Solución

Para el planteamiento del problema, conviene saber que por gasto, se entiende el flujo de masa por unidad de tiempo, en este caso, miles de libras por hora. La tabla muestra un periodo de dos horas con 12 minutos, que están divididos en intervalos equidistantes de 12 minutos.

Lo anterior indica que no se efectúan de manera continua, sino que se tienen como restricciones experimentales, las mediciones con intervalos de tiempo regulares.

Estos puntos representan las coordenadas de una función **continua** del gasto, como una acumulación de cambios que sigue el flujo del combustible en el tiempo (Véase gráfico 10).



Gráfica 10 Gasto

En la gráfica 10, entre los valores de un intervalo, para efectos del problema, es posible leer una serie infinita de datos, en donde el tiempo t corresponde a la variable independiente, y el gasto G , la variable dependiente:

$$f(t) = G$$

Las coordenadas finitas de la tabla corresponden a $f(t)$, por lo cual la herramienta matemática para responder a la pregunta sería:

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

1. Una aproximación polinomial a partir de la interpretación de Lagrange (interpolación)
2. Integración numérica definida para el rango establecido

Dado que los puntos de la tabla son valores puntuales y que el interés es conocer la cantidad de gasto acumulado, de tales cambios, en dos horas 12 minutos; no es posible multiplicar la coordenada correspondiente a 2 horas 12 minutos por el gasto correspondiente, más bien, el gasto acumulado (suma de los intervalos).

Además, el tiempo es una variable continua, no discreta, por lo tanto, la suma de intervalos requiere de una integración.

Con el análisis realizado, se puede continuar con la **construcción del modelo matemático**. El dato requerido es la cantidad total del petróleo bombeado, que se calcula al multiplicar el gasto por el tiempo. Sin embargo, se observa en la tabla que el gasto es variable, por tanto, los datos se podrían traducir en el siguiente modelo matemático:

$$\int_0^{2.2} (\text{Gasto}) dt, \text{ cuyas unidades serán lb/hr}$$

Para los límites de integración 2 horas 12 minutos, equivalen a 2.2 horas.

Con base en lo anterior, los métodos numéricos de solución para estimar $\int_a^b f(x) dx$, los métodos de Newton- Cotes funcionan en dos pasos:

- a. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n intervalos de igual amplitud, cuyos valores extremos son sucesivamente

$$x_i = x_0 + i\left(\frac{b-a}{n}\right), i=0, 1, 2, \dots, n$$

Para quedar en la nueva notación $x_0 = a$ y $x_n = b$

- b. Se aproxima $f(x)$ por el polinomio de interpolación $p_n(x)$ de grado n , y se integra para obtener la aproximación de la integral.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Nótese que se obtendrán valores diferentes de la integral para distintos valores de n , como se verá con los tres métodos.

Si el problema se soluciona, por **Regla del Trapecio**

Se aplicará $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{resto de las ordenadas})]$

Los datos que se tienen son:

Hora	Gasto
6:00	6.2
6:12	6.0
6:24	5.9
6:36	5.9
6:48	6.2
7:00	6.4
7:12	6.5
7:24	6.8
7:36	6.9
7:48	7.1
8:00	7.3
8:12	6.9

h, equivale a la distancia en el tiempo, 0.12 minutos, cuya conversión a horas es 0.2.

Entonces,

$$\int_0^{2.2} \text{Gastodt} \approx \frac{0.2}{2} [6.2 + 6.9 + 2(6 + 5.9 + 5.9 + 6.2 + 6.4 + 6.5 + 6.8 + 6.9 + 7.1 + 7.3)]$$

Observa que $y_0 = 6.2$, $y_n = 6.9$ y $\Sigma \text{resto de las ordenadas}$, equivalen a las mediciones intermedias entre la inicial y la final.

$$\int_0^{2.2} (\text{Gasto})dt \approx \mathbf{14.31}$$

Si el problema se soluciona por el método de **Simpson 1/3**, se recomienda que los datos discretos queden numerados de la siguiente forma:

Las ordenadas pares se eligen de acuerdo con el subíndice par $x_2, x_4, x_6, x_8, x_{10}$.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

i	Hora	Gasto	
x_0	6:00	6.2	
x_1	6:12	6.0	
x_2	6:24	5.9	Ordenada par
x_3	6:36	5.9	
x_4	6:48	6.2	Ordenada par
x_5	7:00	6.4	
x_6	7:12	6.5	Ordenada par
x_7	7:24	6.8	
x_8	7:36	6.9	Ordenada par
x_9	7:48	7.1	
x_{10}	8:00	7.3	
x_{11}	8:12	6.9	

De este caso, se mantiene que $h = 0.2$

Asimismo, el número de intervalos es $n=11$

En principio, no se puede aplicar en forma directa la Regla de Simpson 1/3, porque el número total de intervalos debe ser par.

Sin embargo, se puede aplicar la Regla de Simpson 1/3 hasta el intervalo x_8 , y luego la Regla de Trapecio para los intervalos restantes x_9, x_{10} y x_{11} .

El área aproximada hasta el intervalo x_8 , es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2(\sum \text{ordenadas pares}) + 4(\sum \text{ordenadas impares})]$$

$$A_{1/3} \cong \frac{0.2}{3} [6.2 + 6.9 + 2(5.9 + 6.2 + 6.5) + 4(6 + 5.9 + 6.4 + 6.8)]$$

$$A_{1/3} \cong 10.04667$$

Ahora, para el resto de las ordenadas, se aplica la Regla del Trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(\sum \text{resto de las ordenadas})]$$

$$A_{Trap} \cong \frac{0.2}{3} [6.9 + 6.9 + 2(7.1 + 7.3)]$$

$$A_{Trap} = 4.26$$

$$\int_0^{2.2} \text{Gastodt} \approx 10.04667 + 4.26$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 14.30667$$

Si el problema se resuelve por el método de **Simpson 3/8**, la fórmula es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [y_0 + y_n + 2(\sum \text{ordenadas múltiples de 3}) + 3(\sum \text{resto de ordenadas})]$$

La condición para emplear la Regla de Simpson 3/8, es que el número de **intervalos sea múltiplo de 3**.

	Hora	Gasto
x_0	6:00	6.2
x_1	6:12	6.0
x_2	6:24	5.9
x_3	6:36	5.9
x_4	6:48	6.2
x_5	7:00	6.4
x_6	7:12	6.5
x_7	7:24	6.8
x_8	7:36	6.9
x_9	7:48	7.1
x_{10}	8:00	7.3
x_{11}	8:12	6.9

En este ejemplo se tienen 11 intervalos, por lo que se aplica la Regla de Simpson 3/8 a 9 intervalos, el resto se considera la Regla del Trapecio.

Se mantiene que $h = 0.2$. Las ordenadas múltiples de 3, se eligen de acuerdo al subíndice x_3, x_6, x_9 . Al final se tienen el resto de las ordenadas.

Para los 9 intervalos de x_0 a x_9 , la Regla de Simpson 3/8 es:

$$A_{3/8} \cong \frac{3}{8} 0.2 [6.2 + 7.1 + 2(5.9 + 6.5) + 3(6 + 5.9 + 6.2 + 6.4 + 6.8 + 6.9)]$$

$$A_{3/8} \cong 11.4525$$

Para el resto de los intervalos, se usará la Regla del Trapecio.

$$A_{Trap} \cong \frac{0.2}{2} [7.1 + 6.9 + 2(7.3)]$$

$$A_{Trap} = 2.86$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx 11.4525 + 2.86$$

$$\int_0^{2.2} Gastodt \approx \mathbf{14.3125}$$

Cada método ha ofrecido resultados cercanos:

Regla del trapecio: 14.31

Fórmula de Simpson 1/3: 14.3067

Fórmula de Simpson 3/8: 14.3125

Los resultados son similares, pero ¿cuál es el que se podría escoger?

Cada fórmula de integración tiene una fórmula del error. Normalmente, por el polinomio de aproximación la Regla de Simpson 1/3 ofrece el mejor ajuste. En este ejemplo, se desconoce la función, ya que solo se cuenta con un conjunto de coordenadas.

No obstante, por el comportamiento de la curva, un polinomio de grado tres, ajusta mejor al área bajo la curva. El resultado de la Regla de Simpson 3/8, 14.3125 libras/hora representa el gasto aproximado del petróleo bombeado en 2 horas 12 minutos.

Ejemplo. Te presentamos otro problema, cuyo objetivo educativo es el de mostrar cómo se aborda la aplicación de la integración con métodos analíticos y numéricos y la contrastación de ambos, mediante la aplicación del concepto de error.

Se tiene el siguiente caso, obtener la integral de la función $\int_0^{0.6} 2e^{-1.5x} dx$.

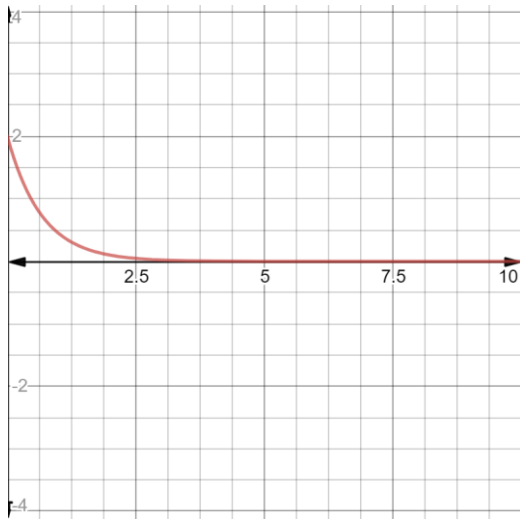
- Resolver por medio de métodos analíticos
- Usar la Regla del Trapecio
- Usar alguna forma de Simpson para obtener mayor precisión
- Para los incisos b. y c., encontrar el error relativo

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Solución.

Se tiene una función que corta al eje Y, en el punto (0,2). Dado que su variable independiente x, tiene un valor negativo, será decreciente en todo su dominio.

Además, vale la pena recordar la función que no corta al eje X, es decir no tiene raíces reales, la función tiene forma cóncava y tiene una asíntota horizontal, como se puede apreciar en la siguiente gráfica 11. En este sentido, $x > 0$.



Gráfica 11 Gráfica de la función

Se trata de encontrar el área entre los límites $x=0$ y $x=0.6$.

Cuando se procede a resolver el modelo **por un método analítico**, tomar en cuenta que

$$\int_0^{0.6} 2e^{-1.5x} dx$$

$$\text{es de la forma } \int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$$

$$\int_0^{0.6} 2e^{-1.5x} = -\frac{2}{1.5} e^{-1.5x} \Big|_0^{0.6}$$

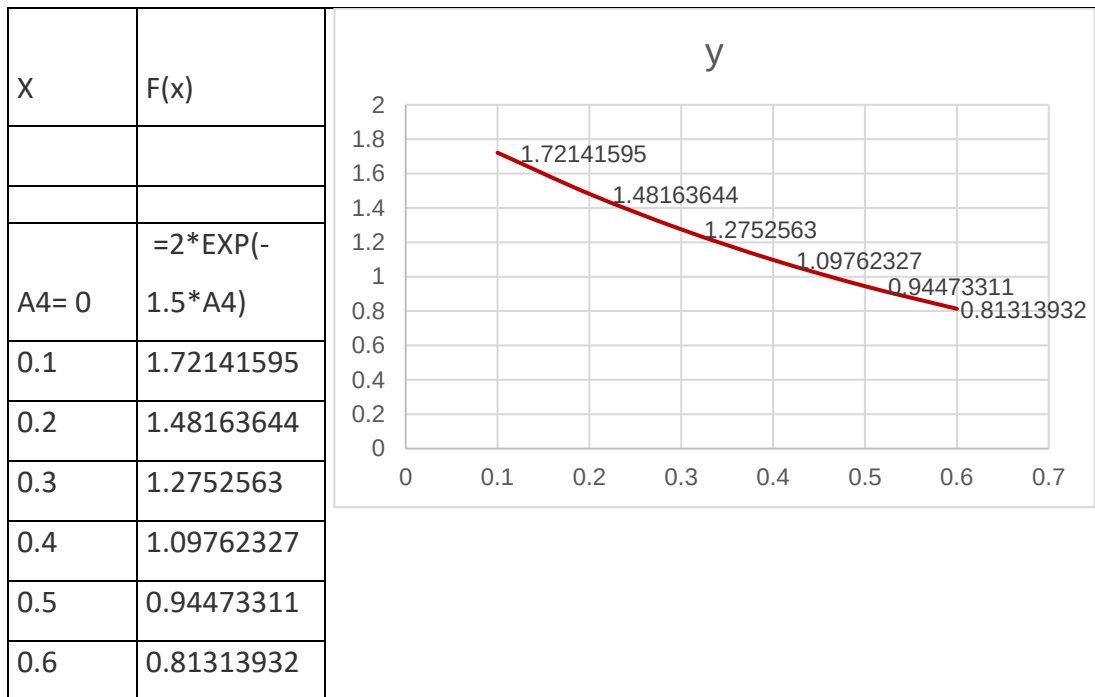
$$= -0.542092 + 1.33333$$

$$= \mathbf{0.79124}$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Ahora, se procede a solucionarlo **numéricamente por Regla del Trapecio**. Para ello, se requiere generar una tabulación con particiones uniformes del intervalo de integración para los valores de x, lo cual se genera fácilmente en Excel.

En una columna se ingresarán los valores con distancia 0.1 que se convertirán en el argumento de la función $2e^{-1.5x}$, en consideración, como se aprecia en la tabla que muestra el ingreso de la operación sobre la celda A4, con valor de 0.



Gráfica 12 Ejemplo

La fórmula de la Regla del Trapecio:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{resto de las ordenadas})]$$

Donde $y_0 = 2$ y $y_n = 0.81313932$ La aplicación sobre los valores discretos es:

$$\frac{0.1}{2} [2 + 0.8131 + 2(1.7214 + 1.4816 + 1.2752 + 1.0976 + 0.9447)] = \mathbf{0.792723473}$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Ahora, se elige Simpson 3/8 porque teóricamente se obtiene una mejor aproximación que con Simpson 1/3.

De nuevo se tomará en cuenta la tabulación arriba generada y se aplica la fórmula de Simpson 3/8:

X	$\int_0^{0.6} 2e^{-1.5x} dx$	$\int_a^b x dx =$
		$\frac{3h}{8} [y_0 + y_n + 2(\Sigma \text{ordenadas múltiplos de 3})$
A4= 0	=2*EXP(-1.5*A4)	$+ 3(\Sigma \text{resto de ordenadas})]$
0.1	1.72141595	$[2+0.8131+2(1.2752)+3(1.7214+1.4816+1.0976+0.9447)]$ =0.791245434
0.2	1.48163644	
0.3	1.2752563	
0.4	1.09762327	
0.5	0.94473311	
0.6	0.81313932	

El error de aproximación es una medida del ajuste o cálculo de una magnitud aproximada, con respecto al valor real o teórico que dicha magnitud tiene.

$$E_A = \frac{|Valor Real - Valor Aproximado|}{Valor Real} (100)$$

Se tiene lo siguiente:

Valor obtenido por método analítico	0.79124
Valor numérico por Regla del Trapecio	0.79272
Valor numérico por Simpson 3/8	0.79124

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

El cálculo del error aproximado con respecto a la Regla del Trapecio:

$$E_A = \frac{|0.79124 - 0.79272|}{0.79124} (100) = 0.1870\%$$

El cálculo del error aproximado con respecto a la fórmula de Simpson 3/8, y por el número de decimales:

$$E_A = \frac{|0.79124 - 0.79124|}{0.79124} (100) = 0\%$$

Es sabido que el método analítico da un resultado, el cual por efectos de redondeo y porque generalmente maneja números irracionales tienen una aproximación mínima, es decir, no presentan un resultado enteramente puntual.

En el caso de los métodos numéricos y en particular los de la familia de Newton-Cotes, acotan el área de integración al inicio y al final, sumando el ancho del primero y último trapecio. Por su naturaleza son propios para aproximaciones, y el error es mayor que en el método analítico.

Las diferencias mostradas en los resultados indican lo siguiente: La Regla del Trapecio toma en consideración los trapecios de ancho (h) infinitesimal en orden secuencial, lo que origina una aproximación burda, ya que suma tanto trapecios con ordenadas altas como trapecios con ordenadas bajas.

El método de Simpson 3/8, aunque mantiene la misma figura geométrica, tiene una aproximación mejor, ya que su recorrido no es secuencial, esto es, agrupa figuras con ordenadas similares, lo que disminuye el porcentaje de error. Lo anterior se refiere a que, agrupa todas las figuras con ordenadas bajas y después agrupa las figuras con ordenadas altas por lo que su porcentaje de error disminuye considerablemente.

Actividades de aprendizaje

Lee con atención los casos y elige la respuesta correcta.

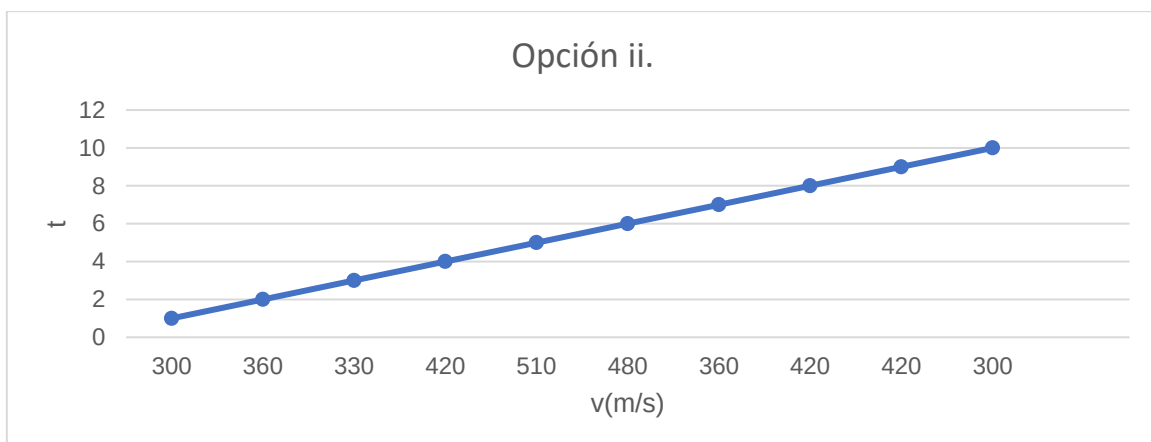
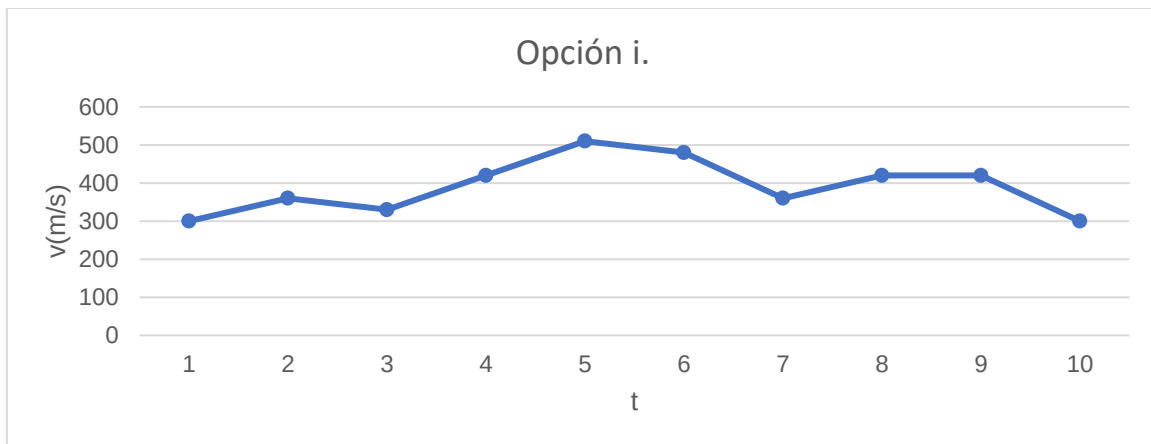
Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

d. En una institución educativa se está desarrollando un sistema para conseguir una mayor eficiencia energética en aeronaves no tripuladas (dron), con el fin de resguardar y vigilar las instalaciones de dicha institución.

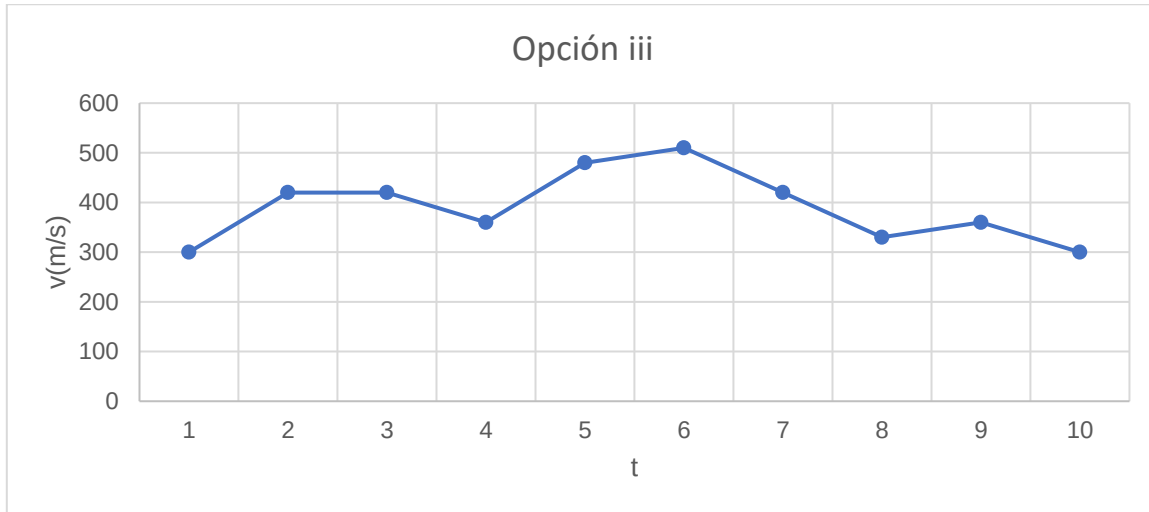
Las pruebas efectuadas al dron se muestran en la siguiente tabla:

t (s)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V (m/s)	300	360	330	420	510	480	360	420	420	300

Obtener la gráfica de la tabla anterior. Elige la opción correcta



Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista



e. Para calcular la velocidad del dron, se utilizó un control sobre el tacómetro integrado al mismo. En el experimento se anotaron medidas del tiempo en forma manual. Te volvemos a enseñar la tabla de tiempo.

t (seg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Subíndices	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	300	360	330	420	510	480	360	420	420	300

Utilizar el método de Simpson 3/8 para determinar la distancia recorrida por el dron. Elige la respuesta correcta.

i. $A_{3/8} = 3476.25 \text{ metros}$	ii. $A_{3/8} = 3650.2 \text{ metros}$	iii. $A_{3/8} = 3280.45 \text{ metros}$
--	--	--

f. De la gráfica obtenida por medio de la tabulación t - vel , observe las características geométricas de la misma. Se trata de obtener mayor exactitud de los cálculos. ¿En qué orden de aplicación de los métodos de integración numérica estudiados ajusta mejor con el comportamiento de la gráfica? Se sugiere revise las gráficas 5,6 y 7, de páginas anteriores.

Elige la respuesta correcta.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

i. Regla del Trapecio, Simpson 1/3, Simpson 3/8	ii. Regla del Trapecio, Simpson 3/8, Simpson 1/3	iii. Simpson 1/3, Regla del Trapecio, Simpson 3/8
---	--	---

Se deja al estudiante que realice la integración por secciones.

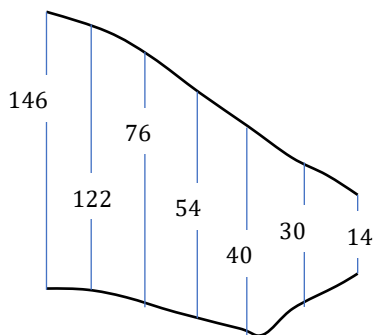
g. ¿Cómo le explicarías a tu compañero las razones de variaciones en los resultados de cada inciso del problema f?

Nivel 3. Aplicaciones de integración numérica

En este nivel se pone a prueba tu pensamiento estratégico. Se trata de plantear un objetivo, analizar los recursos con los que se cuentan para llegar a este, y luego se les dispone de tal forma que faciliten el alcance, de la mejor manera posible, considerando también el concepto de error.

Presentaremos algunos ejemplos que pueden servirte como una base para resolver exitosamente los problemas que se te presenten en tu futura vida profesional.

Ejemplo de aplicación real. Una ciudad desea drenar y rellenar un pantano, cuya

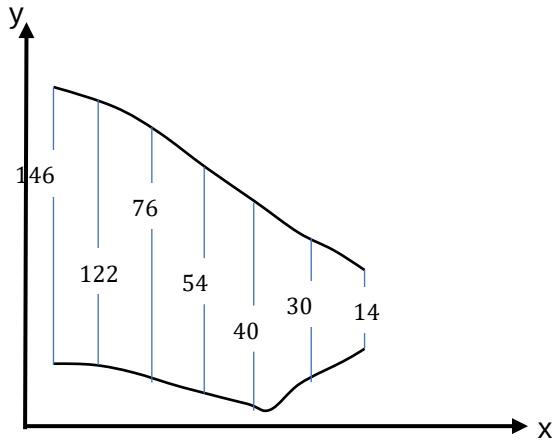


profundidad media es de 5 metros, ¿cuántos metros cúbicos de escombros se requerirán para ocupar el área, una vez que haya sido drenado el pantano?

A continuación, se presenta una imagen del pantano. De antelación, se sabe que $h=20$ metros.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Para el planteamiento del problema, considere lo siguiente:



Se trata de obtener el volumen, el cual estará dado por la obtención del área multiplicado por la profundidad.

Se tiene que existen 6 segmentos equidistantes, con $h=20$ metros. El pantano tiene distintas medidas de “y”.

En esta sección corresponde a decidir cuál de las fórmulas de integración numérica aproximará mejor al área del pantano.

Observar que el comportamiento gráfico del pantano forma rectas, por lo que la Regla del Trapecio, puede proporcionar una buena opción.

$$A_{trap} = \frac{h}{2}[y_0 + y_n] + h \sum \text{resto de las ordenadas}$$

$$A_{trap} = \frac{20}{2}[146 + 14] + 20[122 + 76 + 54 + 40 + 30]$$

$$A_{trap} = 8040m^2$$

Ahora, se requiere calcular el volumen:

$$volumen = 8040 * 5$$

$$volumen = 40,200m^3$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Se requieren aproximadamente **40,200m³** de relleno sanitario para ocupar el volumen que antes ocupaba el pantano.

Ejemplo. Se desea diseñar un modelo de motor, y para ello, una empresa requiere determinar el trabajo para mover linealmente un objeto a 5 metros, mediante una prensa. La fuerza requerida es

$$F(x) = 100x \cdot \sqrt{125 - x^3}$$

Obtener el trabajo, en kilogramos-metro.

Solución

Hay que recordar que el trabajo se define como la fuerza que se aplica sobre un cuerpo, para desplazarlo de un punto a otro.

El planteamiento del problema está dado en encontrar el producto de la distancia recorrida de un cuerpo, por la fuerza sobre ese cuerpo.

Además, hay que tener en cuenta que el cuerpo recorrerá una distancia de 5 metros, o sea, se encuentra en el intervalo $[0, 5]$.

Entonces, por definición

$$W = \int_0^5 F(x) dx$$

Donde, el desplazamiento está dado por dx . Al sustituir, el modelo es:

$$\int_0^5 (100x\sqrt{125 - x^3})dx$$

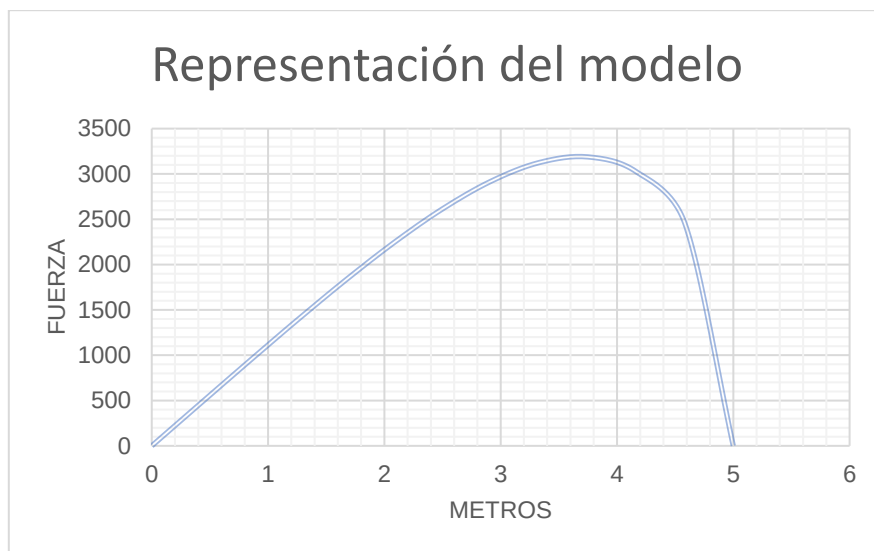
Existen tres implicaciones con el modelo. La primera, de acuerdo con su representación gráfica del modelo es que el área bajo la curva es continua, por lo que sí es posible realizar la integración.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

La segunda, es que el dominio de la función va de $(-\infty, 5]$, ya que para valores superiores a 5, la función, ya no está definida, lo cual es consistente con el rango de integración de $[0,5]$.

La tercera, por el comportamiento de la curva, se tienen como opciones la aplicación de uno de dos métodos: Regla de Simpson 1/3 o Regla de Simpson 3/8 que puede aproximar mejor la obtención del área bajo la curva. Sin embargo, el cálculo del error que implica la obtención de la cuarta derivada no está definida para el intervalo de integración.

Por ello, es deseable contar con pasos relativamente pequeños para mejorar la obtención del trabajo.



Gráfica 13 Ejercicio

Por la condición del método **Regla de Simpson 3/8**, se requiere generar un intervalo múltiplo de 3, así que se proponen usar 12 intervalos.

De ahí que h es:

$$h = \frac{5 - 0}{12} = \frac{5}{12}$$

Con el paso obtenido, se procede a tabular la función:

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

<i>I</i>	<i>x</i>	<i>f(x)</i>	
0	0	0	y_0
1	0.41666667	465.712682	
2	0.83333333	929.535787	
3	1.25	1386.5812	Múltiplo de 3
4	1.66666667	1828.55719	
5	2.08333333	2243.41005	
6	2.5	2614.56258	Múltiplo de 3
7	2.91666667	2919.40819	
8	3.33333333	3126.28574	
9	3.75	3187.84465	Múltiplo de 3
10	4.16666667	3023.69224	
11	4.58333333	2456.17798	
12	5	0	y_n

$$A_{3/8} = \frac{3}{8}h[y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas de orden múltiple de 3} \\ + 3 \sum \text{resto de las ordenadas}]$$

$$A_{3/8} = 10211.92445$$

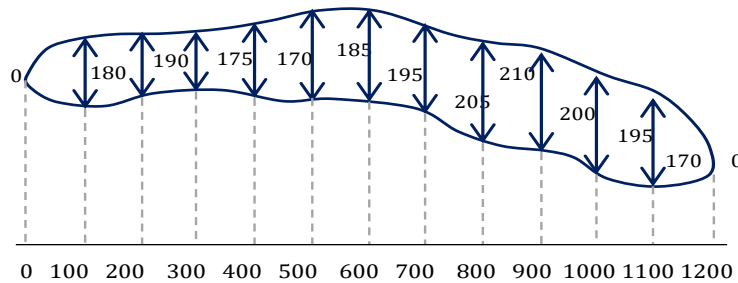
El trabajo que una fuerza realiza a lo largo de la trayectoria es aproximado a 10211.9244 Kg-metro, que refiere a que un kilogramo se ha movido un metro.

Se sugiere al lector que aplique la Regla de Simpson 1/3 y compare resultados.

Ejemplo. A continuación, se presenta la imagen de un socavón en una calle. Se ha reticulado la imagen, para distinguir la anchura, en centímetros, en puntos igualmente espaciados a lo largo de la calle, y con medidas de la distancia interna del socavón.

El interés se centra en estimar el área en centímetros cuadrados, como una base para decidir el tiempo que tomará realizar el mantenimiento del pavimento.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista



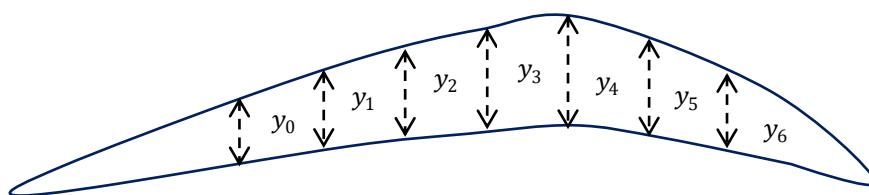
Gráfica 14 Ejercicio

El problema trata con obtener el área del socavón. La figura es irregular, el inicio de la esquematización se encuentra en el punto $x=0$, y llega hasta $x=1200$ cm, equidistante con 12 intervalos y con distancias de 100 centímetros.

Tomando en cuenta la geometría del socavón se recomienda la Regla de Simpson 3/8.

Se deja que el estudiante la aplique, e interprete el resultado ($\cong 212250\text{cm}^2$).

Ejemplo. El diseño de un nuevo tipo de aeroplano requiere un tanque de gasolina de sección transversal constante en cada ala. En la figura 15, se muestra un esquema a escala, en perspectiva de una sección transversal.



$$y_0 = 4.6 \text{ dm}$$

$$y_1 = 4.9 \text{ dm}$$

$$y_2 = 5.5 \text{ dm}$$

$$y_3 = 5.8 \text{ dm}$$

$$y_4 = 6.1 \text{ dm}$$

$$y_5 = 6.1 \text{ dm}$$

$$y_6 = 6.4 \text{ dm}$$

Gráfica 15 Ejercicio

Adicionalmente, se tiene por condición que el tanque debe cargar, aproximadamente, 3000 kg. de gasolina cuya densidad es $0.68\text{kg}/\text{dm}^3$. Se requiere estimar la longitud del tanque.

El espaciamiento horizontal es de 0.3dm.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Existe un concepto llamado sólido de Cavalieri, el cual menciona que si dos sólidos al ser cortados por planos paralelos producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen (Te invitamos a revisar el siguiente vínculo <https://www.geogebra.org/m/ptVCr8rH>).

Por definición, el volumen de un tanque es

$$V = \frac{m}{\text{densidad}}$$

Donde la masa equivale a 3000 kg de gasolina y la densidad es igual a 0.68 kg/dm^3 que resulta en:

$$V = \frac{3000}{0.68} = 4411.76471 \text{ dm}^3$$

Por otro lado, cualquier volumen es igual al área por su longitud:

$$V = A * l$$

En el problema se solicita la longitud, así que se requiere obtener el área.

Se aplicará la Regla de Simpson 1/3:

$$A_{1/3} = \frac{h}{3} [y_0 + y_n + 2 \sum \text{ordenadas pares} + 4 \sum \text{ordenadas impares}]$$

Asimismo, de $V = A * l$

$$l = \frac{V}{A}$$

Que permitirá calcular la longitud del tanque de gasolina.

$$A_{\frac{1}{3}} = \frac{3}{3} [4.6 + 6.4 + 2(5.5 + 6.1) + 4(4.9 + 5.8 + 6.1)]$$

$$A_{\frac{1}{3}} = 101.4 \text{ dm}^2$$

Por otro lado,

$$l = \frac{4411.76471}{101.4}$$

$$l = 46.50852 \text{ dm}$$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

La longitud del tanque es $l = 46.50852dm$.

Actividades de aprendizaje

Por los lineamientos de una prueba de laboratorio, una barra de suspensión no debe deformarse más de 4 cm, cuando se aplica una fuerza en kilonewtons en su parte central. Se requiere saber el trabajo W , efectuado sobre la barra para su deformación máxima, de acuerdo con las siguientes lecturas en el laboratorio.

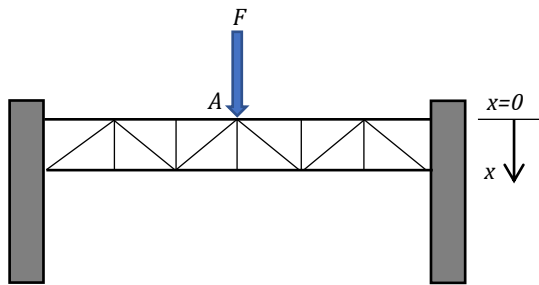


Figura 1 Ejercicio

Antes de que se resuelva el siguiente caso, vale la pena recordar lo siguiente:

- 1 kg de fuerza es igual a 9.81 Newtons (N), o sea aproximadamente, 10 000N es el peso equivalente a un auto.

El trabajo W en ingeniería se define como: $W = f * d$, siendo f la fuerza aplicada al cuerpo y d , el desplazamiento de este, por efecto de la fuerza.

Cantidad deformada x (cm)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
Fuerza aplicada (KN)	0	1.44	2.91	4.42	5.91	7.42	9.04	10.71	13.22

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Para resolver el problema, se sugiere se revise el documento: “Aplicación de la integración numérica para obtener la rigidez elástica de barras con sección variable, del autor F. Monroy- Miranda”, Revista Investigación y Tecnología, IV, 1, 21-44, 2003

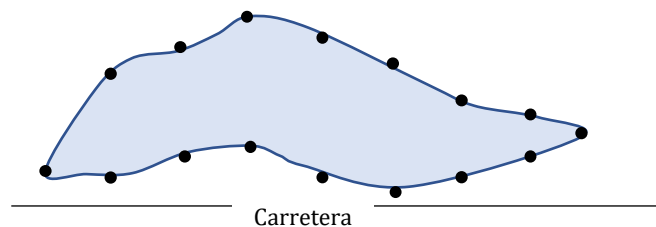
h. El modelo matemático analítico del sistema para este problema es:

i.	ii.	iii.
$W = \int_0^4 f(x) dx$	$W = \sum_0^4 f(x)dx$	$W = f * d$

i. El trabajo efectuado es:

i.	ii.	iii.
W=48.09 KN-cm	W=50.02 KN-cm	W=46.9 KN-cm

Una carretera en línea recta pasa junto a un lago. Un agrónomo te contrata para conocer el área aproximada del lago, y tú resuelves el problema tomando diferentes medidas; las más cercanas y las más lejanas a la carretera en diferentes puntos, de acuerdo con la siguiente figura y tabla.



Segmentos a lo largo de la carretera	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

Distancia a la orilla más cercana (km)	0.5	0.3	0.7	1	0.5	0.2	0.5	0.8	1
Distancia a la orilla más lejana (km)	0.5	2.3	2.2	3	2.5	2.2	1.5	1.3	1

j. Explica la tabla arriba definida

k. Explica el objetivo del caso y cómo sugieres que se aborde el problema. Proporciona argumentos lógicos

l. Estima el área del lago, eligiendo el método que consideres da la mejor aproximación. Elige la respuesta correcta y más aproximada al caso

i. $A = 11.25 \text{ km}^2$	ii. $A = 12.93 \text{ km}^2$	iii. $A = 9.56 \text{ km}^2$
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

m. ¿Cómo se calcularía la integral si en lugar de haber proporcionado la información que corresponde al perímetro del lago, se hubiesen proporcionado las distancias internas puntuales? Explica tu proceso de solución.



Nivel 4. Aplicaciones de integración numérica

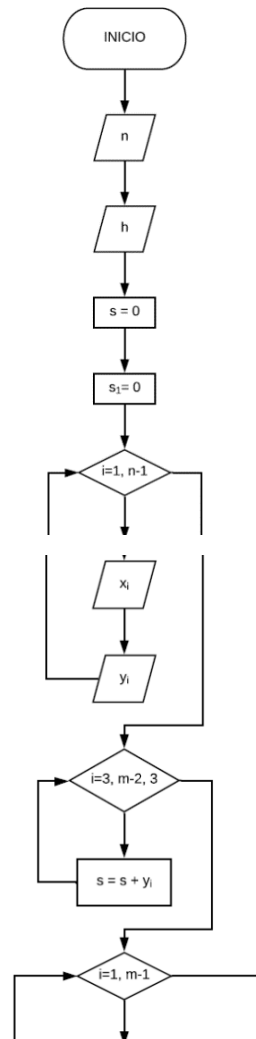
En este nivel se requiere de una investigación, tiempo para planear y analizar las múltiples partes del problema.

Se han generado un proyecto a desarrollar. Como base de este, a continuación, se presenta el pseudocódigo de Simpson 3/8.

Un pseudocódigo es un proceso lógico de solución de un problema en lenguaje natural (Fig. 2).

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

1. Leer el número de datos (n)
2. Leer el ancho del paso (h)
3. Inicializar suma en cero ($s=0$)
4. Inicializar suma en cero ($s_1 = 0$)
5. Leer datos x_i, y_i , para $i = 0$ a $i = m$
6. Sumar las ordenadas de acuerdo con $i = 3$, hasta $i = m - 2$, en pasos de 3
7. Sumar las ordenadas de acuerdo con $i = 1$, hasta $i = m - 1$, solo con la condición de que $i \bmod 3$, sea diferente de cero
8. Calcular la integral, de acuerdo con $it = \frac{3h}{8} (y_0 + y_m + 2s + 3s_1)$
9. Dibujar tabla de datos
10. Imprimir el valor de it
11. fin



Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC- SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

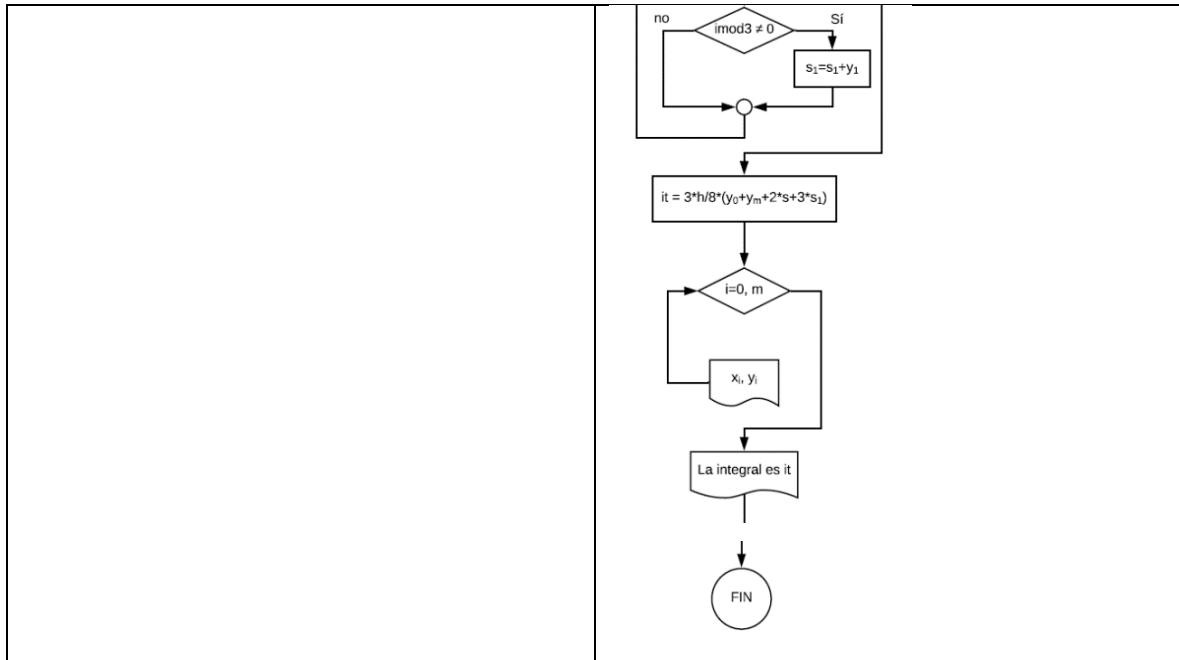


Figura 2 Pseudocódigo y algoritmo del método de Simpson 3/8

Actividades de aprendizaje

Proyecto

Tomar en cuenta el caso de una carretera en línea recta pasa junto a un lago y la necesidad de conocer el área aproximada del lago.

Elaborar un programa de computadora en un lenguaje de uso general (el que tú conozcas) para resolver el caso en

- Regla del Trapecio
- Fórmula de Simpson 1/3
- Fórmula de Simpson 3/8

n. Construir el pseudocódigo y diagrama de flujo para los tres métodos (te recomendamos ampliamente usar la aplicación de *lucid chart*).

o. Generar el programa fuente y presentar el programa ejecutable para los tres métodos.

p. Realizar una tabla comparativa con las características de los tres métodos, tomando en cuenta el concepto de error.

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

→ Cierre

El cierre de la presente lección se cierre en una serie de preguntas de los contenidos directos, también está orientado a que se verbalicen conceptos y resolver algunos problemas, en concordancia con los objetivos planteados de aprendizaje.

1. ¿Cuáles son las ventajas de usar las Reglas de Simpson, con respecto a la Regla del Trapecio?
2. Te encuentras explicando a tu compañero(a) que no fue a clase, acerca de la Regla del Trapecio (a) ¿Qué dirías de esta Regla y cómo usarla?, (b) ¿Qué dirías de su precisión?
3. Algunas integrales no pueden ser evaluadas mediante esquemas analíticos, en este sentido la integración numérica ofrece una manera práctica de aproximar los valores. Resolver la siguiente integral definida por integración numérica, mediante la Regla de Simpson 1/3, tomando 50 subintervalos.

$$\int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx$$

4. El método de integración de Simpson 1/3, ¿a qué tipo de aproximación polinomial ajusta su curva?
 - a. Una parábola
 - b. Una línea recta
 - c. Una curva de grado superior a dos
5. El método del Trapecio utiliza el ancho de paso con valores iguales. Si los pasos fueran desiguales y se quiere una buena aproximación, ¿qué se tendría que hacer para obtener el valor de la integración?
 - a. Segmentar los intervalos de paso, agrupándolos por coincidencia
 - b. Interpolarse generando mayor número de puntos
 - c. Considerar los pasos iguales y usar un único método

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

6. La figura geométrica a la cual se aproxima la fórmula de Simpson 1/3 se basa en la serie de:

- a. Taylor
- b. Fourier
- c. Laplace

7. La eficiencia del método de integración Simpson 3/8 está asociada al:

- a. Cálculo del error aproximado
- b. Número de iteraciones efectuadas
- c. Cálculo del error absoluto

8. La idea original para el cálculo de áreas irregulares fue sugerida en la antigüedad por:

- a. Euclídes
- b. Pitágoras
- c. Tales de Mileto

9. La Regla del Trapecio consiste en sumar las ordenadas de los extremos y_o y y_n , más dos veces la suma del resto de las ordenadas. Esta última suma se debe inicializar algorítmicamente en:

- a. Cero
- b. La primera ordenada
- c. La última ordenada

10. En el siguiente problema: La masa total de una barra de densidad variable está dada por

$$m = \int_0^l \rho(x)A(x)dx$$

Donde

$m = masa,$

$\rho = densidad,$

$A(x) = \text{área de la sección transversal}$

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

$x = distancia$, a lo largo de la barra

$l = longitud$ de la barra

Se pretende calcular la masa total para una barra de 12 metros de longitud. Determinar qué método numérico permite la mejor precisión posible:

- Simpson 3/8
- Simpson 1/3
- Trapecio

11. Con relación a la pregunta 11, observe la siguiente tabla donde se muestran las variables con unidades:

$x (m)$	0	2	4	6	8	10	12
$\rho (\frac{gr}{cm^3})$	4	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
$A (cm^2)$	100	103	106	110	120	133	150

a. ¿Cuál es la variable independiente?

i. x	ii. ρ	iii. A
--------	------------	----------

b. Se observa que la integral requiere un producto que contempla $\rho(x)A(x)dx$. Nótese primero que, son funciones y el producto escalar no procede. Segundo, $m * \frac{gr}{cm^3} * cm^2 = \frac{m*gr}{cm}$, lo cual no tiene un sentido, por la conversión de unidades, además, que no se trata de un cálculo discreto, sino continuo.

Lo anterior, implica que se requiere de una integración anidada. Determina el procedimiento que resuelve este problema.

i. $\int_0^l \rho(x) \left[\int_0^l A(x) dx \right]$	ii. $\int_0^l A(x) \left[\int_0^l \rho(x) dx \right]$	iii. $\int_0^l d(x) \left[\int_0^l A(x) \rho(x) dx \right]$
---	--	--

12. ¿Cuál de las siguientes funciones no es de solución compleja?

- Una función monovalente de 5° grado
- Una función trascendente conteniendo elementos trigonométricos y logarítmicos

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

iii. Una función de varias variables

13. Se desea construir un área de esparcimiento en un parque, cuyo contorno corresponde con la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}(4 + \cos(6\theta))^2$$

Mediante uno de los dos métodos de Simpson, encontrar el área de dicha zona, que servirá para determinar la compra de cajas de adoquín. (Nota, dado que se está tratando con coordenadas polares, los límites de integración están dados en radianes, tome un ciclo completo). El área aproximada está cercana a **51.83627878** unidades cuadradas.

→ Créditos

Esta lección ha sido posible gracias al apoyo recibido del Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza por parte de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA-UNAM), para el proyecto PE101119 “Diseño y aplicación de una metodología para el aprendizaje de Métodos Numéricos mediante actividades didácticas en aula virtual con G Suite for Education”.

Asimismo, se expresa un profundo reconocimiento y agradecimiento a los profesores de la FES Acatlán, la FES Aragón y la FES Cuautitlán, comenzando por quienes apoyaron en la gestión académica: Christian Carlos Delgado Elizondo, Mario Sosa Rodríguez y José Juan Contreras Espinosa.

→ Referencias

- Apostol T. M. (1967) *Cálculo volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Editorial Reverté, Barcelona.
- Chapra S.C. & Canale R.P. (2010). *Numerical Methods for Engineers*. McGraw Hill, U.S.
- Forsythe A., Keenan T., Organick R., Stenberg W. (1973). *Lenguajes de diagramas de flujo. Técnicas de Computación*. Limusa, México

Asignatura	Tema	Autores
Métodos Numéricos	Integración numérica	Nelly Rigaud Téllez
Derechos de autor CC-BY-NC-SA	Métodos de Newton-Cotes	Roberto Blanco Bautista

- Kharab A. & Guenther R.B. (2012). *An Introduction to Numerical Methods. A MATLAB Approach*. Taylor & Francis Group, U.S.
- Nieves Hurtado A. & Domínguez Sánchez F.C. (2014). *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Grupo Editorial Patria. México.
- Sears & Zemansky. (2009). *Física Universitaria, Volumen 1*. Addison- Wesley. México.
- Schiavone P., Coutanda C., Mioduchawski A. (2002). *Integral Methods in Science and Engineering*, Birkhauser, Boston
- Tricomi, F.G. & Baker C.C.H. (2002). *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods*, Birkhauser, Boston.



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional