



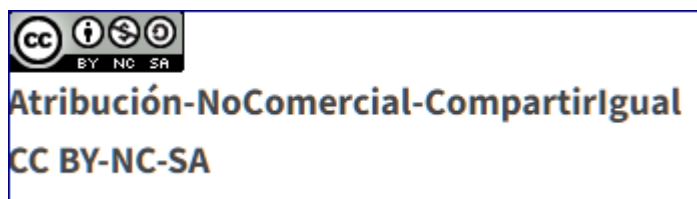
Cuaderno de ejemplos resueltos de cálculo diferencial e integral y álgebra lineal y algunas aplicaciones en economía

Dra. Martha Gabriela Alatríste Contreras

Ing. Abisai Israel de la Rosa Gudiño

Facultad de Economía

Universidad Nacional Autónoma de México



**Cuaderno de ejemplos resueltos de cálculo
diferencial e integral y álgebra lineal y algunas
aplicaciones en economía**

Dra. Martha Gabriela Alatraste Contreras

Ing. Abisai Israel de la Rosa Gudiño

Facultad de Economía

Universidad Nacional Autónoma de México

Enero 2022

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México

Agradecemos el apoyo de la DGAPA brindada a través del proyecto PAPIIME PE311620 así como a la Facultad de Economía de la UNAM por la infraestructura brindada, la cual nos permitió llevar a cabo este cuaderno.

Para Maxime

Índice general

1. Introducción	1
	1
1.1. Del cuaderno	1
1.2. De las matemáticas en economía	5
1.3. Agradecimientos	7
2. Programación con Python	9
	9
2.1. Tipos de datos	12
2.1.1. Listas	13
2.1.2. Conjuntos (sets)	19
2.1.3. Diccionarios	20
2.2. Programación estructurada	22
2.3. Referencias	25
3. Cálculo Diferencial Multivariado	29
	29
3.1. Límites	29
3.1.1. Propiedades de los límites	30
3.2. Diferenciación	32
3.2.1. La definición de la derivada	32
3.2.2. Reglas de diferenciación	36

3.2.3.	Diferenciación parcial implícita	41
3.3.	Ejemplos	42
3.3.1.	Límites	42
3.3.2.	Cálculo diferencial de varias variables	45
3.3.3.	Diferenciación de segundo orden	52
3.4.	Código en Python	69
4.	Cálculo Integral	87
		87
4.1.	La integral indefinida: la antiderivada	87
4.2.	Reglas de integración	88
4.3.	Integración con condiciones iniciales	90
4.4.	Integración por partes	90
4.5.	Integración por fracciones parciales	91
4.6.	Integral definida	91
4.6.1.	Propiedades de la integral definida	93
4.7.	Ejemplos	94
4.8.	Ejercicios aplicados a economía	107
4.9.	Ejemplos en Python	110
5.	Optimización	121
		121
5.1.	Determinación de extremos relativos	122
5.2.	Aplicaciones en economía	123
5.3.	Optimización de funciones de n variables	124
5.3.1.	Condiciones necesarias para extremos rela- tivos	124
5.3.2.	Condiciones suficientes para extremos rela- tivos	125
5.4.	Optimización sujeta a restricción lineal	127
5.4.1.	Optimización de una función de dos varia- bles sujeta a restricción lineal	127

5.4.2.	Aplicaciones en economía	131
5.5.	Ejemplos	132
5.5.1.	Optimización con restricción. Utilizando el multiplicado de Lagrange.	132
5.6.	Ejemplos aplicados en economía	137
5.7.	Ejemplos en Python	143
6.	Álgebra lineal	165
		165
6.1.	Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas .	167
6.2.	Métodos de solución	169
6.2.1.	Eliminación por adición	169
6.2.2.	Método de igualdad	170
6.2.3.	Método de sustitución	170
6.2.4.	Representación gráfica	170
6.2.5.	Ejemplos en economía	171
6.3.	Vectores	175
6.3.1.	Operaciones con vectores:	175
6.4.	Matrices	176
6.4.1.	Operaciones en matrices	177
6.4.2.	Determinantes	180
6.4.3.	Inversa de una matriz	185
6.4.4.	Solución de un sistema de ecuaciones lineales	187
6.4.5.	Modelo insumo-producto	191
6.5.	Ejemplos	195
6.5.1.	Eliminación por adición	195
6.5.2.	Igualación	198
6.6.	Ejemplos de código escrito con Python	220
	Referencias	227

Capítulo 1

Introducción

1.1. Del cuaderno

El cuaderno de ejemplos resueltos paso a paso de cálculo diferencial e integral y de álgebra lineal es un esfuerzo por parte de dos profesores de la Facultad de Economía para complementar y mejorar la formación académica, científica y técnica de alumnos y docentes. Está construido con base en los apuntes utilizados por los profesores en las clases que imparten en la Facultad de Economía. A su vez, estas clases retoman temas de los libros de texto disponibles listados en sus cursos como referencias básicas y complementarias. Ejemplos de estas referencias de los cursos incluyen: (Chiang (2006); Haeussler y Richard (2008); Granville (2015); Grossman y Dogoy (2012); González y Speziale de Guzmán (1985); Aleskerov et al. (2011)).

El cuaderno enseña al alumno a razonar, a entender los pasos lógicos que se deben de seguir en una metodología y a crear código orientado a la solución de problemas que sirven de base para resolver problemas de cualquier tipo. Este tipo de preparación contribuye a que el economista pueda resolver problemas no solo de carácter económico sino también científico y tecnológico. Así, el economista con este tipo de preparación no es sólo un pensador

sino que tendrá los conocimientos necesarios para la generación de mejores y más eficientes herramientas para recomendar políticas económicas. Por lo tanto, el cuaderno está orientado al mejoramiento de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

El material propuesto es un cuaderno de ejemplos resueltos, cuya motivación es complementar y apoyar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para los estudiantes y profesores que están cursando e impartiendo las materias de Matemáticas I y II de la Facultad de Economía de la UNAM. El objetivo de esta propuesta es que el estudiante tenga un claro entendimiento de los conceptos que se están utilizando y que pueda tener una serie de pasos a seguir como guía al resolver un determinado problema. Además de ello, se propone que tanto estudiantes como profesores tengan un acercamiento al uso de software libre que les permita resolver un problema, pero también tengan el acercamiento al diseño de programas generando código. La generación de este proyecto como cuaderno de ejemplos resueltos se centra en dos aspectos fundamentales que los desarrolladores creen de gran potencial: El primer aspecto fundamental es la resolución de un problema matemático paso a paso, que se refiere a entender y no memorizar la solución de un problema determinado. El segundo es la resolución de problemas matemáticos mediante el uso de software que permita que se puedan generar programas con la ayuda del cuaderno. Sin embargo, hay que destacar que el cuaderno de ejemplos resueltos que proponemos no está diseñado como un libro de texto para utilizarse como referencia básica de un curso de matemáticas, sino está diseñado para complementar y apoyar el aprendizaje y enseñanza como se mencionó anteriormente.

Los conocimientos adquiridos por medio de este cuaderno de ejemplos prepararán al economista a contribuir en el ámbito científico y práctico ya que está orientado a la resolución de problemas. Los conocimientos y herramientas podrán ser usados en la investiga-

ción, análisis y gestión de actividades desde todas las esferas de la economía, público, privados o en cualquier actividad económica. El economista podrá aplicar el conocimiento adquirido para la toma de decisiones basada en un proceso lógico y metódico. El desempeño del economista tendrá un mayor impacto positivo en el ámbito social y ambiental al poder incluir estos factores.

La generación de conocimiento que motiva este cuaderno es muy relevante ya que las matemáticas son una herramienta poderosa que brinda las bases para adquirir más conocimientos, enriqueciendo la formación de economistas. La generación de código complementa la generación de conocimientos para la realización de análisis e investigaciones orientadas al diseño de políticas económicas, predicciones, interpretaciones y el entendimiento de fenómenos económicos como las crisis. El contenido del cuaderno de ejemplos resueltos se basa en la resolución de problemas matemáticos y económicos resueltos paso a paso, permitiendo entender cómo se llega a las soluciones.

Se ha detectado que los alumnos memorizan el contenido de los programas de matemáticas en lugar de entender el proceso lógico del cual se derivan los conceptos matemáticos. Aunado a esto, los alumnos no tienen claro cómo vincular lo aprendido en los cursos de matemáticas con otras asignaturas como Teoría económica. Estas situaciones dejan espacio de oportunidad para mejorar la forma en cómo se enseñan las matemáticas y su aplicación en economía, en particular en aspectos teóricos en teoría económica y más prácticos como en el análisis económico. El entender cómo se llega a una solución paso a paso ayuda a llenar este espacio de oportunidad.

El cuaderno de ejemplos resueltos también responde a una necesidad de actualizar los medios didácticos que utilizan los profesores para enseñar matemáticas. Así, el cuaderno podrá ser utilizado por los docentes para enseñar utilizando los ejemplos y la progra-

mación para la creación de código y diseño de programas computacionales. De esta forma el cuaderno propuesto responde a dos problemáticas encontradas en la Facultad de Economía; una que responde a mejorar la forma de enseñar las matemáticas y sus aplicaciones a los estudiantes, y la otra a proporcionar de herramientas didácticas actuales a los docentes y alumnos para mejorar la enseñanza de las matemáticas.

La resolución de un problema matemático es un proceso lógico donde se siguen una serie de pasos que obedecen propiedades y reglas. Éstas están basadas en una estructura cimentada en conceptos básicos, por lo que todo resultado puede ser demostrado, sin ser sujeto a un pensamiento subjetivo. Es por esto que la enseñanza de las matemáticas tiene que seguir un proceso lógico y paso a paso que permita a los alumnos razonar y entender cómo se va avanzando hacia la solución del problema. Las matemáticas son un herramienta esencial para la teoría económica, el análisis económico y la modelación de fenómenos económicos. Por ello el aprenderlas de la forma más clara posible consiste en una ventaja y una contribución positiva para el aprendizaje de los alumnos. Más aún, la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos y económicos generando código y diseñando programas computacionales complementa en gran medida la preparación de los estudiantes.

Se propondrán ejemplos nuevos, no encontrados en otros libros de texto, para cada tema de matemáticas del cuaderno de ejemplos: cálculo diferencial integral (Chiang (2006); Haeussler y Richard (2008)) y álgebra lineal (Grossman y Dogoy (2012)). Los ejemplos se resolverán, explicando paso a paso la utilización de las diferentes reglas y propiedades matemáticas para que el alumno o docente pueda identificar, a partir de un proceso lógico, de dónde se obtiene la solución. Además se incluye una guía para la programación con Python para un nivel básico pero con algunos conocimientos

previos como primer capítulo y algunos ejemplos de código escrito en Python de los ejemplos matemáticos.

Se vincularán éstos ejercicios a algunas aplicaciones en economía; por ejemplo, ejercicios de maximización con una restricción lineal se vinculan con el problema del consumidor de la teoría neoclásica (Varian, 2006); el cálculo de los excedentes de consumidores y productores utilizan la integral definida para encontrar el área de la región entre curvas. Posteriormente, se mostrarán algunos ejemplos generando código con el lenguaje Python. Estos ejemplos incluyen código para encontrar derivadas parciales, extremos relativos, operaciones de matrices y el cálculo de determinantes. Por último, se incluye el código para el Modelo Insumo-producto de Leontief al final del capítulo de álgebra lineal. Para la generación de código con Python se utilizan algunas librerías de Python; éstas son: numpy, scipy, sympy, y matplotlib. El lenguaje Python es un software de libre acceso y gratuito que permite generar código orientado a objetos; esta propiedad lo hace simple, fácil de usar y eficiente al ser ejecutado (Goldwasser y Letscher (2008)). Requiere pocas líneas y genera código de forma ordenada en bloques, por lo que su lectura y ejecución es muy rápida (Dierbach (2013); Lamber (2012)). El código generado creará programas que proporcionarán las soluciones una vez ejecutados en la computadora.

1.2. De las matemáticas en economía

La economía es una ciencia social. Estudia el comportamiento de agentes a diferentes escalas (micro, meso, macro) y organizaciones que interactúan para la producción, distribución y consumo de bienes y servicios. La economía utiliza las matemáticas para formalizar los problemas que enfrentan estos agentes y para formular modelos matemáticos que expliquen ciertos fenómenos.

Un modelo es una versión abstracta y simplificada de la realidad donde relacionamos variables (dependientes e independientes) de acuerdo a diferentes tipos de funciones. El modelo matemático se formula de acuerdo a ciertos supuestos y a ciertas propiedades matemáticas y teoremas. La utilidad del modelo para explicar algo depende de la aceptabilidad de los supuestos, y ésta depende de su validez empírica que necesita ser establecida. Por otro lado, algunas teorías nos informan sobre las posibles relaciones entre variables, cómo recolectar datos y qué herramientas se pueden usar para su análisis. Los ingredientes de modelos matemáticos incluyen: Ecuaciones, Parámetros y Variables, donde los parámetros y las funciones gobiernan las relaciones entre variables. Por lo tanto, las matemáticas son una herramienta que utiliza el economista. Por ello hay que aprenderlas de forma formal y seria.

La base de matemáticas aplicadas en economía se dividen en dos materias fundamentales. La primera de ellas es Cálculo diferencial multivariado y cálculo integral, que incluye el uso de derivadas parciales de más de dos variables, optimización de funciones aplicadas, y técnicas de integración. La segunda materia es Álgebra lineal que permite al estudiante de economía resolver problemas en el área de economía cuantitativa para su análisis teórico y comprensión práctica.

El cálculo diferencial es utilizado para resolver el problema de optimización de los agentes en la economía. La teoría económica asume que los agentes son optimizadores y por lo tanto, para tomar decisiones deben de resolver un problema de optimización. En particular, el problema del consumidor consiste en escoger una canasta de bienes que maximice su utilidad según sus preferencias, las cuales tienen ciertas propiedades matemáticas como convexidad, y dado un conjunto presupuestario que indica que el consumidor no puede gastar en su consumo más de lo que tiene. Algunas propiedades del álgebra matricial utilizadas en la formalización

del problema del consumidor son la estricta cuasi-concavidad de la función de utilidad, la cual se define en términos de la matriz Hessiana $D^2f(x)$ que, en este caso, debe ser negativa definida. Esta última propiedad se relaciona a los valores característicos de la matriz y su inversa. Finalmente, la solución al problema del consumidor es su demanda. Por otro lado, el productor maximiza su beneficio y minimiza sus costos sujeto a que su producción alcance por lo menos un cierto nivel.

Al formalizar los problemas de teoría economía expresamos los valores de las variables dependientes e independientes en forma de vectores, por ejemplo vector de cantidades o vector de precios. En la escuela marginalista, donde el cálculo diferencial es esencial para determinar las soluciones a los problemas de los agentes en la economía, la notación matricial es de particular utilidad. Por ejemplo, podemos escribir las derivadas de una función como una matriz. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ es una función diferenciable, entonces en cualquier $x \in \mathbb{R}^N$ escribimos con $Df(x)$ la matriz $M \times N$ cuya m -ésima entrada es $\frac{\delta f_m(x)}{\delta x_n}$. Por lo tanto, el uso del álgebra matricial no se limita al diseño de modelos donde las variables estén relacionadas de forma lineal como en el Modelo Insumo-producto, sino también para formalizar los problemas de la Teoría Económica, entre ellos el del consumidor.

1.3. Agradecimientos

Agradecemos el apoyo de la DGAPA brindada a través del proyecto PAPIME PE311620 así como a la Facultad de Economía de la UNAM por la infraestructura brindada, la cual nos permitió llevar a cabo este cuaderno de ejemplos. Agradecemos el trabajo realizado por el alumno Luis Olvera de la Facultad de Economía quien, como parte de su servicio social, colaboró en la transcripción de los ejemplos a Latex.

Finalmente, agradecemos la evaluación técnica por parte del RUA y la dictaminación académica realizada por dictaminadores anónimos cuyos comentarios y recomendaciones enriquecieron y mejoraron el cuaderno de ejercicios.

Capítulo 2

Programación con Python

Al final de cada sección del cuaderno de ejemplos resueltos mostraremos algunas propuestas de código escrito en Python 3 para resolver algunos ejercicios de los temas cubiertos. Por ello, dedicaremos esta primera sección del cuaderno a una breve guía para la programación con Python. Señalamos que este capítulo no es una documentación extensa y completa; ésta se puede encontrar en las referencias mencionadas al final del capítulo. Al no ser un curso de programación con Python sino una guía, presenta algunos temas relevantes de la programación con Python, la sintaxis del lenguaje y los principales objetos que se pueden crear para entender los ejemplos presentados en los siguientes capítulos sin profundizar en los temas. Se recomienda al lector interesado en la programación con Python ir a la documentación oficial y presentar un curso de introducción a la programación con Python.

Como una breve introducción, mencionamos que Python es un lenguaje de programación de libre acceso y gratuito. Fue creado en la década de 1980 y fue implementado por primera vez en 1989 por Guido van Rossum del CWI en los Países Bajos. Soporta múltiples paradigmas incluyendo:

1. Programación orientada por objetos

2. Programación imperativa: expresa secuencias de comandos para llevar a cabo acciones que cambien el estado de un programa.
3. Programación funcional: expresiones usadas para la evaluación de funciones matemática.

Programación orientada por objetos 2.0.1 *Es un paradigma de lenguaje de programación basado en el concepto de objetos. Los objetos son estructuras de datos con atributos y códigos en la forma de procesos conocidos como métodos. Los métodos son funciones especialmente escritas en el código que actúan como intermediarios para acceder o modificar los datos que controlan. Una clase define propiedades y comportamientos de un tipo de objeto por medio de la instanciación.*

Orientación por objetos 2.0.1 *La orientación por objetos utiliza encapsulación, con lo que merge tipos de datos abstractos con programas estructurados, y divide a los sistemas en objetos modulares que poseen sus propios datos y que son responsables de su propio comportamiento. La encapsulación reúne todos los elementos que pueden considerarse pertenecientes a una misma entidad al mismo nivel de abstracción.*

Objetos 2.0.1 *Un objeto es un tipo abstracto de estructura de datos que tiene un estado (atributos), un comportamiento (código) y una identidad. Además tiene polimorfismo (comportamientos diferentes asociados a objetos distintos) y herencia. Los objetos están diseñados en clases jerárquicas. Estas clases y subclases corresponden a conjuntos y subconjuntos de la lógica matemática.*

Sintaxis y semántica de Python

- Python está diseñado para tener una clara y ordenada distribución del código.
- Utiliza algunas palabras clave o *keywords* en inglés donde

otros lenguajes de programación utilizan puntuación.

- Identación: Python utiliza espacios en blanco en vez de paréntesis o keywords para delimitar bloques de código. Un incremento en indentación se da después de ciertos “statements” y una disminución de indentación significa el término del bloque actual.
- Algunas expresiones que utiliza Python son similares a las utilizadas en los lenguajes de programación Java y C. Por ejemplo: +, −, *
- Otras expresiones de Python incluyen: **, ==, and, or, not, % (para strings).
- Su sintaxis se distingue con diferentes colores e introspección del código.

Usos y aplicaciones de Python

Python puede ser utilizado desde como una calculadora, hasta para programar programas más complejos. Para ello, el programador puede hacer uso de la amplia gama de **librerías** que hay disponibles. Ejemplos de **librerías** incluyen:

- Scipy y numpy: análisis estadístico, manejo de números y sus operaciones, álgebra lineal.
- Networkx: creación y análisis de redes simples y complejas.
- Matplotlib: visualización en gráficos de 2 y 3 dimensiones.
- Pandas: manejo de bases de datos.
- SimPy: simulaciones teóricas (modelos multiagentes).
- scikit learn: machine learning en Python que incluye herramientas eficientes para el análisis de datos construida sobre numpy y scipy.
- Python-sql.

- Interface a R desde Python.
- etc.

Interprete, WinPython y Spyder

- **Interprete Python:** lee y ejecuta comandos interactivamente. Nos permite comunicarnos con la computadora para obtener un output dado un input. Es como la shell de Unix.
- **WinPython** es una distribución portable gratuita y de libre acceso para la programación en Python para Windows (**Anaconda** para Mac). Incluye una batería de librerías.
- **WinPython** incluye entre otras cosas: librerías, Spyder, e interprete.
- **Spyder:** es un ambiente de desarrollo interactivo para Python que incluye:
 - **Editor:** sintaxis con diferente color e introspección del código.
 - **Consola:** interacción con el código en progreso; permite abrir más de una consola de Python y IPython y ejecutarlas por separado; permite ejecutar el código completo o por partes.
 - **Explorador de variables.**
 - **Inspector de objetos:** rápido acceso a la documentación necesaria.

2.1. Tipos de datos

1. Variables

- **Número:** valores numéricos.

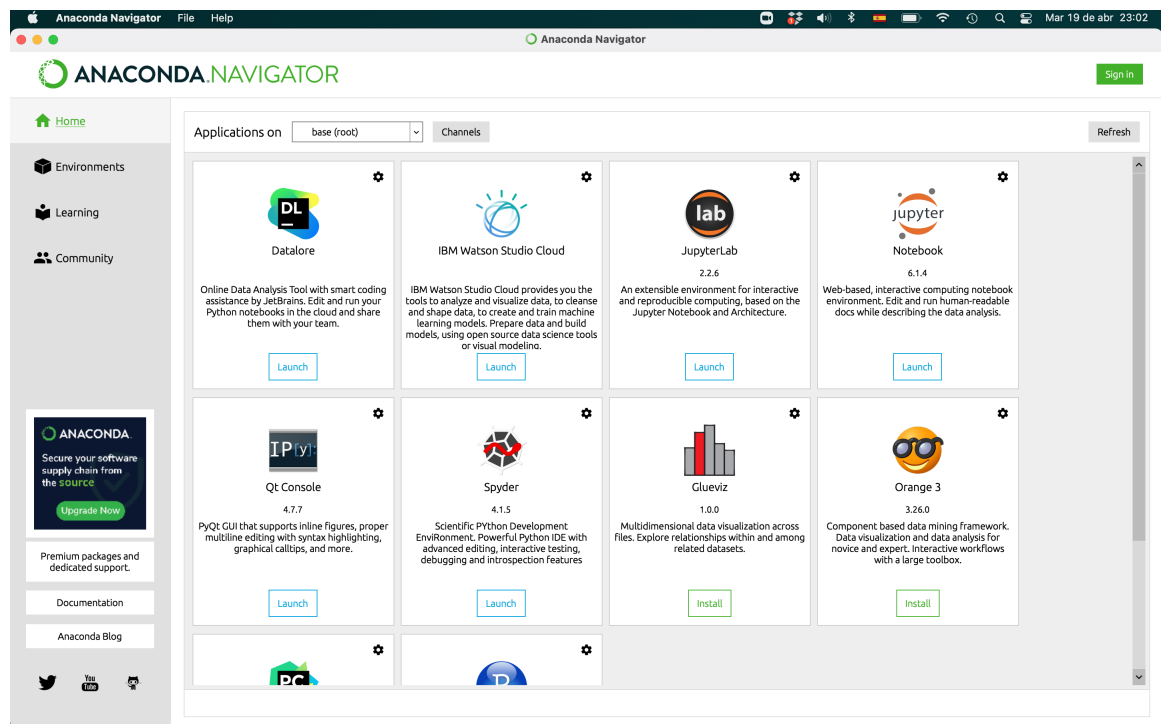


Figura 2.1: Visualización de Anaconda.

- **String:** caracteres entre comillas.
- **Lista:** conjunto de elementos separados por comas y delimitados por paréntesis cuadrados.
- **Tuple:** valores separados por comas y delimitados por parentesis.
- **Diccionario:** pares de “key:value” delimitados por { }.

2. **Operadores:** aritméticos, comparativos, asignación, lógicos, entre otros.

2.1.1. Listas

- Las listas son un tipo de compuesto de datos usado para agrupar valores.

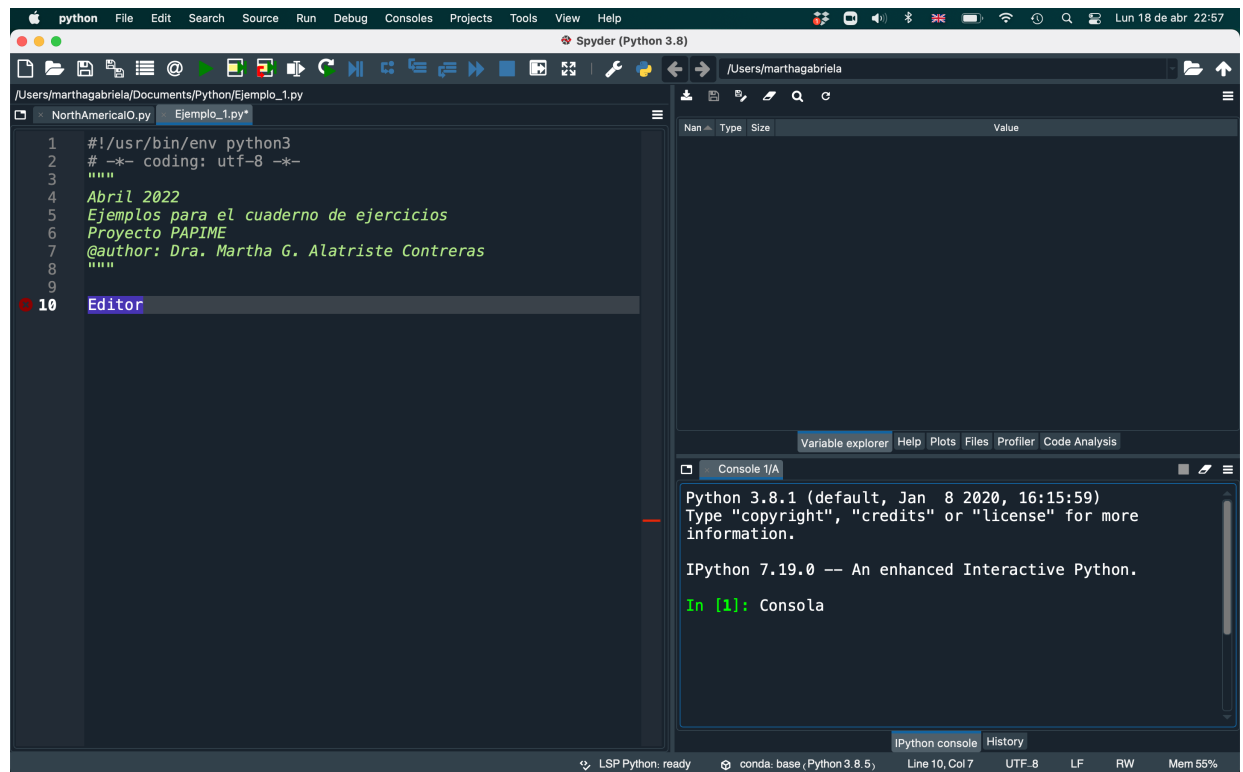
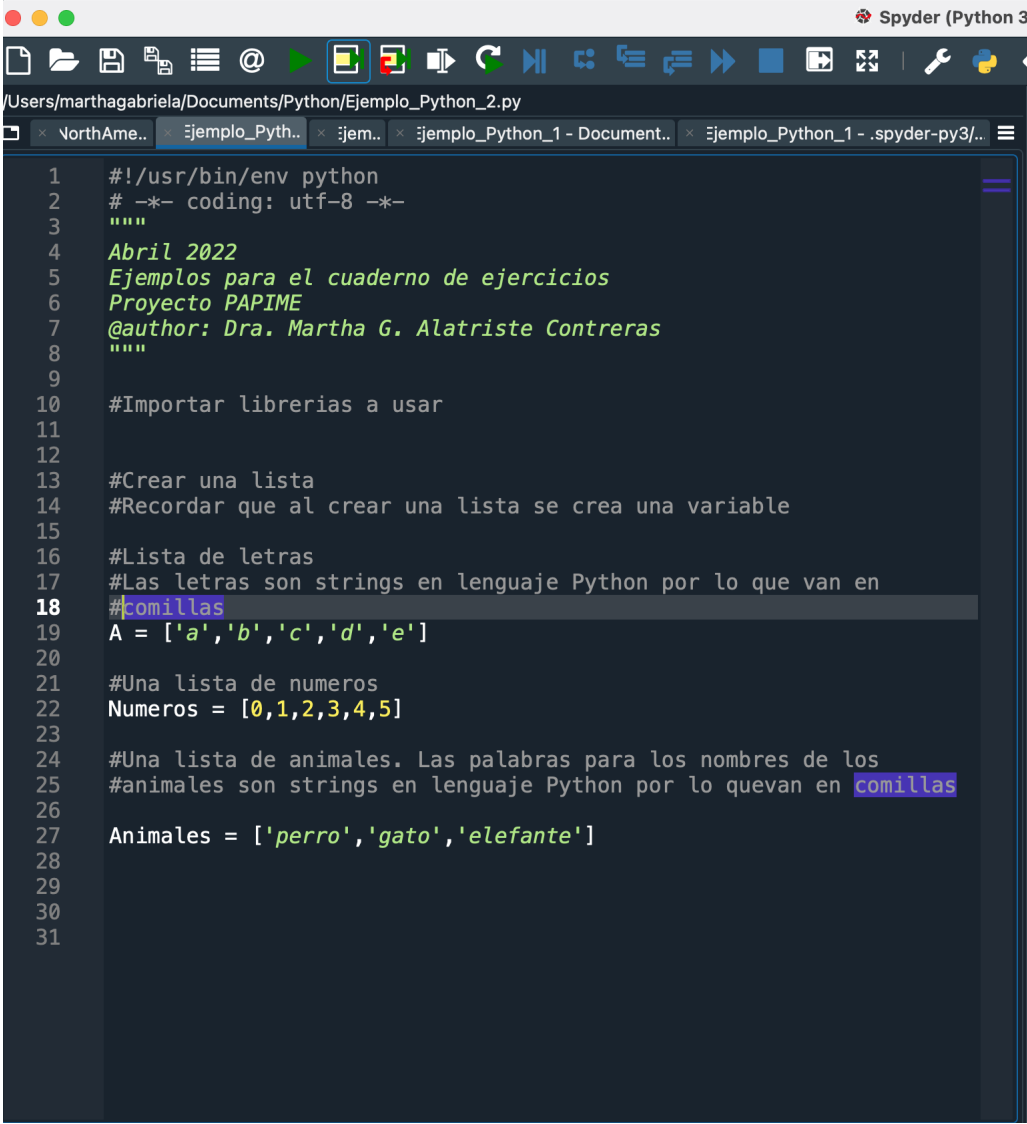


Figura 2.2: Visualización de Spyder. Del lado izquierdo de la pantalla está el editor, del lado derecho superior está el explorador de variable, el visor de figuras y el inspector de objetos, y del lado derecho inferior está la consola donde se visualizan los resultados de ejecutar el código escrito en el editor.

- Una lista se escribe como valores separados por comas y delimitados por paréntesis cuadrados.
- **Ejemplos:**
 - $A = [a, b, c, d, e]$
 - `Numeros = [1, 2, 3, 4, 5]`
 - `Animales = ["perro", "gato", "elefante"]`
- Los elementos de las listas pueden ser accedidos por medio de indexación y partición.

Indexación



```
1  #!/usr/bin/env python
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  """
4  Abril 2022
5  Ejemplos para el cuaderno de ejercicios
6  Proyecto PAPIME
7  @author: Dra. Martha G. Alatraste Contreras
8  """
9
10 #Importar librerias a usar
11
12
13 #Crear una lista
14 #Recordar que al crear una lista se crea una variable
15
16 #Lista de letras
17 #Las letras son strings en lenguaje Python por lo que van en
18 #comillas
19 A = ['a','b','c','d','e']
20
21 #Una lista de numeros
22 Numeros = [0,1,2,3,4,5]
23
24 #Una lista de animales. Las palabras para los nombres de los
25 #animales son strings en lenguaje Python por lo que van en comillas
26
27 Animales = ['perro','gato','elefante']
28
29
30
31
```

Figura 2.3: Vista del editor donde se crean las listas de ejemplo

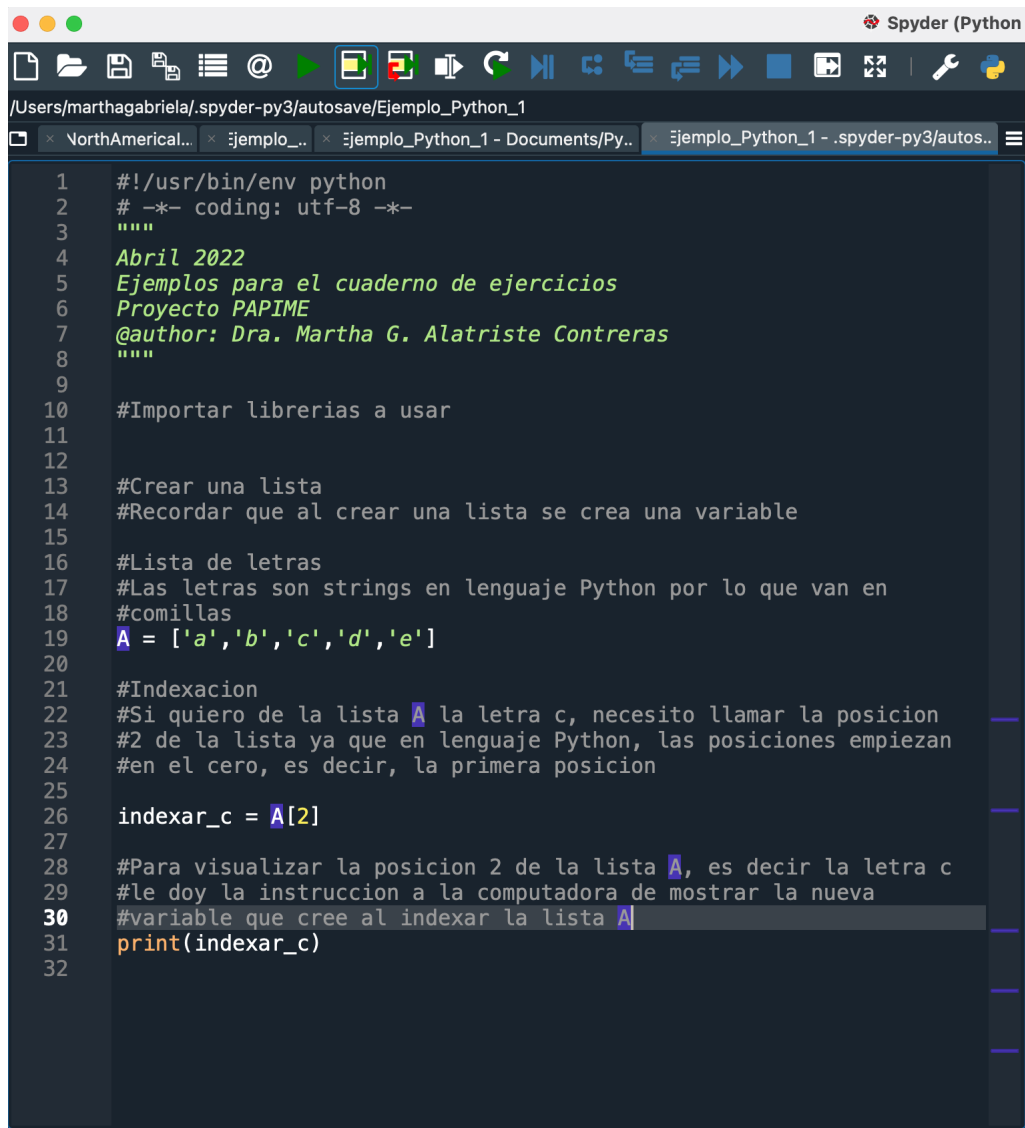
- La indexación nos permite extraer de la lista el elemento (o lista) deseado(a).
- Para indexar una lista se tiene que llamar a cada elemento por su posición en paréntesis cuadrados.
- Las posiciones en listas en Python empiezan por la posición 0 (cero).

- Ejemplo 1. Si tenemos la lista A anteriormente definida y queremos extraer la letra c indexamos la lista de la siguiente forma: $A[2] = c$
- Cómo la letra c dentro de la lista A ocupa la posición número tres y el conteo empieza desde cero (0, 1, 2), la extraemos con el número 2.
- **Ejemplo 2.** Si queremos indexar el segundo elemento de la lista ListaAnidada lo realizamos de la siguiente manera: $\text{ListaAnidada}[1] = [1, 2, 3]$
- **Ejemplo 3.** Si queremos indexar el tercer elemento de la segunda lista de la lista ListaAnidada: $\text{ListaAnidada}[1][2] = 3$

Partición

- La partición nos permite seleccionar una porción de la lista en forma de otra lista conteniendo los elementos señalados.
- La partición se lleva a cabo tomando en cuenta las posiciones de los elementos y señalando de donde a donde se quiere seleccionar con el símbolo :
- La selección tiene que ir delimitada por paréntesis cuadrados.
- Ejemplo 1. Si tenemos la lista A anteriormente definida y queremos extraer de la primera a la tercera letra, partimos la lista de la siguiente forma: $A2 = A[0 : 2] = [a, b, c]$
- Si utilizamos [:], nos regresa una copia de la misma lista porque le estamos pidiendo que la corte del inicio al final: $A2 = A[:] = A$
- **Ejemplo 2.** Si queremos partir la lista ListaAnidada: $L1 = \text{ListaAnidada}[0 : 1] = [[1, 2, 3], [4, 5, 6]]$

Operaciones con listas



```

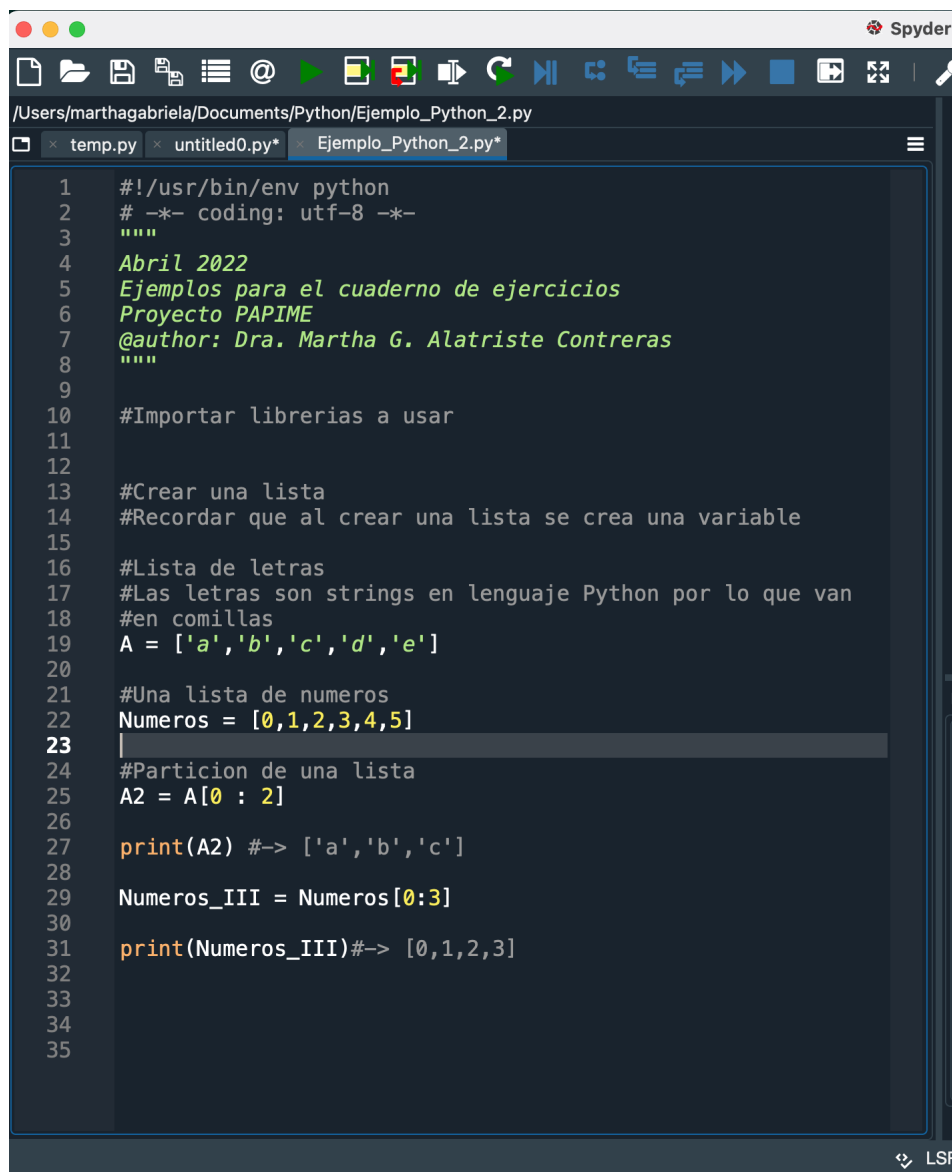
1  #!/usr/bin/env python
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  """
4  Abril 2022
5  Ejemplos para el cuaderno de ejercicios
6  Proyecto PAPIME
7  @author: Dra. Martha G. Alatríste Contreras
8  """
9
10 #Importar librerías a usar
11
12
13 #Crear una lista
14 #Recordar que al crear una lista se crea una variable
15
16 #Lista de letras
17 #Las letras son strings en lenguaje Python por lo que van en
18 #comillas
19 A = ['a','b','c','d','e']
20
21 #Indexación
22 #Si quiero de la lista A la letra c, necesito llamar la posición
23 #2 de la lista ya que en lenguaje Python, las posiciones empiezan
24 #en el cero, es decir, la primera posición
25
26 indexar_c = A[2]
27
28 #Para visualizar la posición 2 de la lista A, es decir la letra c
29 #le doy la instrucción a la computadora de mostrar la nueva
30 #variable que cree al indexar la lista A
31 print(indexar_c)
32

```

Figura 2.4: Ejemplos de indexación de listas

Si A y $Números$ son listas, podemos realizar las siguientes operaciones:

- **Concatenación:** $A + [f, g, h, i, j] \rightarrow A = [a, b, c, d, e, f, g, h, i, j]$
- **Reemplazar valores:** $A[2] = m \rightarrow A = [a, b, m, d, e, f, g, h, i, j]$
- **Añadir nuevos elementos:** $A.append(b) \rightarrow A = [a, b, m, d, e, f, g, h, i, j, b]$



```

1  #!/usr/bin/env python
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  """
4  Abril 2022
5  Ejemplos para el cuaderno de ejercicios
6  Proyecto PAPIME
7  @author: Dra. Martha G. Alatraste Contreras
8  """
9
10 #Importar librerias a usar
11
12
13 #Crear una lista
14 #Recordar que al crear una lista se crea una variable
15
16 #Lista de letras
17 #Las letras son strings en lenguaje Python por lo que van
18 #en comillas
19 A = ['a','b','c','d','e']
20
21 #Una lista de numeros
22 Numeros = [0,1,2,3,4,5]
23
24 #Particion de una lista
25 A2 = A[0 : 2]
26
27 print(A2) #-> ['a','b','c']
28
29 Numeros_III = Numeros[0:3]
30
31 print(Numeros_III) #-> [0,1,2,3]
32
33
34
35

```

Figura 2.5: Vista del editor donde se ven ejemplos de partición de listas

- **Remover elementos:** $A.remove(a) \rightarrow A = [b, m, d, e, f, g, h, i, j, b]$
- **Contar cuantas veces aparece un elemento:** $A.count(b) \rightarrow 2$
- **Ordenar elementos de lista:** $Numeros.sort()$

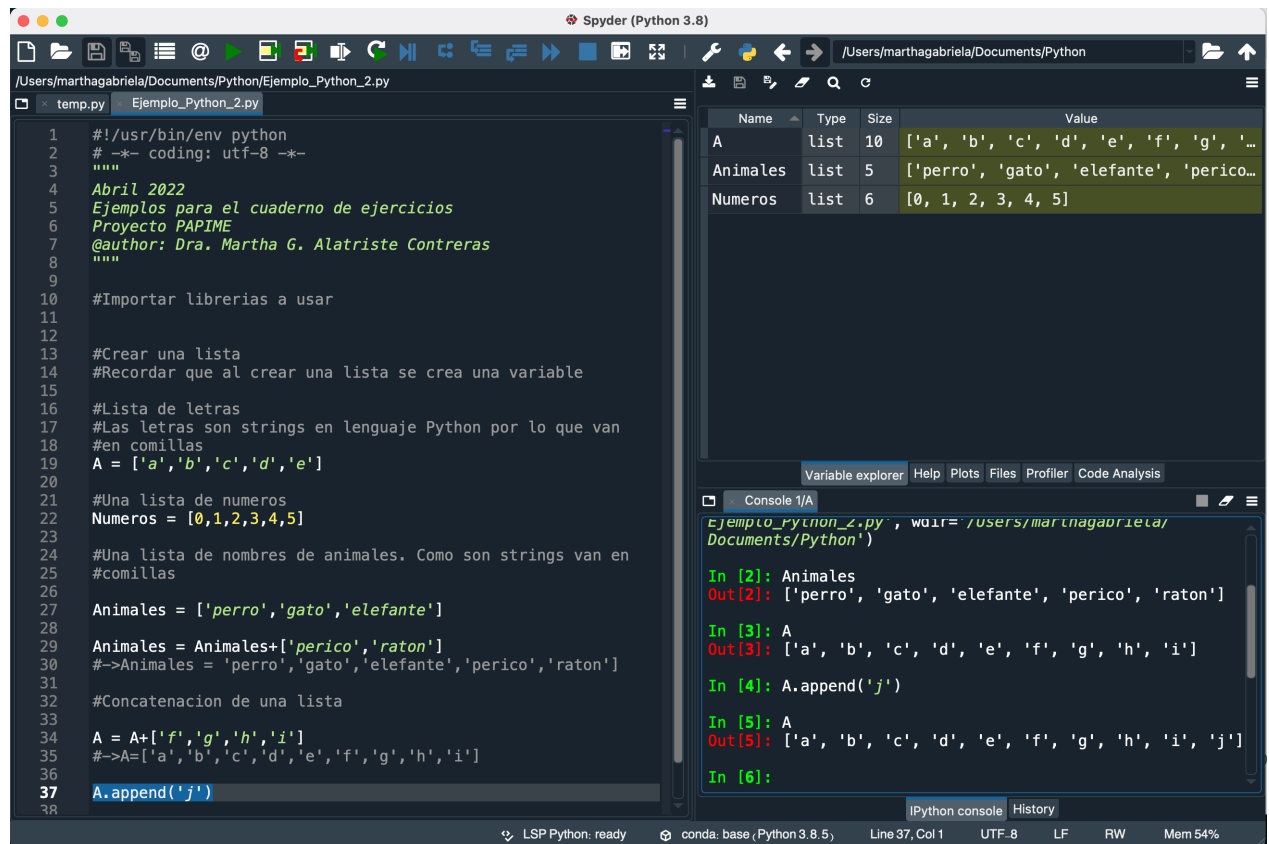


Figura 2.6: Concatenación de listas y adición de elementos a una lista en Spyder

2.1.2. Conjuntos (sets)

- Un conjunto es una colección sin orden y cuyos elementos aparecen solamente una vez: `set()`
- Para crear un conjunto vacío llamado Colores utilizamos la siguiente instrucción: `Colores = set()`
- También podemos crear un conjunto indicando los elementos explícitamente desde el principio: `Colores = set(["rojo", "amarillo", "azul"])`
- Las queries (consultas) de contenido son muy eficientes. Podemos consultar si el color rojo está en el conjunto Colores; si lo está, obtendremos `True` (verdadero) de la consulta. Ejem-

plo: “rojo” in Colores $\rightarrow$ True

- Los conjuntos en Python soportan lo siguiente:
 - Añadir: `s.add(x)`
 - Remover: `s.remove(x)`
 - Limpiar: `s.clear()`
 - Añadir todos los elementos de t a s (equivalente a `s.update(t)`):
 $s \mid = t$

Los conjuntos soportan diversas operaciones matemáticas. Ejemplos incluyen:

- Unión: $|$
- Intersección: $\&$
- Diferencia: $-$
- Diferencia simétrica: $s \wedge t$
- Subconjunto: $s > t \rightarrow \text{True}$ si t es un subconjunto de s .
- Contenido idéntico: $s == t \rightarrow \text{True}$ si s y t tienen contenido idéntico.

2.1.3. Diccionarios

Construcción de diccionarios

- Los diccionarios proveen una forma de asociar valores entre sí.
- Los diccionarios están indexados por “keys” que pueden ser varios tipos de datos como strings (“nombre”) o números enteros.
- Un diccionario puede ser visto como un conjunto sin orden de pares “**key:value**”.

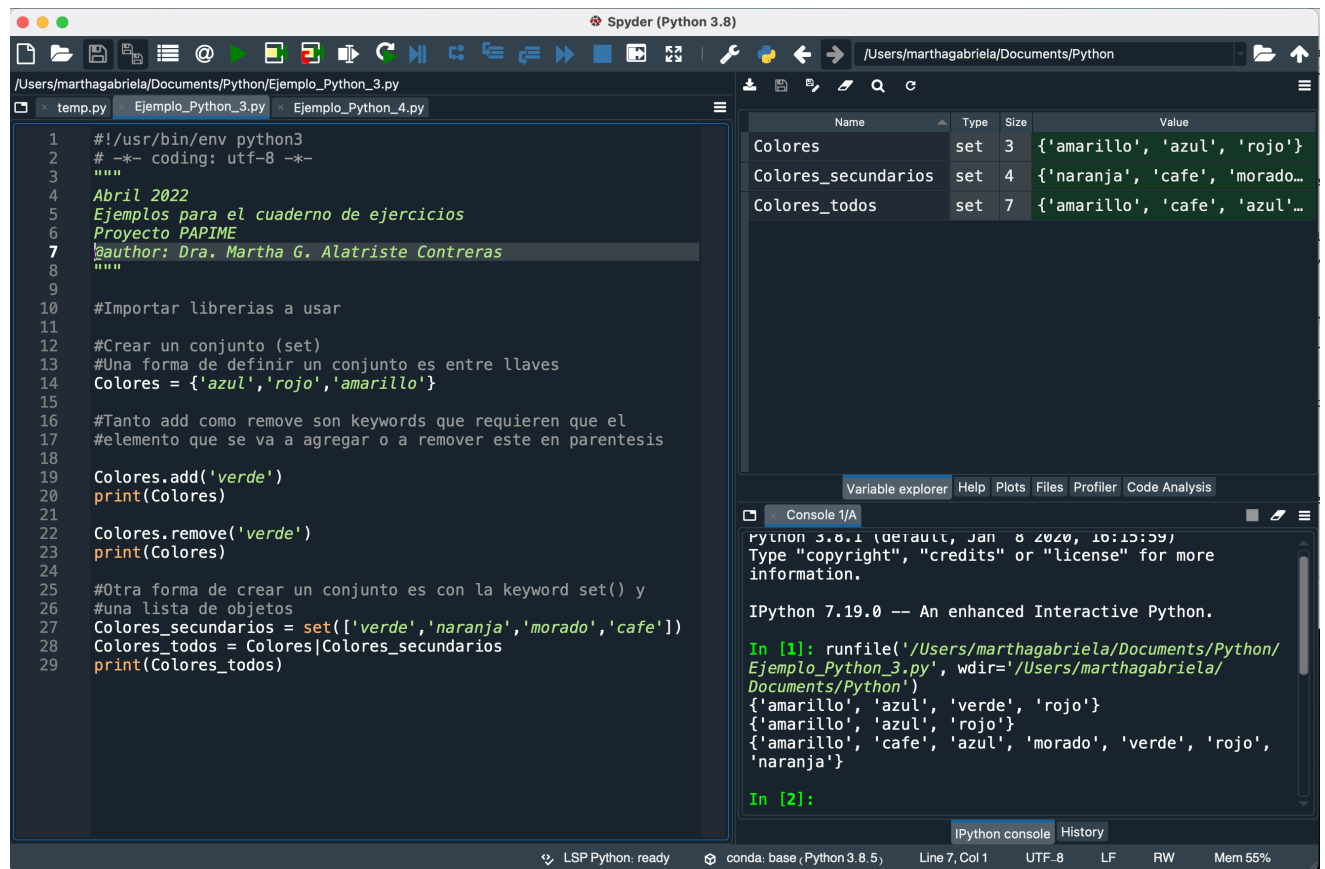


Figura 2.7: Ejemplos de conjuntos

- Al no tener orden, las “keys” no representan alguna posición.
- Requiere que las “keys” sean **únicas** (que no se repitan).
- Los “values” tiene que ser un elemento y pueden ser de cualquier tipo de dato: x , (x, y) , 4 , $\dots$

Para **crear** un diccionario vacío:

- `DiccionarioA = dict()`
- `DiccionarioA = {}`

Para **añadir** elementos a un diccionario vacío:

- Pares de **key:value** separados por coma dentro de los parén-

tesis.

- `DiccionarioA[key] = value`

Manipulación de diccionarios

- La principal operación que se puede realizar con los diccionarios es de almacenar un valor con una *key* y extraer o actualizar el valor dada la *key*.
- También es posible borrar elementos del diccionario con el comando *del*.
- Por ejemplo: `del DiccionarioA[key1]`

Para ver un ejemplo en Spyder de la creación de diccionarios ver el ejemplo del loop for mas adelante.

2.2. Programación estructurada

Este teorema, también llamado Teorema Böhm-Jacopini, es un resultado de la teoría de los lenguajes de programación. Establece que una clase de diagramas de flujo puede calcular cualquier función si combina subprogramas en sólo tres maneras específicas (estructuras de control). Éstas son:

- Ejecutando un subprograma y luego otro subprograma → Secuencia
- Ejecutando uno de dos subprogramas dependiendo del valor de la expresión → selección
- Ejecutando un subprograma hasta que la expresión sea verdadera → iteración

Iteración

La iteración es la repetición de una serie de pasos tan frecuente como sea necesario. Hay tres formas de realizar la iteración:

1. Utilizando la condición if
2. Utilizando el loop for
3. Utilizando el loop while

Condicional if

El condicional if es un tipo de declaración para la toma de decisiones en el lenguaje Python.

Condicional 2.2.1 *La condicional if ejecuta caminos alternativos dependiendo de que una condición booleana sea verdadera.*

La sintaxis de la declaración condicional es:

if expresión booleana: seguido por un bloque de código indentado llamado el cuerpo del loop.

La sintaxis puede incluir una declaración else o elif donde se especifica que si el booleano de if no es verdadero, entonces el loop pasa al segundo booleano.

Cuadro 2.1: Declaraciones para la toma de decisiones

Declaración	Descripción
If	Una declaración if consiste en una expresión booleana seguida de una o mas declaraciones.
If ... else	Una declaración if puede estar seguida de una declaración opcional else que es ejecutada cuando la expresión booleana es falsa.

Iteración loop for

- La declaración *for* itera los elementos de una secuencia (lista o string) en el orden en el que aparecen.
- Un loop for siempre empieza con la sintaxis:
for identifier in secuencia, seguido por un bloque de código indentado llamado el cuerpo del loop.
- Podemos tener "loops anidados".

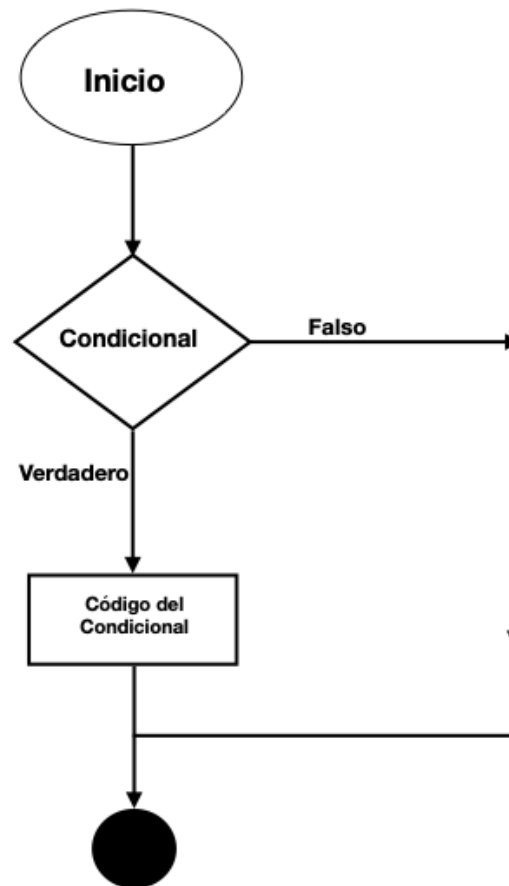


Figura 2.8: Diagrama de flujo de la toma de decisiones con el condicional if

Loop while

- La **declaración while** repite un bloque de código en sucesión.
- Lleva a cabo la repetición en casos donde no podemos dar una secuencia ya establecida con anterioridad.
- Designamos una condición en la forma de una expresión booleana y se repite el cuerpo del código siempre y cuando la condición sea verdadera.
- La sintaxis del loop while es:

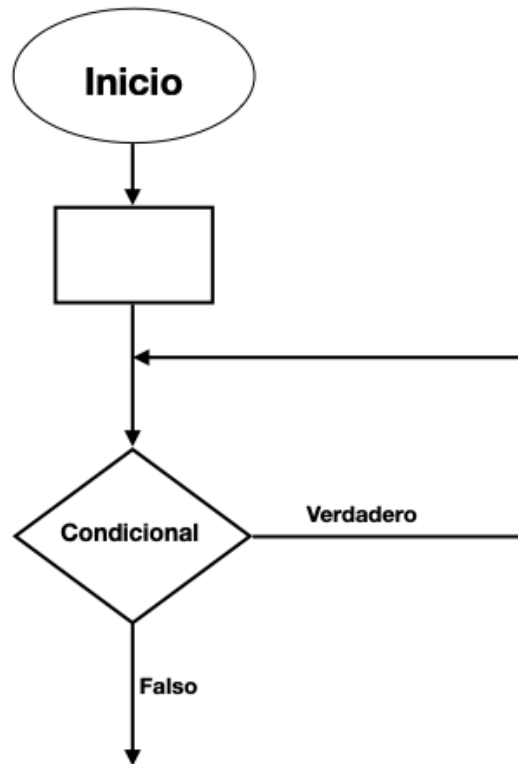


Figura 2.9: Diagrama de flujo de loop for/while

while condition booleana: seguido por el cuerpo del código indentado.

2.3. Referencias

- Goldwasser, M. and D. Letscher (2008). Object-Oriented Programming in Python, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Lambert, K. (2012). Fundamentals of Python: First Programs (Introduction to Programming), Course Technology, Cengage Learning.

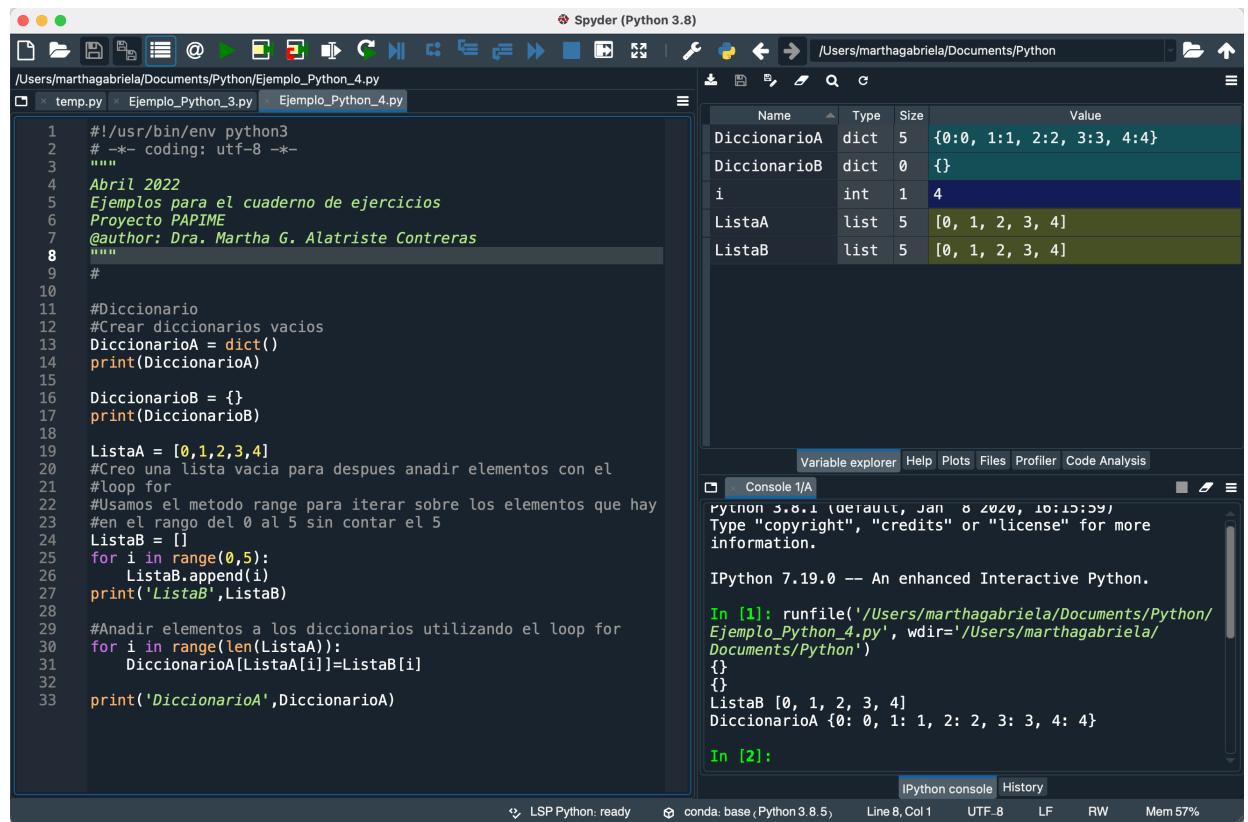


Figura 2.10: Ejemplos de la creación y manipulación de diccionarios con el loop for en Spyder

- Beazley, D. (2009). Python Essencial Reference, Fourth Edition, Developer's Library.
- Lutz, M. (2013). Learning Python, Fifth Edition, O'Reilly, USA.
- Python tutorial en línea: <https://docs.python.org/3/tutorial/index.html>
- The Python Standard Library: <https://docs.python.org/2/library/index.html>

Cuadro 2.2: Tipo de loop y descripción

Tipo de loop	Descripción
While	Repite una declaración o grupo de declaraciones mientras una condición dada es verdadera. Prueba la condición antes de ejecutar el cuerpo del loop
For	Ejecuta una secuencia de declaraciones multiples veces y abrevia el código que administra la variable del loop.
Anidados	Se puede usar uno o mas loops dentro de cualquier otro loop while o for.

Capítulo 3

Cálculo Diferencial Multivariado

En esta sección del cuaderno presentaremos límites, la definición de la derivada, y las reglas de diferenciación para funciones de una y más variables así como las reglas de integración para funciones de una variable.

3.1. Límites

Los límites son necesarios para introducir el tema de diferenciación y para definir la derivada. Los límites nos dicen cómo se comporta una función, $f(x)$, cuando su variable independiente, x , se aproxima a un valor particular, a , sin tocarlo. La variable independiente, x , se puede aproximar a un valor particular por la derecha ($x > a$) o por la izquierda ($x < a$).

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el número L .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (3.1)$$

Siempre que (x) esté arbitrariamente cercana a $L \forall x$ lo suficientemente cerca, pero diferente a, a .

Si no existe tal L , se dice que el límite no existe.

Para que el límite exista es necesario que los **límites laterales** sean iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Los límites laterales son los límites cuando el valor de la variable independiente se aproxima a un valor por todas las posiciones posibles. En el caso de funciones de una variable, la variable independiente se puede aproximar a un valor dado a únicamente desde dos posiciones, por la derecha a^+ , y por la izquierda a^- .

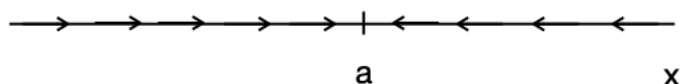


Figura 3.1: Límites laterales. Cómo la variable independiente x se aproxima al valor a por la derecha y por la izquierda.

En el caso de una función de dos variables, nos encontramos con que las variables independientes se aproximan a un punto formando un disco. Existe un infinito de posiciones desde las cuales las variables independientes se pueden aproximar al punto. En este caso, para determinar si un límite existe es útil recordar las características de los diferentes tipos de funciones.

3.1.1. Propiedades de los límites

1. Si $f(x) = c$, entonces: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} c = c$
2. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ para cualquier entero positivo n .
3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

4. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, donde c es una constante.

6. Si f es una **función polinomial**

$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, donde n es un número entero no negativo y $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ son constantes en las que $c_n \neq 0$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

7. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

8. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, donde si n es par se requiere que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$.

9. Si f y g son dos funciones para las cuales $f(x) = g(x) \forall x \neq a$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Estrategia para la evaluación de un límite

- Si $f(x)$ es una **función polinomial** entonces podemos encontrar el límite directamente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Si $f(x)$ no es una función polinomial, dependiendo de la forma específica de la función, podemos ver si alguna **propiedad de los límites** aplica.

- Si no aplica alguna de las propiedades de los límites directamente, entonces habrá que determinar si primero hay que realizar algunas operaciones o si se puede factorizar y simplificar.

Para evaluar el límite de una función racional es importante considerar lo siguiente. Primero, una función racional es un cociente de polinomios. Segundo, al encontrar el límite al infinito de una función racional hay que considerar que a medida que x se vuelve cada vez más grande ($x \rightarrow \infty$), ambos el numerador y el denominador de la función tienden al infinito. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que se pueda sacar alguna conclusión de si existe o no el límite. Una estrategia es dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. Otra estrategia es si $f(x)$ es una **función racional** y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y denominador respectivamente, con las mayores potencias de x , entonces:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

3.2. Diferenciación

3.2.1. La definición de la derivada

La derivada como la pendiente de la recta tangente que pasa por un punto.

Para introducir el tema de diferenciación, consideremos dos puntos sobre una curva (para funciones de una variable): A, B .

Tenemos que regresar al concepto de pendiente de una curva:

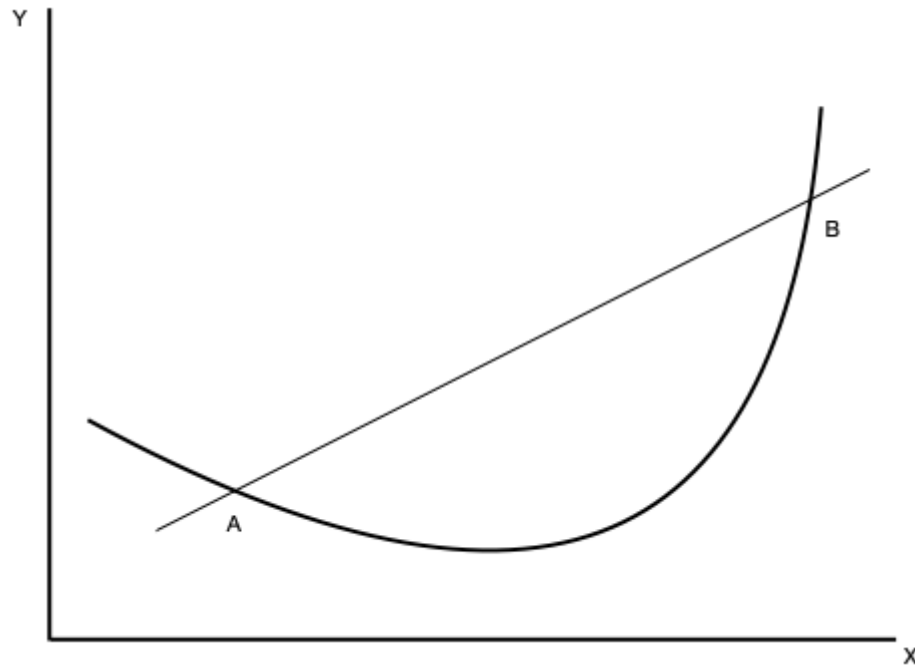


Figura 3.2: Recta secante

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3.2)$$

La pendiente de una curva en un punto A es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en ese punto A .

Para la curva $y = f(x)$ y para los puntos sobre la curva $A = (x_1, f(x_1))$ y $B = (x_2, f(x_2))$, la pendiente de la recta secante AB es:

$$m_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3.3)$$

Si $h = x_2 - x_1 \Rightarrow x_2 = x_1 + h$ para $h \neq 0$, de lo contrario si $h = 0 \Rightarrow x_2 = x_1$ y no existiría recta secante. Obtenemos en

términos de h :

$$m_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(h + x_1) - f(x_1)}{h} \quad (3.4)$$

Conforme B se mueve a lo largo de la curva hacia A , x_2 se aproxima a x_1 . Esto significa que h se aproxima a cero. La tangente en A es una posición límite de las líneas secantes que cortan a la curva sobre la que está A . Entonces, la pendiente de la tangente es el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme el punto B se acerca a A . El ángulo α formado por la línea recta tangente (T) con el eje x debe de ser igual al valor límite del ángulo θ (Aleksandrov et al. 2015).

El valor de θ es determinado a partir del triángulo formado por ABC (ver figura 3.3):

$$\tan\theta = \frac{CB}{AC} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.5)$$

En la posición límite debemos tener:

$$\tan\alpha = \lim_{B \rightarrow A} \tan\theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.6)$$

Entonces, el valor límite de las pendientes secantes, que es la pendiente de la recta tangente en $(x_1, f(x_1))$, es:

$$m_{tan} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad (3.7)$$

La definición de la derivada

Una vez desarrollada la idea de diferenciación, presentamos la definición de la derivada. La derivada de una función f es la función, denotada por f' y definida por:

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (3.8)$$

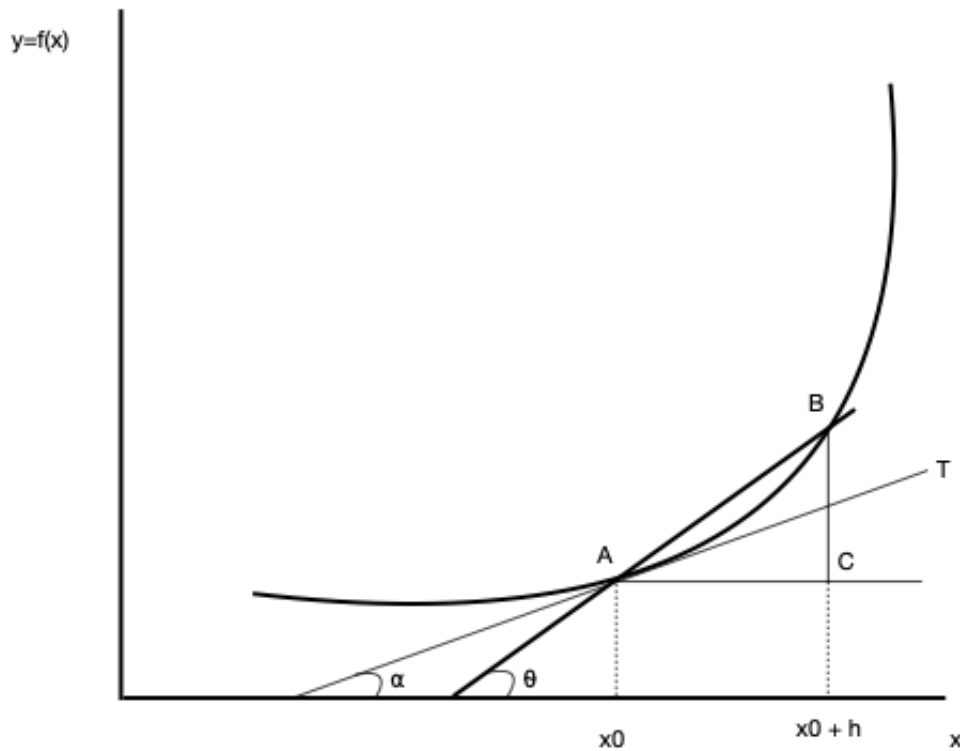


Figura 3.3: Recta tangente

si el límite existe.

La derivada de una función, o el valor de la derivada en un punto dado, es el límite al que se acerca el cociente incremental de la función con respecto al incremento h de la variable independiente, cuando esta última se acerca a cero: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

El valor de la derivada depende del punto x en el que es evaluada. Por lo tanto, la derivada de una función es ella misma una función de x .

Si $f'(a)$ puede encontrarse, se dice que f es diferenciable en a , y $f'(a)$ se llama derivada de f en a o derivada de f con respecto a x en a .

El proceso de encontrar la derivada se llama diferenciación. Ade-

mas de la notación $f'(x)$ también denotamos la derivada de f con las siguientes formas: Notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx}(f(x))$; $D_x(f(x))$. Todas son equivalentes y denotan la derivada de f con respecto de x .

3.2.2. Reglas de diferenciación

A continuación presentamos las reglas de diferenciación y su demostración utilizando la definición de la derivada.

1. Si $f(x) = c$, donde c es una constante:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 \quad (3.9)$$

La derivada de una constante es cero.

Si $f(x) = c$, la definición de la derivada da: $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$

2. Si $f(x) = x^n$:

$$\frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1} \quad (3.10)$$

la derivada de x elevada a la n potencia es n por x elevada a la potencia $n - 1$.

Si $f(x) = x^n$, para n un entero positivo, la definición de la derivada da:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^n C_i x^{n-i} h^i - x^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n C_i x^{n-i} h^i}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sum_{i=1}^n C_i x^{n-i} h^{i-1}}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n C_i x^{n-i} h^{i-1} = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \sum_{i=2}^n C_i x^{n-i} h^{i-1}) = nx^{n-1}$$

3. Si $F(x) = cf(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = c \frac{d}{dx}f(x) \quad (3.11)$$

la derivada de una constante por una función de x es la constante, c , por la derivada de la función de x .

Si $g(x) = cf(x)$, al aplicar la definición de la derivada da:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c[f(x+h) - f(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ &cf'(x) \end{aligned}$$

4. Si $F(x) = f(x) + g(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x) \quad (3.12)$$

la derivada de una suma de funciones de x es la suma de las derivadas de las funciones. Encontramos la derivada de una resta de funciones sustituyendo el signo menos por el de adición.

Si $F(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

5. Regla de la diferenciación de un producto de funciones de x :

Si $F(x) = f(x)g(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(x)}{dx}g(x) \quad (3.13)$$

$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = (\text{derivada de la primera}) \cdot (\text{segunda}) + (\text{primera}) \cdot (\text{derivada de la segunda})$

Si $F(x) = f(x)g(x)$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Sumamos un cero en el numerador: $f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x) = 0$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Reagrupando:

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

6. Regla de la diferenciación de un cociente de funciones de x :

Si $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dx} \text{cociente} = \frac{(\text{denominador})(\text{derivada numerador}) - (\text{numerador})(\text{derivada denominador})}{(\text{denominador})^2}$$

Si $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, entonces $F(x)g(x) = f(x)$

por la regla del producto obtenemos:

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x)$$

Despejamos $F'(x)$ y obtenemos:

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$$

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

por lo que

$$F'(x) = \frac{f(x) - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

Simplificando (realizando la resta del numerador y luego el cociente) se obtiene:

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

7. Regla de la cadena:

Si $Y = f(u(x))$ es una función diferenciable de u , y u es una función diferenciable de x , entonces Y es una función diferenciable de x .

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{du} \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du(x)}{dx} \quad (3.15)$$

8. Regla de la potencia generalizada: Si $Y = U^n$ for $u \in \mathbb{R}$, y si $u(x)$ es una función diferenciable de x , entonces:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dU^n}{dx} = nU^{n-1} \frac{du(x)}{dx} \quad (3.16)$$

9. Derivada de una función logarítmica:

a) Si $Y = \ln x$:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{x} \quad (3.17)$$

b) Si $Y = \ln u$, donde $u(x)$ es una función positiva y diferenciable de x , por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{d(\ln u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \quad (3.18)$$

c) Si $Y = \log_b u$, primero tenemos que reescribir la función en términos de $\ln$ y luego diferenciar con la regla de $\frac{d(\ln u)}{dx}$.

$$Y = \frac{\ln u}{\ln b} \quad (3.19)$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\ln u}{\ln b} \right) = \frac{1}{\ln b} \frac{d(\ln u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{(\ln b)u} \frac{du}{dx} \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

Sabemos que $\ln(m) - \ln(n) = \ln\left(\frac{m}{n}\right)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{x+h}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right]$$

Reescribimos $\frac{1}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h}$ y obtenemos,

$$\begin{aligned} r \ln(m) &= \ln(m)^r \frac{d}{dx} \ln(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] = \frac{1}{x} \ln \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right] \end{aligned}$$

Cuando $h \rightarrow 0 \Rightarrow x$ es constante y $\therefore \frac{h}{x} \rightarrow 0$. Si $k = \frac{h}{x}$, el límite se convierte en:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e \therefore \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} (1) = \frac{1}{x} \text{ para } x > 0$$

10. Derivada de una función exponencial:

Si $Y = e^u$, donde $u(x)$ es una función diferenciable de x :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d}{dx} (e^u) = e^u \frac{du}{dx} \quad (3.21)$$

Si $u = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$: $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

11. Regla de la cadena para funciones de más de una variable:

Si $z = f(x, y)$, donde x, y son funciones de r, s dadas por $x = x(r, s), y = y(r, s)$. Si f, x, y tienen derivadas parciales continuas, entonces z es una función de r, s .

$$\frac{dz}{dr} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dr} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dr} \quad (3.22)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{ds} \quad (3.23)$$

El número de derivadas parciales está dado por el número de variables independientes, en este caso 2: r, s .

El número de variables intermedias de z , en este caso x, y , es el número de términos de cada una de las derivadas parciales.

3.2.3. Diferenciación parcial implícita

Cuando una ecuación en x, y, z no necesariamente define a z como una función de x, y utilizamos la técnica de la diferenciación parcial implícita. Decimos que aunque la ecuación no expresa de manera explícita a z como función de x, y , puede considerarse que expresa a z como una función implícita de x, y .

Procedimiento:

1. Diferenciar con respecto a la variable de interés cada lado de la ecuación.
2. Usar las reglas de diferenciación correspondientes paso a paso.
3. Agrupamos todos los elementos que tienen a la derivada parcial que se busca y factorizamos por factor común.

4. Despejar la derivada parcial que se busca.

Para los ejemplos utilizaremos las siguientes notaciones: $\frac{df}{dx}$ o $f'(x)$

3.3. Ejemplos

3.3.1. Límites

1. $\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 3x - 2$

Observar que éste es el límite de una función polinomial por lo que podemos evaluar el límite directamente. Alternativamente, podemos aplicar las reglas de los límites paso a paso. La primera regla que aplicamos es la regla que dice que el límite de una suma o resta es la suma o resta de los límites.

Entonces,

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 3x - 2 = 2(2)^2 + 3(2) - 2 = 2(4) + 6 - 2 = 8 + 6 - 2 = 12$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 \text{ por la regla 3.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 \text{ por la regla 5 aplicada dos veces y la regla 1.}$$

$$2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 2(2)^2 + 3(2) - 2$$

por la regla 2 aplicada dos veces.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + 3x - 2 = 2(4) + 6 - 2 = 12.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + x}$

Observar que es una función racional por lo que no podemos sustituir directamente. Alternativamente, podemos aplicar las reglas de los límites; sin embargo, si aplicamos la regla 7 el denominador sería cero y se indeterminaría el cociente. Por esta razón no podemos aplicar la regla 7. Otra estrategia es factorizar y simplificar el cociente y ver si podemos entonces evaluar el límite.

Factorizando por factor común obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 + 2)}{x(x + 1)}$$

la x en el numerador y denominador se simplifica y obtenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2}{x + 1}$$

El cociente resultante ya no se indetermina si aplicamos la regla 7 que dicta que el límite de un cociente es el cociente de los límites ya que el denominador es diferente de cero.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)}$$

Observamos que tanto el numerador como el denominador son límites de funciones polinomiales por lo que podemos evaluar los límites directamente:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)} = \frac{0 + 2}{0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

Alternativamente, podemos evaluar los límites del numerador y denominador aplicando la regla 3 de los límites que dice que el límite de una suma es la suma de los límites y después recordar que la regla 1 nos dice que el límite de una constante es la constante.

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x^2 - x}$$

Observar que este caso también es una función racional por lo que no podemos sustituir directamente. Alternativamente, podemos aplicar la regla 7 de los límites, únicamente si el denominador no es cero al aplicar la regla.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x^2 - x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^4}}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x}$$

Observar que después de aplicar la regla 7 tenemos en el numerador el límite de una función polinomial. Entonces podemos evaluar el límite sustituyendo directamente. Así mismo, el denominador también es el límite de una función polinomial por lo que podemos sustituir directamente y al sustituir, no tenemos cero:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x^4}}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - x} = \frac{\sqrt[3]{(-1)^4}}{(-1)^2 - (-1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + 2x}{4x^2 + x}$$

Observar que esta función es una función racional, por lo que tenemos que encontrar un límite al infinito de una función racional. Para encontrar este tipo de límites para este tipo de funciones tenemos la regla que dice: podemos tomar la potencia de mayor orden del numerador y del denominador y encontrar el límite de esa expresión simplificada:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + 2x}{4x^2 + x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2}}{x^2 + 2x}$$

3.3.2. Cálculo diferencial de varias variables

1. $f(x, y, z) = \ln(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})$

Esta es una función de tres variables por lo que encontramos tres derivadas parciales de primer orden.

Primero se expresa la función en términos de derivada parcial con respecto a la variable de interés:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \ln(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})$$

Después, aplicando las reglas de diferenciación paso a paso derivamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

En la parte del numerador utilizando la regla de diferenciación 4 se procede a escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}9x^3y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial x}3x^2yz + \frac{\partial}{\partial x}k^{(xy)^2}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Utilizando la regla 3 se descompone la parte del numerador separando las constantes de la variable a derivar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9y^2z^2 \frac{\partial x^3}{\partial x} + 3yz \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}k^{(xy)^2}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Para encontrar la derivada del último elemento de la suma de la derecha de la ecuación, primero se debe cambiar a base e y luego derivar. Cambiamos de base de la siguiente manera:

$$k^{(xy)^2} = (e^{\ln k})^{(xy)^2} = e^{(xy)^2 \ln k}$$

Se reescribe la derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9y^2z^2\frac{\partial x^3}{\partial x} + 3yz\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}e^{(xy)^2\ln k}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Una vez que cambiamos de base, derivamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{9y^2z^2(3x^2) + 3yz(2x) + e^{(xy)^2\ln k}\frac{\partial}{\partial x}x^2y^2\ln k}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Aplicando la regla 10 en el último término de la suma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{27x^2y^2z^2 + 6xyz + e^{(xy)^2\ln k}\ln ky^2}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\partial x^2 \partial x 9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{27x^2y^2z^2 + 6xyz + e^{(xy)^2\ln k}\ln ky^2(2x)}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Se reescribe la base e en su base original:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{27x^2y^2z^2 + 6xyz + 2xy^2k^{(xy)^2}\ln k}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Para realizar las otras derivadas parciales se utilizan los pasos anteriores:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}9x^3y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial y}3x^2yz + \frac{\partial}{\partial y}k^{(xy)^2}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{9x^3z^2\frac{\partial y^2}{\partial y} + 3x^2z\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}e^{(xy)^2\ln k}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{9x^3z^2(2y) + 3x^2z + e^{(xy)^2 \ln k} \frac{\partial}{\partial y} x^2 y^2 \ln k}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{18x^3yz^2 + 3x^2z + e^{(xy)^2 \ln k} \ln k x^2 \frac{\partial y^2}{\partial y}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{18x^3yz^2 + 3x^2z + e^{(xy)^2 \ln k} \ln k x^2 (2y)}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{18x^3yz^2 + 3x^2z + 2x^2 y k^{(xy)^2} \ln k}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Derivada con respecto a z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \ln(9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial}{\partial z} (9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2})}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\frac{\partial}{\partial z} 9x^3y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial z} 3x^2yz + \frac{\partial}{\partial z} k^{(xy)^2}}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{9x^3y^2 \frac{\partial z^2}{\partial z} + 3x^2y \frac{\partial z}{\partial z} + 0}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

Se destaca que el último término de la suma del numerador no contiene la variable z .

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{9x^3y^2(2z) + 3x^2y}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{18x^3y^2z + 3x^2y}{9x^3y^2z^2 + 3x^2yz + k^{(xy)^2}}$$

$$2. f(K, L) = K^a L^b + (KL)^{a+b} + L^{ab}$$

Ésta es una función de dos variables por lo que encontramos dos derivadas parciales de primer orden.

Para encontrar la derivada parcial con respecto a K , primero escribimos que vamos a diferenciar con respecto a K :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}(K^a L^b + (KL)^{a+b} + L^{ab})$$

Por la regla 4 se descompone la suma como la suma de las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K} K^a L^b + \frac{\partial}{\partial K} (KL)^{a+b} + \frac{\partial}{\partial K} L^{ab}$$

Aplicando la regla 3, sacamos las constantes de la derivada

$$\frac{\partial f}{\partial K} = L^b \frac{\partial K^a}{\partial K} + (a+b)(KL)^{(a+b)-1} \frac{\partial}{\partial K} KL + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = L^b (aK^{a-1}) + (a+b)(KL)^{(a+b)-1} L \frac{\partial K}{\partial K}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial K} = aK^{a-1} L^b + (a+b)L(KL)^{(a+b)-1}$$

Ahora derivamos con respecto a L :

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}(K^a L^b + (KL)^{a+b} + L^{ab})$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L} K^a L^b + \frac{\partial}{\partial L} (KL)^{a+b} + \frac{\partial}{\partial L} L^{ab}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = K^a \frac{\partial L^b}{\partial L} + (a+b)(KL)^{(a+b)-1} \frac{\partial}{\partial L} KL + \frac{\partial}{\partial L} L^{ab}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = K^a b L^{b-1} + (a+b)(KL)^{(a+b)-1} K \frac{\partial L}{\partial L} + ab L^{ab-1}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial L} = bK^a L^{b-1} + (a+b)(KL)^{(a+b)-1} + ab L^{ab-1}$$

$$3. f(m, n) = \frac{k^{(m+n)^2}}{e^{m+n}}$$

Esta es una función de dos variables, por lo que encontraremos dos derivadas parciales de primer orden. Primero se expresa la función en términos de la derivada con respecto a la variable a derivar.

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{k^{(m+n)^2}}{e^{m+n}} \right]$$

Aplicando la regla 6 de la derivada de un cociente, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} \frac{\partial}{\partial m} (k^{(m+n)^2}) - (k^{(m+n)^2}) \frac{\partial}{\partial m} e^{m+n}}{e^{(m+n)^2}}$$

Se empieza a derivar en la parte del numerador utilizando las reglas de diferenciación 2, 3 y 4:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) \frac{\partial}{\partial m} (k^{m+n})] - (k^{(m+n)^2}) (e^{m+n} \frac{\partial}{\partial m} (m+n))}{e^{(m+n)^2}}$$

Para poder derivar la parte que tiene la base diferente a e , se hace la transformación necesaria.

$$k^{m+n} = (e^{\ln k})^{m+n} = e^{(m+n) \ln k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) \frac{\partial}{\partial m} e^{(m+n) \ln k}] - (k^{(m+n)^2}) [e^{(m+n)} (\frac{\partial m}{\partial m} + \frac{\partial n}{\partial m})]}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) [e^{(m+n) \ln k} \frac{\partial}{\partial m} (m+n) \ln k]] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) [e^{(m+n) \ln k} \ln k (\frac{\partial m}{\partial m} + \frac{\partial n}{\partial m})]] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) (e^{(m+n) \ln k} \ln k)] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

Se convierte nuevamente a la base original:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{2e^{m+n} \ln k (k^{m+n}) (k^{m+n}) - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

Reducimos términos factorizando:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{2\ln K k^{(m+n)^2} - k^{(m+n)^2}}{e^{m+n}}$$

Encontramos la derivada respecto a n :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{k^{(m+n)^2}}{e^{m+n}} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} \frac{\partial}{\partial n} (k^{(m+n)^2}) - (k^{(m+n)^2}) \frac{\partial}{\partial n} e^{m+n}}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) \frac{\partial}{\partial n} (k^{m+n})] - (k^{(m+n)^2}) (e^{m+n} \frac{\partial}{\partial n} (m+n))}{e^{(m+n)^2}}$$

$$k^{m+n} = (e^{\ln k})^{m+n} = e^{(m+n)\ln k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) \frac{\partial}{\partial n} e^{(m+n)\ln k}] - (k^{(m+n)^2}) [e^{(m+n)} (\frac{\partial m}{\partial n} + \frac{\partial n}{\partial n})]}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) [e^{(m+n)\ln k} \frac{\partial}{\partial n} (m+n) \ln k]] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) [e^{(m+n)\ln k} \ln k (\frac{\partial m}{\partial n} + \frac{\partial n}{\partial n})]] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{e^{m+n} [2(k^{m+n}) (e^{(m+n)\ln k} \ln k)] - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{2e^{m+n} \ln k (k^{m+n}) (k^{m+n}) - (k^{(m+n)^2}) (e^{(m+n)})}{e^{(m+n)^2}}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{2\ln K k^{(m+n)^2} - k^{(m+n)^2}}{e^{m+n}}$$

4. $f(x, y, z) = (x^2 y^2 + 2xy)z^2$

Se expresa la función en términos de la derivada con respecto a la variable de interés:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + 2xy)^{z^2}$$

Utilizando la regla 2, la regla de la potencia, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + 2xy)$$

Se utiliza la regla 4 que indica que la derivada de una suma es la suma de las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \left(\frac{\partial}{\partial x}x^2y^2 + \frac{\partial}{\partial x}2xy \right)$$

Utilizando la regla 3, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \left(y^2 \frac{\partial x^2}{\partial x} + 2y \frac{\partial x}{\partial x} \right)$$

A continuación derivamos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} (2xy^2 + 2y)$$

Se reducen términos semejantes haciendo una multiplicación simple:

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x} = (2xy^2z^2 + 2yz^2)(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1}$$

Para la derivada respecto a y se siguen los mismos pasos anteriores.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + 2xy)^{z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + 2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \left(\frac{\partial}{\partial y}x^2y^2 + \frac{\partial}{\partial y}2xy \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} \left(x^2 \frac{\partial y^2}{\partial y} + 2x \frac{\partial y}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z^2(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1} (2x^2y + 2x)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y} = (2x^2yz^2 + 2xz^2)(x^2y^2 + 2xy)^{z^2-1}$$

Para encontrar la derivada con respecto a a se observa que tanto x como y son constantes, por lo que pasan a ser una base diferente de la base e :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2 + 2xy)^{z^2}$$

Se convierte a base e lo que se encuentra en el paréntesis:

$$(x^2y^2 + 2xy)^{z^2} = e^{\ln(x^2y^2+2xy)z^2} = e^{z^2\ln(x^2y^2+2xy)}$$

Se reescribe la derivada:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}e^{z^2\ln(x^2y^2+2xy)}$$

Se comienza a derivar según la regla 10:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{z^2\ln(x^2y^2+2xy)} \frac{\partial}{\partial z} z^2 \ln(x^2y^2 + 2xy)$$

Utilizando la regla 3:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{z^2\ln(x^2y^2+2xy)} \ln(x^2y^2 + 2xy) \frac{\partial z^2}{\partial z}$$

Derivando:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{z^2\ln(x^2y^2+2xy)} 2z \ln(x^2y^2 + 2xy)$$

Reescribiendo en la base original y reordenando términos:

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial z} = 2z(x^2y^2 + 2xy)^{z^2} \ln(x^2y^2 + 2xy)$$

3.3.3. Diferenciación de segundo orden

Reglas de diferenciación de funciones de varias variables de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = f_{zz}$$

Derivadas parciales mixtas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xy} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yx} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yz}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = f_{zx} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = f_{yz}$$

$$1. f(x, y, z) = 3x^2y^3z^2 + 2xy + z^3$$

Esta es una función de tres variables. En esta sección encontraremos las derivadas parciales de segundo orden. Para ello habrá que diferenciar las derivadas parciales de primer orden con respecto a cada una de las variables independientes de la función.

Comenzamos con encontrar las derivadas parciales de primer orden. Utilizaremos la notación de sufijos:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^3z^2 + 2xy + z^3) = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2y^3z^2 + \frac{\partial}{\partial x} 2xy + \frac{\partial}{\partial x} z^3 = 3y^3z^2 \frac{\partial}{\partial x} x^2 + 2y \frac{\partial}{\partial x} x + 0 = 3y^3z^2(2x) + 2y(1) = 6xy^3z^2 = 2y$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^3z^2 + 2xy + z^3) = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^3z^2 + \frac{\partial}{\partial y} 2xy + \frac{\partial}{\partial y} z^3 = 3x^2z^2 \frac{\partial}{\partial y} y^3 + 2x \frac{\partial}{\partial y} y + 0 = 3x^2z^2(3y^2) + 2x(1) = 9x^2y^2z^2 + 2x$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z} (3x^2y^3z^2 + 2xy + z^3) = \frac{\partial}{\partial z} 3x^2y^3z^2 + \frac{\partial}{\partial z} 2xy + \frac{\partial}{\partial z} z^3 = 3x^2y^3 \frac{\partial}{\partial z} z^2 + 0 + 3z^2 = 3x^2y^3(2z) + 3z^2 = 6x^2y^3z + 3z^2$$

Una vez obtenidas las derivadas parciales de primer orden,

continuamos con la obtención de las derivadas parciales de segundo orden. Comenzamos por encontrar las derivadas parciales de segundo orden puras.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy^3z^2 + 2y)$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}6xy^3z^2 + \frac{\partial}{\partial x}2y$$

$$f_{xx} = 6y^3z^2 \frac{\partial x}{\partial x} + 0$$

$$\therefore f_{xx} = 6y^3z^2$$

Esta derivada parcial de segundo orden se conoce como pura ya que es únicamente con respecto a una sola variable, en este caso x .

Ahora encontraremos las derivadas parciales de segundo orden con respecto a y f_{yy} :

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(9x^2y^2z^2 + 2x)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}9x^2y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial y}2x$$

$$f_{yy} = 9x^2z^2 \frac{\partial y^2}{\partial y} + 0$$

$$\therefore f_{yy} = 18x^2yz^2$$

Esta derivada parcial de segundo orden es pura ya que es únicamente con respecto a una sola variable, en este caso y .

f_{zz} :

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y^3z + 3z^2)$$

$$f_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}6x^2y^3z + \frac{\partial}{\partial z}3z^2$$

$$f_{zz} = 6x^2y^3 \frac{\partial z}{\partial z} + 3 \frac{\partial z^2}{\partial z}$$

$$\therefore f_{zz} = 6x^3y^3 + 6z$$

Esta derivada parcial de segundo orden se conoce como pura ya que es únicamente con respecto a una sola variable, en este caso z .

Ahora encontraremos las derivadas parciales de segundo orden mixtas. Son mixtas porque son derivadas parciales de primer orden diferenciadas con respecto a una variable diferente a la de su primera derivada.

$f_{xy} :$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^3z^2 + 2y)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}6xy^3z^2 + \frac{\partial}{\partial y}2y$$

$$f_{xy} = 6xz^2 \frac{\partial y^3}{\partial y} + 2 \frac{\partial y}{\partial y}$$

$$\therefore f_{xy} = 18xy^2z^2 + 2$$

$f_{xz} :$

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}(6xy^3z^2 + 2y)$$

$$f_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}6xy^3z^2 + \frac{\partial}{\partial z}2y$$

$$f_{xz} = 6xy^3 \frac{\partial z^2}{\partial z} + 0$$

$$f_{xz} = 6xy^3(2z)$$

$$\therefore f_{xz} = 12xy^3z$$

$f_{yx} :$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(9x^2y^2z^2 + 2x)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}9x^2y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial x}2x$$

$$f_{yx} = 9y^2z^2\frac{\partial x^2}{\partial x} + 2\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$f_{yx} = 9y^2z^2(2x) + 2$$

$$\therefore f_{yx} = 18xy^2z^2 + 2$$

$$f_{yz} :$$

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}(9x^2y^2z^2 + 2x)$$

$$f_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}9x^2y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial z}2x$$

$$f_{yz} = 9x^2y^2\frac{\partial z^2}{\partial z} + 0$$

$$f_{yz} = 9x^2y^2(2z)$$

$$\therefore f_{yz} = 18x^2y^2z$$

$$f_{zx} : f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^3z + 3z^2) \quad f_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}6x^2y^3z + \frac{\partial}{\partial x}3z^2$$

$$f_{zx} = 6y^3z\frac{\partial x^2}{\partial x} + 0 \quad f_{zx} = 6y^3z(2x) \therefore f_{zx} = 12xy^3z$$

$$f_{zy} :$$

$$f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y^3z + 3z^2)$$

$$f_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}6x^2y^3z + \frac{\partial}{\partial y}3z^2$$

$$f_{zy} = 6x^2z\frac{\partial y^3}{\partial y} + 0$$

$$f_{zy} = 6x^2z(3y^2)$$

$$\therefore f_{zy} = 18x^2y^2z$$

$$2. f(a, b, c) = K^{ab} + L^{bc} + Gabc$$

Comenzamos con encontrar las derivadas parciales de primer orden con respecto a cada una de las variables independientes:

$$f_a = b \ln K K^{ab} + Gbc$$

$$f_b = a \ln K K^{ab} + c \ln L L^{bc} + Gac$$

$$f_c = b \ln L L^{bc} + Gab$$

Continuamos con encontrar las derivadas parciales de segundo orden. Primero encontramos las puras.

$$f_{aa} = \frac{\partial}{\partial a}(b \ln K K^{ab} + Gbc)$$

$$f_{aa} = \frac{\partial}{\partial a} b \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial a} Gbc$$

$$f_{aa} = b \ln K \frac{\partial K^{ab}}{\partial a} + 0$$

$$f_{aa} = b \ln K \frac{\partial (e^{ab \ln K})}{\partial a}$$

$$f_{aa} = b \ln K (e^{ab \ln K} \frac{\partial}{\partial a} ab \ln K)$$

$$f_{aa} = b \ln K (e^{ab \ln K} b \ln K \frac{\partial a}{\partial a})$$

$$f_{aa} = b \ln K (e^{ab \ln K} b \ln K)$$

$$f_{aa} = b \ln K (b \ln K K^{ab})$$

$$\therefore f_{aa} = b^2 \ln^2 K K^{ab}$$

$$f_{bb} :$$

$$f_{bb} = \frac{\partial}{\partial b}(a \ln K K^{ab} + c \ln L L^{bc} + Gac)$$

$$f_{bb} = \frac{\partial}{\partial b} a \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial b} c \ln L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial b} G_{ac}$$

$$f_{bb} = a \ln K \frac{\partial}{\partial b} K^{ab} + c \ln L \frac{\partial}{\partial b} L^{bc} + 0$$

$$f_{bb} = a \ln K \frac{\partial}{\partial b} e^{ab \ln K} + c \ln L \frac{\partial}{\partial b} e^{bc \ln L}$$

$$f_{bb} = a \ln K (e^{ab \ln K} \frac{\partial}{\partial b} a \ln K) + c \ln L (e^{bc \ln L} \frac{\partial}{\partial b} b \ln L)$$

$$f_{bb} = a \ln K (e^{ab \ln K} a \ln K \frac{\partial b}{\partial b}) + c \ln L (e^{bc \ln L} c \ln L \frac{\partial b}{\partial b})$$

$$f_{bb} = a \ln K (e^{ab \ln K} a \ln K) + c \ln L (e^{bc \ln L} c \ln L)$$

$$f_{bb} = a \ln K (a \ln K K^{ab}) + c \ln L (c \ln L L^{bc})$$

$$\therefore f_{bb} = a^2 \ln^2 K K^{ab} + c^2 \ln^2 L L^{bc}$$

$$f_{cc} :$$

$$f_{cc} = \frac{\partial}{\partial c} (b \ln L L^{bc} + G_{ab}) \quad f_{cc} = \frac{\partial}{\partial c} b \ln L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial c} G_{ab} \quad f_{cc} =$$

$$b \ln L \frac{\partial}{\partial c} L^{bc} + 0 \quad f_{cc} = b \ln L \frac{\partial}{\partial c} e^{bc \ln L} \quad f_{cc} = b \ln L (e^{bc \ln L} \frac{\partial}{\partial c} b \ln L)$$

$$f_{cc} = b \ln L (e^{bc \ln L} b \ln L \frac{\partial c}{\partial c}) \quad f_{cc} = b \ln L (e^{bc \ln L} b \ln L) \quad f_{cc} = b \ln L (b \ln L L^{bc})$$

$$\therefore f_{cc} = b^2 \ln^2 L L^{bc}$$

Ahora continuamos por encontrar las derivadas parciales de segundo orden mixtas.

$$f_{ab} :$$

$$f_{ab} = \frac{\partial}{\partial b} (b \ln K K^{ab} + G_{bc})$$

$$f_{ab} = \frac{\partial}{\partial b} b \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial b} G_{bc}$$

$$f_{ab} = \ln K \frac{\partial}{\partial b} b K^{ab} + G_c \frac{\partial b}{\partial b}$$

Utilizando la regla 5 para el primer término de la derivada obtenemos:

$$f_{ab} = \ln K \left(b \frac{\partial}{\partial b} K^{ab} + K^{ab} \frac{\partial b}{\partial b} \right) + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left(b \frac{\partial}{\partial b} e^{ab \ln K} + K^{ab} \right) + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left[b \left(e^{ab \ln K} \frac{\partial}{\partial b} ab \ln K \right) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left[b \left(e^{ab \ln K} a \ln K \frac{\partial b}{\partial b} \right) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left[b \left(e^{ab \ln K} a \ln K \right) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left(ab e^{ab \ln K} \ln K + K^{ab} \right) + Gc$$

$$f_{ab} = \ln K \left(ab \ln K K^{ab} + K^{ab} \right) + Gc$$

$$\therefore f_{ab} = ab \ln^2 K K^{ab} + \ln K K^{ab} + Gc$$

$f_{ac} :$

$$f_{ac} = \frac{\partial}{\partial c} (b \ln K K^{ab} + Gbc)$$

$$f_{ac} = \frac{\partial}{\partial c} b \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial c} Gbc$$

$$f_{ac} = 0 + Gb \frac{\partial c}{\partial c}$$

$$\therefore f_{ac} = Gb$$

$f_{ba} :$

$$f_{ba} = \frac{\partial}{\partial a} a \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial a} c \ln L L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial a} Gac$$

$$f_{ba} = \ln K \frac{\partial}{\partial a} a \ln K K^{ab} + 0 + Gb \frac{\partial a}{\partial a}$$

$$f_{ba} = \ln K \left(a \frac{\partial}{\partial a} K^{ab} + K^{ab} \frac{\partial a}{\partial a} \right) + Gc$$

$$f_{ba} = \ln K \left[a \frac{\partial}{\partial a} e^{ab \ln K} + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ba} = \ln K \left[a (e^{ab \ln K} \frac{\partial}{\partial a} ab \ln K) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ba} = \ln K \left[a (e^{ab \ln K} b \ln K \frac{\partial a}{\partial a}) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ba} = \ln K \left[a (e^{ab \ln K} b \ln A) + K^{ab} \right] + Gc$$

$$f_{ba} = \ln k \left[ab \ln K K^{ab} + K^{ab} \right] + Gc$$

$$\therefore f_{ba} = ab \ln^2 K K^{ab} + \ln K K^{ab} + Gc$$

$$f_{bc} :$$

$$f_{bc} = \frac{\partial}{\partial c} (a \ln K K^{ab} + c \ln L L^{bc} + Gac)$$

$$f_{bc} = \frac{\partial}{\partial c} a \ln K K^{ab} + \frac{\partial}{\partial c} c \ln L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial c} Gac$$

$$f_{bc} = 0 + \ln L \frac{\partial}{\partial c} c L^{bc} + Ga \frac{\partial c}{\partial c}$$

$$f_{bc} = \ln L \left(c \frac{\partial}{\partial c} e^{bc \ln L} + L^{bc} \frac{\partial c}{\partial c} \right) + Ga$$

$$f_{bc} = \ln L \left[c (e^{bc \ln L} \frac{\partial}{\partial c} bc \ln L) + L^{bc} \right] + Ga$$

$$f_{bc} = \ln L \left[c (e^{bc \ln L} b \ln L \frac{\partial c}{\partial c}) + L^{bc} \right] + Ga$$

$$f_{bc} = \ln L \left[c (e^{bc \ln L} b \ln L) + L^{bc} \right] + Ga$$

$$f_{bc} = \ln L (bc \ln L L^{bc} + L^{bc}) + Ga$$

$$\therefore f_{bc} = bc \ln^2 L L^{bc} + \ln L L^{bc} + Ga$$

$$f_{ca} :$$

$$f_{ca} = \frac{\partial}{\partial a} (b \ln L L^{bc} + Gab)$$

$$f_{ca} = \frac{\partial}{\partial a} b \ln L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial a} Gab$$

$$f_{ca} = 0 + Gb \frac{\partial a}{\partial a}$$

$$\therefore f_{ca} = Gb$$

$$f_{cb} :$$

$$f_{cb} = \frac{\partial}{\partial b} (b \ln L L^{bc} + Gab)$$

$$f_{cb} = \frac{\partial}{\partial b} b \ln L L^{bc} + \frac{\partial}{\partial b} Gab$$

$$f_{cb} = \ln L \frac{\partial}{\partial b} b \ln L^{bc} + Ga \frac{\partial b}{\partial b}$$

$$f_{cb} = \ln L (b \frac{\partial}{\partial b} e^{b \ln L} + L^{bc} \frac{\partial b}{\partial b}) + Ga$$

$$f_{cb} = \ln L [b (e^{b \ln L} \frac{\partial}{\partial b} b \ln L) + L^{bc}] + Ga$$

$$f_{cb} = \ln L [b (e^{b \ln L} \ln L \frac{\partial b}{\partial b}) + L^{bc}] + Ga$$

$$f_{cb} = \ln L [b (e^{b \ln L} \ln L) + L^{bc}] + Ga$$

$$f_{cb} = \ln L (b \ln L L^{bc} + L^{bc}) + Ga$$

$$\therefore f_{cb} = b \ln^2 L L^{bc} + \ln L L^{bc} + Ga$$

$$3. \ g(r, s, t) = \ln(rt^2 + sr)$$

Comenzamos por encontrar las derivadas parciales de primer orden con respecto a cada una de las variables independientes:

$$f_r = \frac{t^2 + s}{rt^2 + sr}$$

$$f_s = \frac{1}{t^2 + s}$$

$$f_t = \frac{2t}{t^2 + s}$$

Continuamos por encontrar las derivadas parciales de segundo orden. Primero nos enfocamos en las puras y después en las mixtas.

$$f_{rr} :$$

$$f_{rr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{t^2 + s}{rt^2 + sr} \right)$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rt^2 + sr} \right)$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) \frac{\partial}{\partial r} (rt^2 + sr)^{-1}$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) [-(rt^2 + sr)^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (rt^2 + sr)]$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) [-(rt^2 + sr)^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial r} rt^2 + \frac{\partial}{\partial r} sr \right)]$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) [-(rt^2 + sr)^{-2} \left(t^2 \frac{\partial r}{\partial r} + s \frac{\partial r}{\partial r} \right)]$$

$$f_{rr} = (t^2 + s) [-(rt^2 + sr)^{-2} (t^2 + s)]$$

$$\therefore f_{rr} = \frac{(t^2 + s)^2}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{ss} :$$

$$f_{ss} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{t^2 + s} \right)$$

$$f_{ss} = \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s)^{-1}$$

$$f_{ss} = -(t^2 + s)^{-2} \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s)$$

$$f_{ss} = -(t^2 + s)^{-2} \left(\frac{\partial t^2}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial s} \right)$$

$$f_{ss} = -(t^2 + s)^{-2}(0 + 1)$$

$$\therefore f_{ss} = -\frac{1}{(t^2 + s)^2}$$

$$f_{tt} :$$

$$f_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2t}{t^2 + s} \right)$$

$$f_{tt} = \frac{(t^2 + s) \frac{\partial 2t}{\partial t} - (2t) \frac{\partial}{\partial t} (t^2 + s)}{(t^2 + s)^2}$$

$$f_{tt} = \frac{(t^2 + s) \left(2 \frac{\partial t}{\partial t} \right) - 2t \left(\frac{\partial t^2}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right)}{(t^2 + s)^2}$$

$$f_{tt} = \frac{2(t^2 + s) - (2t)(2t)}{(t^2 + s)^2}$$

$$\therefore f_{tt} = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 + s)^2}$$

Las derivadas parciales de segundo orden mixtas son las siguientes:

$$f_{rs} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{t^2 + s}{rt^2 + sr} \right)$$

$$f_{rs} = \frac{(rt^2 + sr) \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s) - (t^2 + s) \frac{\partial}{\partial s} (rt^2 + sr)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rs} = \frac{(rt^2 + sr) \left(\frac{\partial t^2}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial s} \right) - (t^2 + s) \left(\frac{\partial}{\partial s} rt^2 + \frac{\partial}{\partial s} sr \right)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rs} = \frac{(rt^2 + sr)(0 + 1) - (t^2 + s)(0 + r \frac{\partial s}{\partial s})}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rs} = \frac{rt^2 + sr - rt^2 - rs}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$\therefore f_{rs} = 0$$

$$f_{rt} :$$

$$f_{rt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t^2 + s}{rt^2 + sr} \right)$$

$$f_{rt} = \frac{(rt^2 + sr) \frac{\partial}{\partial t} (t^2 + s) - (t^2 + s) \frac{\partial}{\partial t} (rt^2 + sr)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rt} = \frac{(rt^2 + sr) \left(\frac{\partial t^2}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right) - (t^2 + s) \left(\frac{\partial}{\partial t} rt^2 + \frac{\partial}{\partial t} sr \right)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rt} = \frac{(rt^2 + sr)(2t + 0) - (t^2 + s) \left(r \frac{\partial t^2}{\partial t} + 0 \right)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rt} = \frac{2rt^3 + 2rst - (t^2 + s)(2tr)}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$f_{rt} = \frac{2rt^3 + 2rst - 2rt^3 - 2rst}{(rt^2 + sr)^2}$$

$$\therefore f_{rt} = 0$$

$$f_{sr} :$$

$$f_{sr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{t^2 + s} \right)$$

$$\therefore f_{sr} = 0$$

$$f_{st} :$$

$$f_{st} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^2 + s} \right)$$

$$f_{st} = \frac{\partial}{\partial t} (t^2 + s)^{-1}$$

$$f_{st} = -(t^2 + s)^{-2} \frac{\partial}{\partial t}(t^2 + s)$$

$$f_{st} = -(t^2 + s)^{-2} \left(\frac{\partial t^2}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} \right)$$

$$f_{st} = -(t^2 + s)^{-2} (2t + 0)$$

$$\therefore f_{st} = -\frac{2t}{(t^2 + s)^2}$$

$$f_{tr} :$$

$$f_{tr} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2t}{t^2 + s} \right)$$

$$\therefore f_{tr} = 0$$

$$f_{ts} :$$

$$f_{ts} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{2t}{t^2 + s} \right)$$

$$f_{ts} = 2t \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s)^{-1}$$

$$f_{ts} = -2t(t^2 + s)^{-2} \frac{\partial}{\partial s} (t^2 + s)$$

$$f_{ts} = -2t(t^2 + s)^{-2} \left(\frac{\partial t^2}{\partial s} + \frac{\partial s}{\partial s} \right)$$

$$f_{ts} = -2t(t^2 + s)^{-2}$$

$$\therefore f_{ts} = -\frac{2t}{(t^2 + s)^2}$$

4. Dada la función implícita $xy^2 + 2 = 3$, encontrar $f'(x)$

El primer paso siempre es diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a la variable de interés:

$$f'(x)(xy^2 + 2) = f'(x)(3)$$

A continuación empezamos a diferenciar paso a paso utilizando las reglas de diferenciación. En este caso se utiliza la

regla 4:

$$f'(x)(xy^2) + f'(x)2 = f'(x)3$$

Continuamos diferenciando aplicando otras reglas. El primer término de la función se descompone utilizando la regla 5 de diferenciación:

$$(xf'(x)y^2 + y^2f'(x)x) + 0 = 0$$

Se puede observar que tanto el segundo término y el término a la derecha de la igualdad son constantes por lo que su derivada es 0:

Se procede a realizar la derivada implícita en el paréntesis:

$$2xyf'(x) + y^2 = 0$$

Se despejan las variables y constantes que no tengan la derivada requerida:

$$2xyf'(x) = -y^2$$

Continuamos con dejar de un lado de la ecuación los términos que contengan la derivada deseada. Factorizamos por factor común para después despejar siguiendo las propiedades de la igualdad:

$$f'(x) = -\frac{y^2}{2xy}$$

Si es posible, se simplifica:

$$\therefore f'(x) = -\frac{y}{2x}$$

$$5. f'(y); x^5y^3 + 2x^4y^2 + x^3y = 3x$$

$$f'(y)(x^5y^3 + 2x^4y^2 + x^3y) = f'(y)(3x)$$

$$f'(y)(x^5y^3) + f'(y)(2x^4y^2) + f'(y)(x^3y) = 3f'(y)$$

$$[x^5f'(y)y^3 + y^3f'(y)x^5] + 2[x^4f'(y)y^2 + y^2f'(y)x^4] + [x^3f'(y)y + yf'(y)x^3] = 3f'(y)$$

$$3x^5y^2 + 5x^4y^3f'(y) + 2[2x^4y + 4x^3y^2f'(y)] + x^3 + 3x^2yf'(y) = 3f'(y)$$

$$3x^5y^2 + 5x^4y^3f'(y) + 4x^4y + 8x^3y^2f'(y) + x^3 + 3x^2yf'(y) = 3f'(y)$$

$$(5x^4y^3 + 8x^3y^2 + 3x^2y - 3)f'(y) = -3x^5y^2 - 4x^4y - x^3$$

$$\therefore f'(y) = \frac{-3x^5y^2 - 4x^4y - x^3}{5x^4y^3 + 8x^3y^2 + 3x^2y - 3}$$

$$6. \frac{dn}{dm}; m^2n^3 + 3mn^2 - 3n = 2mn$$

En este caso utilizaremos la notación de derivada para que se sea más claro:

$$\frac{d}{dm}(m^2n^3 + 3mn^2 - 3n) = \frac{d}{dm}(2mn)$$

$$\frac{d}{dm}m^2n^3 + \frac{d}{dm}3mn^2 - \frac{d}{dm}3n = 2[m\frac{dn}{dm} + n\frac{dm}{dm}]$$

$$[m^2\frac{dn^3}{dm} + n^3\frac{dm^2}{dm}] + 3[m\frac{dn^2}{dm} + n^2\frac{dm}{dm}] - 3\frac{dn}{dm} = 2[m\frac{dn}{dm} + n]$$

$$3m^2n^2\frac{dn}{dm} + 2mn^3 + 3[2mn\frac{dn}{dm} + n^2] - 3\frac{dn}{dm} = 2m\frac{dn}{dm} + 2n$$

$$(3m^2n^2 + 6mn - 2m - 3)\frac{dn}{dm} = 2n - 2mn^3 - 3n^2$$

$$\therefore \frac{dn}{dm} = \frac{2n - 2mn^3 - 3n^2}{3m^2n^2 + 6mn - 2m - 3}$$

$$7. \frac{dy}{dx}; (xy^2 + 2xy)^2 = 3xy$$

En este caso se puede ver que se tiene que utilizar la regla de diferenciación 2 de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(xy^2 + 2xy)^2 = \frac{d}{dx}3xy$$

$$2(xy^2 + 2xy)\frac{d}{dx}(xy^2 + 2xy) = 3\frac{d}{dx}xy$$

$$2(xy^2 + 2xy)\left[\frac{d}{dx}xy^2 + \frac{d}{dx}2xy\right] = 3\left[x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right]$$

$$2(xy^2 + 2xy)\left[\left(x\frac{dy^2}{dx} + y^2\frac{dx}{dx}\right) + 2\frac{d}{dx}xy\right] = 3\left[x\frac{dy}{dx} + y\right]$$

$$2(xy^2 + 2xy)\left[\left(2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 2\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right)\right] = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$2(xy^2 + 2xy)\left[\left(2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 2\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\right] = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$2(xy^2 + 2xy)\left[2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\right] = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$(2xy^2 + 4xy)\left(2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2y\right) = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$4x^2y^3\frac{dy}{dx} + 2xy^4 + 4x^2y\frac{dy}{dx} + 4xy^3 + 8x^2y^2\frac{dy}{dx} + 4xy^3 + 8x^2y\frac{dy}{dx} + 8xy^2 = 3x\frac{dy}{dx} + 3y$$

$$4x^2y^3\frac{dy}{dx} + 12x^2y\frac{dy}{dx} + 8x^2y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 2xy^4 - 8xy^3 - 8xy^2$$

$$(4x^2y^3 + 12x^2y + 8x^2y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 3y - 2xy^4 - 8xy^3 - 8xy^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 2xy^4 - 8xy^3 - 8xy^2}{4x^2y^3 + 12x^2y + 8x^2y^2 - 3x}$$

$$8. \frac{dx}{dz}; \ln(zx + 2xz) = 3z$$

Se utiliza la regla 9 b de diferenciación:

$$\frac{d}{dz}\ln(zx + 2xz) = \frac{d}{dz}3z$$

$$\frac{\frac{d}{dz}(zx + 2xz)}{zx + 2xz} = 3\frac{dz}{dz}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{d}{dz}zx + \frac{d}{dz}2xz}{zx + 2xz} = 3 \\
& \left(z\frac{dx}{dz} + x\frac{dz}{dz}\right) + 2\frac{d}{dz}xz = 3(zx + 2xz) \\
& z\frac{dx}{dz} + x + 2\left(x\frac{dz}{dz} + z\frac{dx}{dz}\right) = 3zx + 6xz \\
& z\frac{dx}{dz} + x + 2x + 2z\frac{dx}{dz} = 3zx + 6xz \\
& 3z\frac{dx}{dz} + 3x = 3zx + 6xz \\
& 3z\frac{dx}{dz} = 3zx + 6xz - 3x \\
& \frac{dx}{dz} = \frac{3zx + 6xz - 3x}{3z} \\
& \therefore \frac{dx}{dz} = \frac{zx + 2xz - x}{z}
\end{aligned}$$

3.4. Código en Python

EJEMPLOS DE DERIVACIÓN DE UNA VARIABLE

July 29, 2021

```
[70]: # -*- coding: utf-8 -*-
      """
      Dr. Martha Gabriela Alatraste Contreras
      Ingeniero Abisai Israel De La Rosa Gudiño
      Derivadas de una variable utilizando Python para su resolución
      """

      """Para estos ejemplos, se pretende que tanto el estudiante como el profesor,
      ↪puedan aprender y a partir de allí realizar
      sus propias propuestas para ejercicios con Derivadas de una sola variable, es
      ↪importante que en un principio el alumno
      siga los pasos aquí descritos, y posteriormente se aventure a crear nuevas
      ↪cosas la práctica que vaya adquiriendo"""

      """1 ejemplo  $g(x)=(x^4+2x^2+3x)^{(1/2)}$ """
      import numpy as np #impostamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
      ↪mediante ella podremos mandar a llamar a funciones
      # tal como lo veremos después
      """Vamos a empezar a graficar la función"""
      def g(x): # Se define la función
          return np.sqrt(x**4+2*x**2+3*x) #esta definición nos regresa la función con
          ↪la que queremos trabajar, en este caso utilizamos
      #la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
      ↪dependiendo de la función de usa o no
      %matplotlib inline
      import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
      ↪para iniciar nuestra gráfica

      def move_spines():
          """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
          0 de x para dividir claramente los valores positivos y
          negativos."""
          fig, ax = plt.subplots()
          for spine in ["left", "bottom"]:
              ax.spines[spine].set_position("zero")

          for spine in ["right", "top"]:
```

```

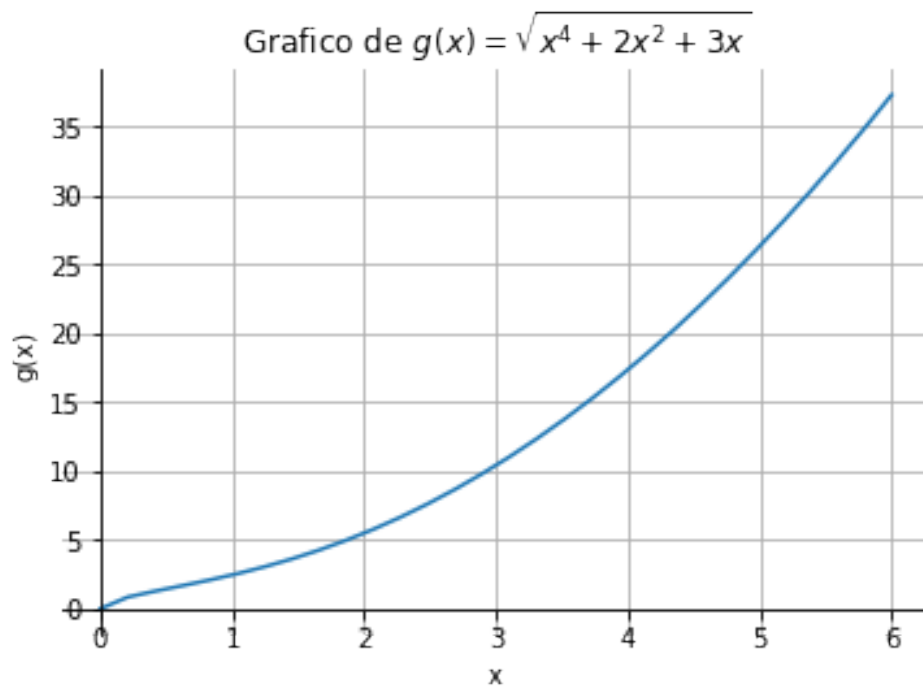
ax.spines[spine].set_color("none")

return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(0, 6, num=30) # Se pone el rango de los valores de las
↳ abscisas, y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳ tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, g(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de $g(x)=\sqrt{x^4+2x^2+3x}$") #Título de la gráfica
plt.ylabel('g(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

"""DERIVADA DE LA FUNCIÓN"""
from sympy import Derivative, diff, simplify# de la libreria sympy llamamos a
↳ las funciones para derivar y simplificar
from sympy import Symbol # Importar la libreria sympy para el uso simbólico
x=Symbol('x') # Se nombra la variable que se va a derivar como símbolo
g=(x**4+2*x**2+3*x)**(1/2)#Función a la cual se va a derivar respecto a la
↳ variable
derivada=Derivative(g,x).doit()# Se deriva utilizando la letra que se le puso a
↳ la función
m=simplify(derivada)#Cuando vemos que son funciones muy complejas como lo son
↳ racionales, logaritmos y radicales o funciones
#compuestas, nos conviene utilizar la función simplify para reducir
print("g'(x)=",m) #Se imprime la derivada

```



$$g'(x) = (x(x^3 + 2x + 3))^{(-0.5)}(2.0x^3 + 2.0x + 1.5)$$

```
[66]: """La derivada de g, es g'(x)= (x*(x**3 + 2*x + 3))**(-0.5)*(2.0*x**3 + 2.0*x +
      ↪ 1.5) """
      """Al conocer la derivada de nuestra función, podemos realizar lo mismo para
      ↪ graficar"""
import numpy as np
def G(x):
    return ((x*(x**3 + 2*x + 3))**(-0.5)*(2.0*x**3 + 2.0*x + 1.5)) #para este
      ↪ caso ya no hacemos uso de numpy debido a que
#podemos escribir la función o la derivada en la versión que nos resulta
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

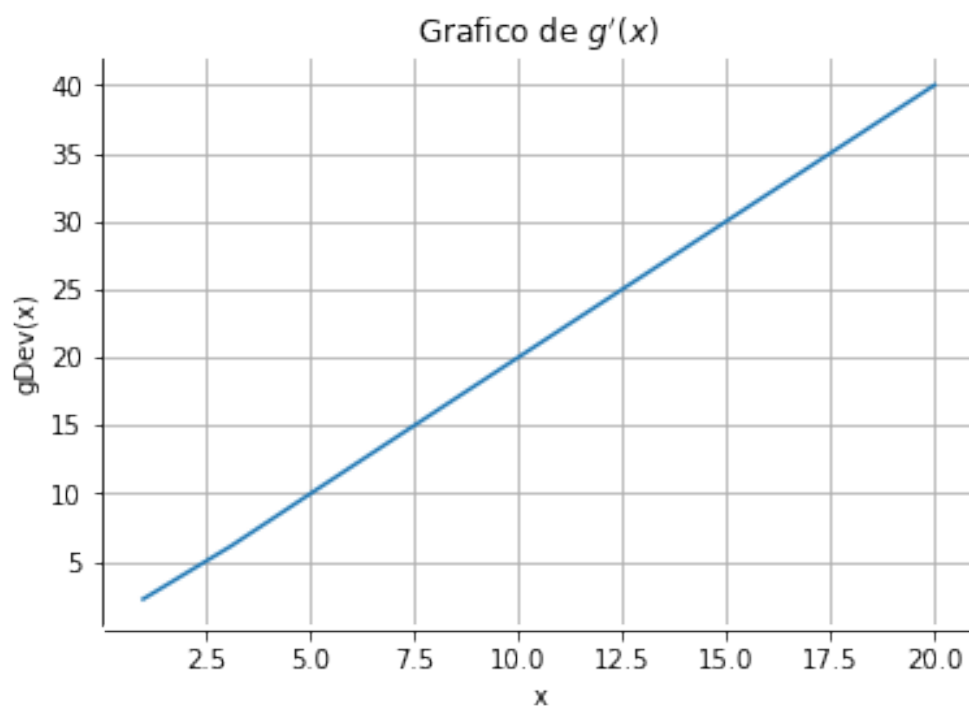
    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")
```

```

    return ax

x= np.linspace(1, 20, num=10)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, G(x))
plt.title(r"Grafico de $g'(x)$")
plt.ylabel('gDev(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```



```

[57]: """2 ejemplo d(x)=2x^5+3x^4+2x^3-1"""
import numpy as np
def d(x):
    return (2*x**5+3*x**4+2*x**3-1)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""

```

```

fix, ax = plt.subplots()
for spine in ["left", "bottom"]:
    ax.spines[spine].set_position("zero")

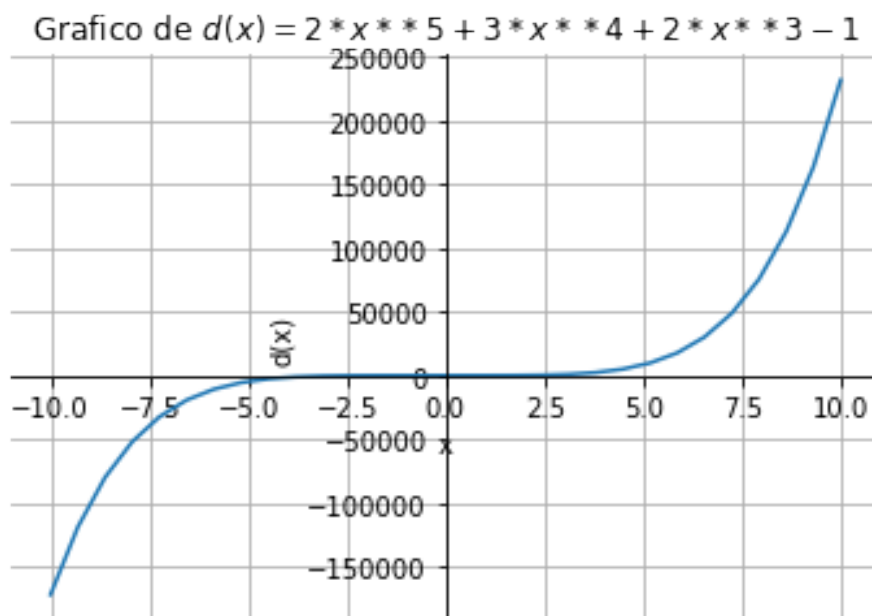
for spine in ["right", "top"]:
    ax.spines[spine].set_color("none")

return ax

x = np.linspace(-10, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, d(x))
plt.title(r"Grafico de $d(x)={2*x**5+3*x**4+2*x**3-1}$")
plt.ylabel('d(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x')
d=(2*x**5+3*x**4+2*x**3-1)
derivada2=Derivative(d,x).doit()
print("d'(x)=",derivada2)

```



$$d'(x) = 10x^4 + 12x^3 + 6x^2$$

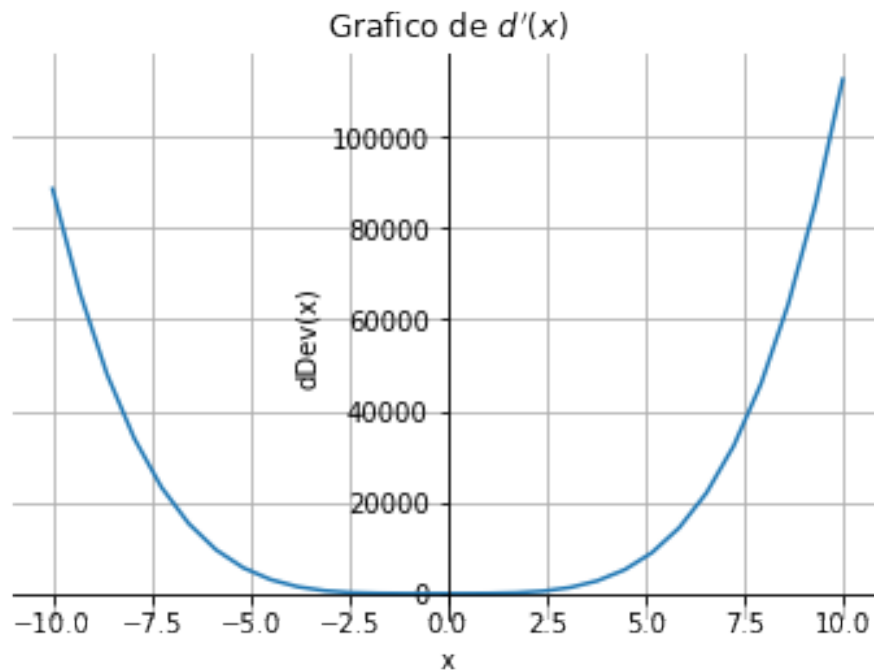
```
[56]: """Una vez sabiendo la derivada de la función  $d'(x)=10x^4 + 12x^3 + 6x^2$ """
import numpy as np
def D(x):
    return (10*x**4 + 12*x**3 + 6*x**2)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor 0 de x para dividir claramente los valores positivos y negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x= np.linspace(-10, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, D(x))
plt.title(r"Grafico de  $d'(x)$ ")
plt.ylabel('dDev(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()
```



```
[63]: """3 ejemplo  $e(x)=(x^3-2x^2+2x-20)/(x^3+2)^2$ """

import numpy as np
def e(x):
    return ((x**3-2*x**2+2*x-20)/(x**3+2)**2)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x = np.linspace(-5, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
```

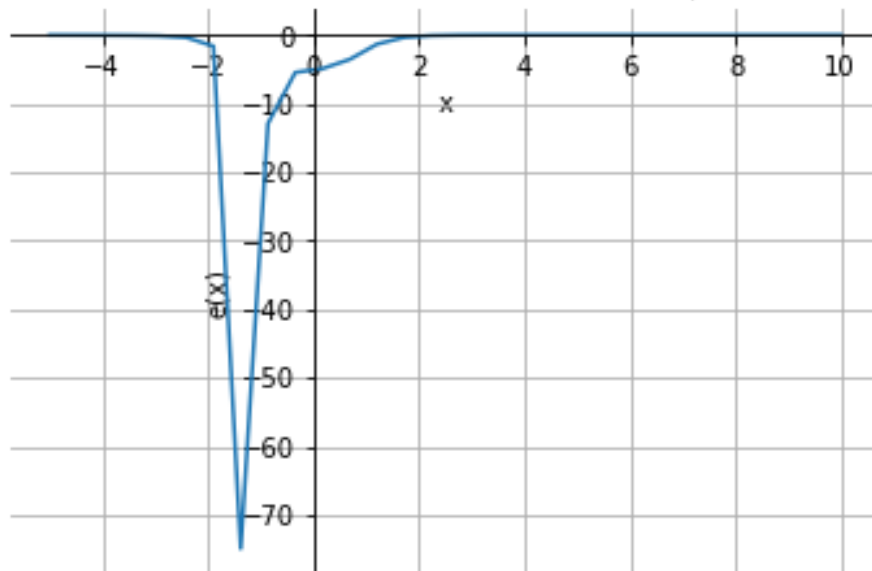
```

ax.plot(x, e(x))
plt.title(r"Grafico de $e(x)={(x**3-2*x**2+2*x-20)/(x**3+2)**2}$")
plt.ylabel('e(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x')
e=(x**3-2*x**2+2*x-20)/(x**3+2)**2
derivada3=Derivative(e,x).doit()
n=simplify(derivada3)
print("e'(x)=",n)

```

Grafico de $e(x) = (x^3 - 2x^2 + 2x - 20)/(x^3 + 2)^2$



$$e'(x) = \frac{(6x^2(-x^3 + 2x^2 - 2x + 20) + (x^3 + 2)(3x^2 - 4x + 2))}{(x^3 + 2)^3}$$

```

[64]: """Sabiendo la derivada de la función e'(x)= (6*x**2*(-x**3 + 2*x**2 - 2*x +
↪20) + (x**3 + 2)*(3*x**2 - 4*x + 2))/(x**3 + 2)**3"""
import numpy as np
def E(x):
    return ((6*x**2*(-x**3 + 2*x**2 - 2*x + 20) + (x**3 + 2)*(3*x**2 - 4*x +
↪2))/(x**3 + 2)**3)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

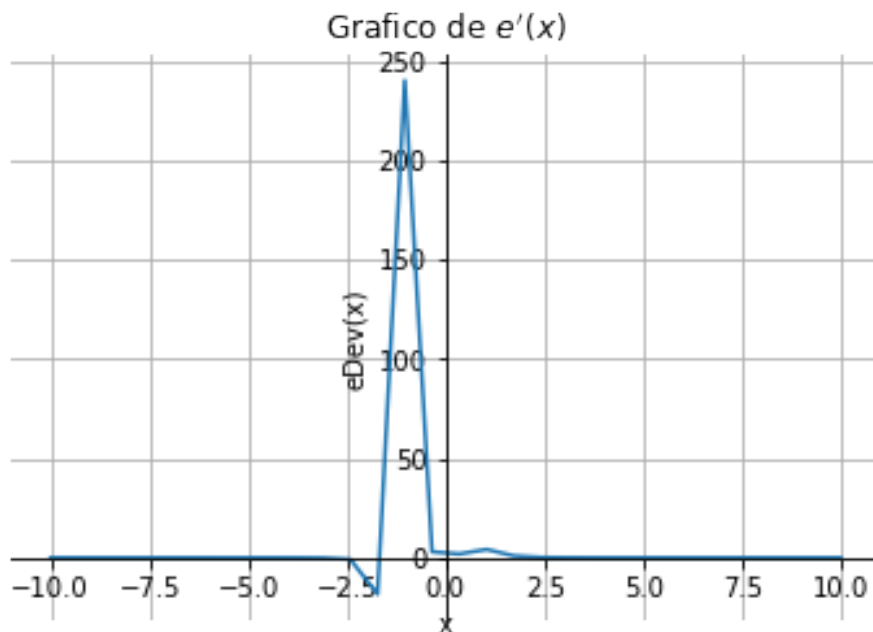
def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x= np.linspace(-10, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, E(x))
plt.title(r"Grafico de $e'(x)$")
plt.ylabel('eDev(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```



```
[93]: """4 ejemplo h(x)= (x)*log((x)*log(x+1))"""
from sympy import log
import numpy as np
def h(x):
    return ((x)*np.log((x)*np.log(x+1)))
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

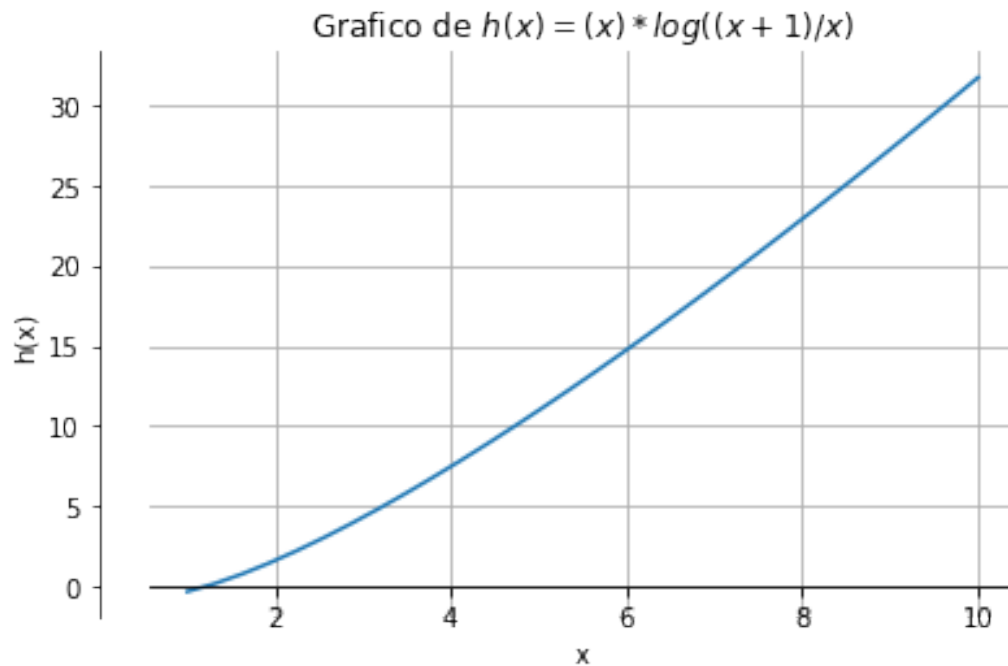
def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x = np.linspace(1, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, h(x))
plt.title(r"Grafico de $h(x)={(x)*log((x+1)/x)}$")
plt.ylabel('h(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x') # Se declara a x como simbolo
h=(x)*log((x)*log(x+1)) # Se pone la función a integrar guardandola en otra
↪variable
dh=Derivative(h,x).doit()# En este caso se ponen los valores de a y b
↪respectivamente
k=simplify(dh)
print("h'(x)=",k)
```



$h'(x) = (x + (x + 1) * \log(x * \log(x + 1)) * \log(x + 1) + (x + 1) * \log(x + 1)) / ((x + 1) * \log(x + 1))$

```
[91]: """Una vez conociendo la derivada de la función la podemos graficar
h'(x)= (x + (x + 1)*log(x*log(x + 1))*log(x + 1) + (x + 1)*log(x + 1))/((x +
↪1)*log(x + 1))"""
import numpy as np
def H(x):
    return ((x/(x + 1) + np.log(x + 1))/np.log(x + 1) + np.log(x*np.log(x + 1)))
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
0 de x para dividir claramente los valores positivos y
negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

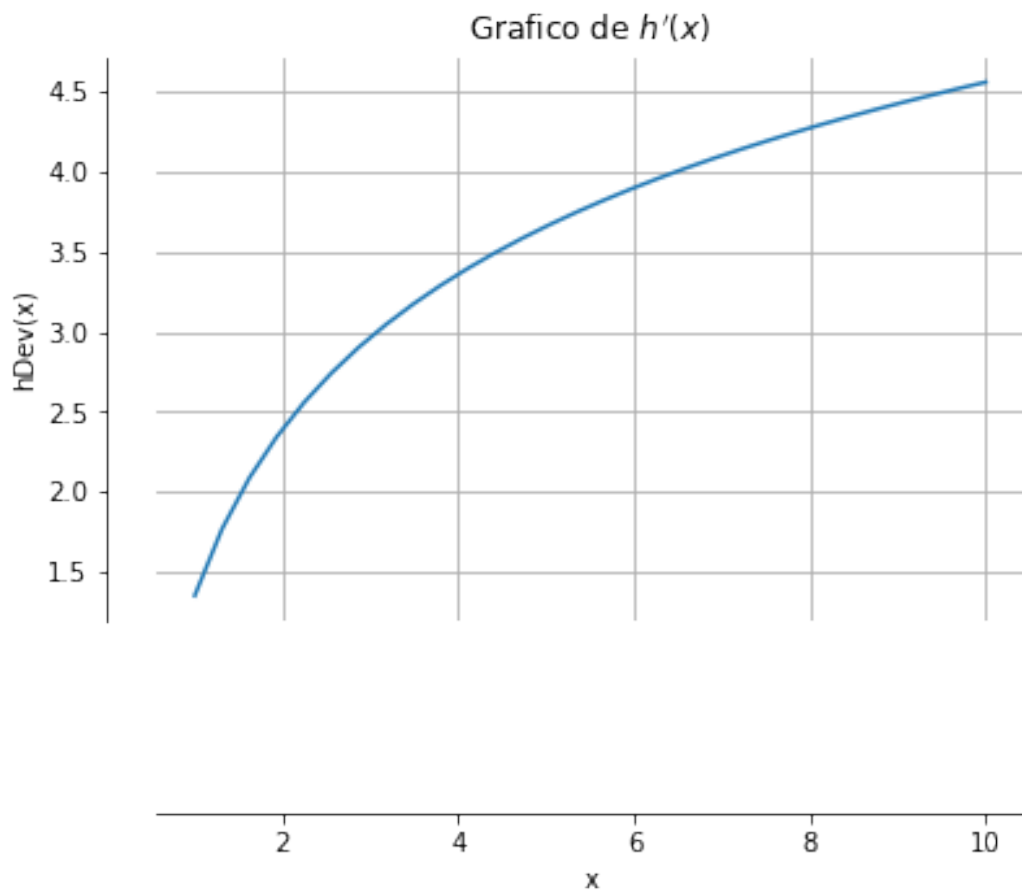
    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax
```

```

x= np.linspace(1, 10, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, H(x))
plt.title(r"Grafico de  $h'(x)$ ")
plt.ylabel('hDev(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```



```

[109]: """5 ejemplo  $l(x)=\exp(2x^5-3x^4+2x^3+1))*(x^2-5x+1)$ """
from sympy import exp

from sympy import log
import numpy as np
def l(x):
    return ((np.exp(2*x**5-3*x**4+2*x**3+1))*(x**2-5*x+1))

```

```

%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

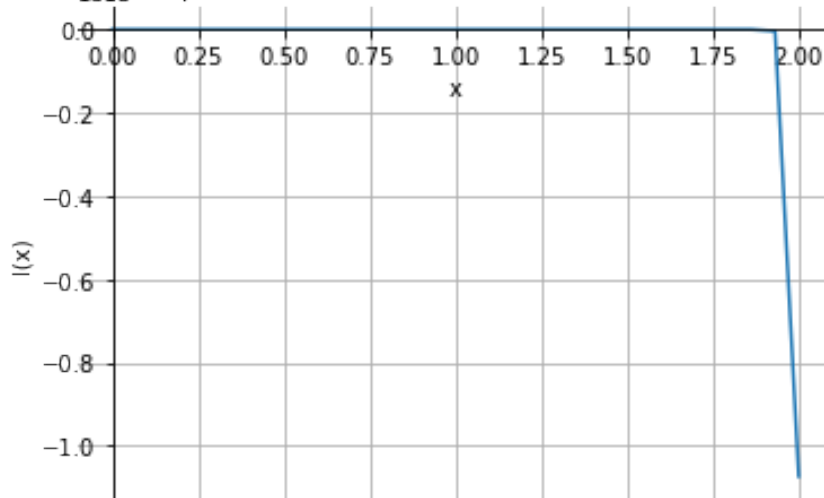
    return ax

x = np.linspace(0, 2, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, l(x))
plt.title(r"Grafico de  $l(x) = \{ \exp(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 1) \} \cdot (x^2 - 5x + 1)$ ")
plt.ylabel('l(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x') # Se declara a x como simbolo
l=((exp(2*x**5-3*x**4+2*x**3+1))*(x**2-5*x+1)) # Se pone la función a integrar
↳ guardandola en otra variable
dh=Derivative(l,x).doit() # En este caso se ponen los valores de a y b
↳ respectivamente
k=simplify(dh)
print("l'(x)=",k)

```

Grafico de $l(x) = \exp(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 1) * (x^2 - 5x + 1)$



$l'(x) = (2x^2(x^2 - 5x + 1)(5x^2 - 6x + 3) + 2x - 5) \exp(2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 1)$

```
[110]: """Una vez conociendo la derivada de la función podemos graficar
l'(x) = (2x**2*(x**2 - 5*x + 1)*(5*x**2 - 6*x + 3) + 2*x - 5)*exp(2*x**5 -
↪ 3*x**4 + 2*x**3 + 1)"""

import numpy as np
def L(x):
    return ((2*x**2*(x**2 - 5*x + 1)*(5*x**2 - 6*x + 3) + 2*x - 5)*np.
    ↪ exp(2*x**5 - 3*x**4 + 2*x**3 + 1))
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta función divide pone al eje y en el valor
0 de x para dividir claramente los valores positivos y
negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

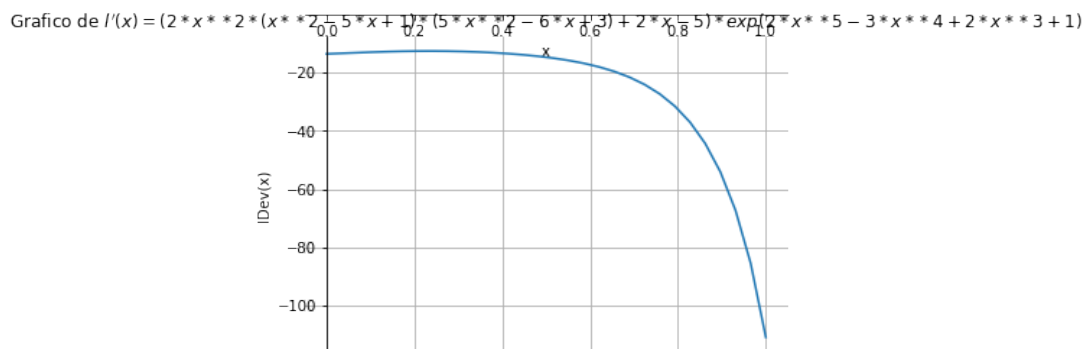
    return ax

x = np.linspace(0, 1, num=30)
```

```

ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, L(x))
plt.title(r"Grafico de $l'(x)= (2*x**2*(x**2 - 5*x + 1)*(5*x**2 - 6*x + 3) + \rightarrow 2*x - 5)*exp(2*x**5 - 3*x**4 + 2*x**3 + 1)$")
plt.ylabel('lDev(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```



[]:

Referencias

- Aleksandrov, A.D., A.N. Kolmogorov y M.A. Lavrent'ev (2015). Mathematics. Its content, methods and meaning. Dover Publications Inc., New York

Capítulo 4

Cálculo Integral

El cálculo integral se ocupa del proceso inverso a la diferenciación. Dada la derivada de una función, se debe encontrar la función original. El cálculo integral también permite encontrar el límite de un tipo especial de suma. Cuando el número de términos en la suma tiende a infinito, podemos calcular el área de una región. En economía, nos permite encontrar la función de costos totales a partir de la función de costo marginal y calcular los excedentes del productor y consumidor como áreas bajo curvas.

4.1. La integral indefinida: la antiderivada

Dada la función f , si F es una función tal que

$$F'(x) = f(x) \tag{4.1}$$

entonces F es la antiderivada de f .

Entonces, una antiderivada de una función es una función tal que:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow dF = f(x)dx \tag{4.2}$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración**.

La integral indefinida:

$$\int f(x)dx$$

donde $f(x)$ es el **integrando** y dx indica la **variable de integración**.

La integral indefinida de cualquier función f con respecto a x se escribe $\int f(x)dx$ y denota la antiderivada más general de f :

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{c} \quad (4.3)$$

donde c es una constante, si y solo si $F'(x) = f(x)$

4.2. Reglas de integración

:

1. $\int kdx = kx + c$, donde k es una constante
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, para $n \neq -1$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ donde k es una constante
5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
6. Regla de la potencia generalizada para integración:

Suponer que u es una función diferenciable de x .

$$\int [u(x)]^n u' dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c \text{ para } n \neq -1$$

$$u' dx = du \Rightarrow \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \text{ para } n \neq -1$$

7. Integración de funciones exponenciales:

Suponer que u es una función diferenciable de x .

$$\int e^u u' dx = e^u + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

8. Integración de funciones logarítmicas:

$$\int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du$$

$$\text{Si } u > 0: \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$$

$$\text{Si } u < 0: \int \frac{1}{u} du = \ln(-u) + c$$

$$\therefore \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

$$\text{Si } u = x \Rightarrow du = dx, \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\text{Recordar que: } \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

9. Regla de integración de a^u .

Sea u una función diferenciable de x :

$$\int a^u du$$

Para encontrar esta integral primero tenemos que pasar a base e :

$$a = e^{\ln a}$$

$$\Rightarrow \int a^u du = \int (e^{\ln a})^u du = \int e^{(\ln a)(u)} du$$

Para encontrar esta última integral aplicamos la regla 7. Siempre tenemos que verificar que se tenga la forma correcta para du .

Falta $\frac{1}{\ln a}$ para poder aplicar la regla 7.

$$\therefore \int e^{(\ln a)(u)} du = \int \frac{\ln a}{\ln a} e^{(\ln a)(u)} du = \frac{1}{\ln a} \int e^{(\ln a)(u)} (\ln a) du = \frac{1}{\ln a} e^{(\ln a)(u)} + c = \frac{1}{\ln a} (e^{\ln a})^u + c = \frac{1}{\ln a} a^u + c$$

Al final sustituimos u por su función para que el resultado quede en términos de x .

4.3. Integración con condiciones iniciales

Las condiciones iniciales nos permiten encontrar una función particular dentro de la familia de funciones a las que se llegan con las integrales indefinidas. Por ejemplo, en economía nos permiten encontrar la función de costos particular.

4.4. Integración por partes

Recordar:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = v(x)u'(x) + u(x)v'(x) \quad (4.4)$$

Si se integran ambos miembros de la ecuación el resultado será:

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \quad (4.5)$$

Al reescribir la ecuación se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (4.6)$$

Si el integrando ocurre en la forma de un producto y no son aplicables las otras reglas de integración, se puede usar la técnica de integración por partes. Pero, primero hay que descartar las otras reglas de integración.

Si se descartan las otras reglas de integración, entonces tenemos que determinar si el integrando tiene la forma: $u(x)v'(x)$. Si se encuentra que sí tiene esa forma, entonces podemos calcular la integral. La clave es si se puede evaluar la integral: $\int v(x)u'(x)dx$

4.5. Integración por fracciones parciales

Las funciones racionales tienen la forma de un cociente de dos polinomios. Existen muchas funciones racionales que no pueden integrarse mediante las reglas de integración. Cuando no se pueden aplicar las reglas de integración, una posibilidad consiste en que la función racional sea expresada otra vez en una forma equivalente. Esta forma equivalente está constituida por más funciones elementales. Entonces, necesitamos descomponer una función racional en sus fracciones parciales.

Proceso de descomponer una función racional en sus **fracciones parciales**:

- Para aplicar este método es preciso que la función racional tenga la forma de una fracción propia.
- **Fracción propia**: si el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador.
- **Fracción impropia**: el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador.
- Las fracciones impropias pueden reducirse a la suma algebraica de un polinomio y una fracción propia al hacer una división larga de las funciones del numerador y el denominador.
- Para descomponer una fracción racional en sus fracciones parciales podemos guiarnos con la siguiente Tabla

4.6. Integral definida

- Visualizar un triángulo formado al trazar una recta ($f(x) = 2x$) partiendo del origen y una línea vertical que salga del

Forma de factor	Forma de la fracción parcial
1. Factor lineal único: $ax + b$	$\frac{A}{ax+b}$, A constante
2. Factor lineal repetido: $(ax + b)^n$	$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
3. Factor cuadrático único: $ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, A y B constantes

valor 1 del eje de las abscisas ($x = 1$) y que corte a la recta.

- El área de este triángulo se puede calcular al dividir el área bajo la recta en rectángulos de igual ancho.
- Conforme dividamos el área en más y más rectángulos, la suma del área de los rectángulos se aproximará al área del rectángulo bajo la recta.

Si A es el área del triángulo que queremos encontrar y $\bar{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son la suma del área de los rectángulos, entonces:

$$\bar{S}_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$$

$$\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$$

$$\bar{S}_n \leq A \leq \underline{S}_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty}^- \bar{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty}^+ \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty}^- \bar{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty}^+ \underline{S}_n = 1$$

Este límite común es la integral definida de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo $(0, 1)$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2x dx = 2 \int_0^1 x dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0 = 1.$$

En el caso de la integral definida, encontramos a los límites de integración, en este caso el 0 y el 1. No es necesario poner la constante porque estamos encontrando integrales definidas en un intervalo.

Definición:

En general, para una función definida sobre el intervalo de $x = a$, $x = b$, donde $a < b$, podemos formar las sumas $\bar{S}_n$ y $\underline{S}_n$ que se obtienen considerando los valores máximo y mínimo respectivamente, en cada uno de n intervalos de igual longitud Δx .

El límite común de $\bar{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \rightarrow \infty$, si este existe, se llama integral definida de f sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \quad (4.7)$$

La integral definida es el límite de la suma $\sum f(x)\Delta x$.

Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow S_n \geq 0 \forall n \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en el intervalo $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (4.8)$$

$F(b) - F(a)$ se abrevia $F(x)|_a^b$

4.6.1. Propiedades de la integral definida

Propiedades:

1. Si f es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces: $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área de la región delimitada por la curva $y = f(x)$, el eje de las x y las líneas $x = a$ $x = b$.
2. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$, donde k es una constante.
3. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$$4. \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

La variable de integración es una variable "muda"; cualquier otra variable produce el mismo resultado, esto es, el mismo número:

$$\int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 t^2 dt$$

5. Si f es continua sobre un intervalo I y $\{a, b, c\} \in I \Rightarrow$:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

4.7. Ejemplos

1.

$$\int (3x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 1)dx$$

Utilizando la regla 5 para integración:

$$\int (3x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 1)dx = \int 3x^3 dx + \int \frac{2}{3}x^2 dx + \int dx$$

Utilizando la regla 4 para integración:

$$= 3 \int x^3 dx + \frac{2}{3} \int x^2 dx + x$$

Integrando por la regla 2:

$$= 3(\frac{1}{3+1}x^{3+1}) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2+1}x^{2+1}) + x + C$$

Reduciendo:

$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^3 + x + C$$

2.

$$\int \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + 5 \right) dx$$

Por la regla 5:

$$= \int \frac{1}{4}x^4 dx - \int 2x^3 dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{2}x dx + \int 5 dx$$

Por la regla 4:

$$= \frac{1}{4} \int x^4 dx - 2 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + \frac{1}{2} \int x dx + 5 \int dx$$

Integrando, por la regla 2:

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4+1} x^{4+1} \right) - 2 \left(\frac{1}{3+1} x^{3+1} \right) - 3 \left(\frac{1}{2+1} x^{2+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1} x^{1+1} \right) + 5x + C$$

Reduciendo:

$$= \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x + C$$

3.

$$\int (-5x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2x + 100) dx$$

Por la regla 5:

$$= \int -5x^4 dx + \int 3x^3 dx + \int 2x^2 dx - \int 2x dx + \int 100 dx$$

Por la regla 4:

$$= -5 \int x^4 dx + 3 \int x^3 + 2 \int x^2 - 2 \int x dx + 100 \int dx$$

Integrando por la regla 2:

$$= -5\left(\frac{1}{4+1}x^{4+1}\right) + 3\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + 2\left(\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right) - 2\left(\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right) + 100x + C$$

Reduciendo:

$$= -x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 100x + C$$

4.

$$\int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} x dx$$

Primero tenemos que reconocer los elementos u , n y du .

$$u = a^2 + b^2 x^2$$

;

$$n = \frac{1}{2}$$

;

$$du = 2b^2 x dx$$

Ahora completamos la integral:

$$= \frac{1}{2b^2} \int (a^2 + b^2 x^2)^{\frac{1}{2}} (2b^2 x dx)$$

Como ya se ha completado la integral, se procede a realizar el cambio de variable como u :

$$= \frac{1}{2b^2} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

Por la regla 2, se procede a integrar:

$$= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} \right) + C$$

Reduciendo:

$$= \frac{1}{3b^2} u^{\frac{3}{2}} + C$$

Regresando la variable u a su forma original:

$$= \frac{(a^2 + b^2 x^2)^{3/2}}{3b^2} + C$$

La respuesta final siempre debe de estar en términos de la variable independiente, en este caso x .

5.

$$\int (x^3 - 2)^3 x^2 dx$$

Se reconocen las variables u , n y du , donde u es igual a la expresión algebraica dentro del paréntesis y elevada a la potencia $n = 3$. Entonces, tenemos:

$$u = x^3 - 2; n = 3; \Rightarrow du = 3x^2.$$

Observamos que nos falta un 3 para poder aplicar la regla de la potencia generalizada, número 6 en este cuaderno. Para introducir un 3 en la integral añadimos un uno: $1 = \frac{3}{3}$. De esta forma no alteramos la expresión.

Completamos la integral introduciendo el uno que definimos arriba:

$$= \int \frac{3}{3}(x^3 - 2)^3 x^2 dx$$

Únicamente necesitamos el 3 dentro de la integral, así que separamos el uno en $3(\frac{1}{3})$ y dejamos dentro de la integral el 3 y afuera el $\frac{1}{3}$. Como $\frac{1}{3}$ es una constante podemos aplicar la regla 4 que dice: $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$ donde k es una constante. De este modo, obtenemos:

$$= \frac{1}{3} \int (x^3 - 2)^3 3x^2 dx$$

Ya completada la integral, se procede a aplicar la regla 6, reescribiendo la integral en términos de la variable u (cambio de variable):

$$= \frac{1}{3} \int u^3 du$$

Procedemos a integrar:

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3+1} u^{3+1} \right) + C = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} u^4 \right) + C$$

Continuamos:

$$= \frac{1}{12} u^4 + C$$

Para obtener la respuesta final reescribimos el resultado en términos de x :

$$= \frac{1}{12}(x^3 - 2)^4 + C$$

6.

$$\int (6 - 3x^2)^{-1/4} 2x dx$$

Por la regla 4, sacamos la constante de la integral: y obtenemos:

$$\int (6 - 3x^2)^{-1/4} 2x dx = 2 \int (6 - 3x^2)^{-1/4} x dx$$

Observamos que tenemos una función de x elevada a una potencia y multiplicada por otra función de x por lo que la integral es candidata para aplicar la regla 6. Para ello determinamos u , n y du , recordando que u es la expresión que está dentro del paréntesis y elevada a la potencia. Entonces, tenemos:

$$u = 6 - 3x^2; n = -1/4; \Rightarrow du = -6x dx$$

Notamos que nos faltaría un 6 para completar la expresión que nos permita aplicar la regla 6. Entonces introducimos el 6 introduciendo un uno: $1 = \frac{-6}{-6}$ para no modificar la expresión.

$$= 2 \left(\frac{-6}{-6} \right) \int \frac{6}{6} (6 - 3x^2)^{-1/4} x dx$$

Como solo necesitamos el 6 para completar la integral y poder aplicar la regla 6, separamos el uno en $\frac{1}{-6}(-6)$. Dejamos dentro de la integral el -6 y sacamos la constante $\frac{1}{-6}$ aplicando la regla 4. Así obtenemos:

$$= 2\left(\frac{-1}{6}\right) \int (6 - 3x^2)^{-1/4}(-6x)dx$$

Realizamos la operación fuera de la integral, y aplicamos la regla 6 (realizando cambio de variable de x a u):

$$= -\frac{1}{3} \int u^{-1/4} du$$

Integramos aplicando la regla 6:

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\frac{-1}{4} + 1} u^{\frac{-1}{4} + 1} \right) + C$$

Reducimos:

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} u^{3/4} \right) + C = -\frac{4}{9} u^{3/4} + C$$

Para obtener la respuesta final reescribimos lo que obtuvimos en términos de la variable original x :

$$= -\frac{4}{9} (6 - 3x^2)^{3/4} + C$$

7. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-3)}$

Reconocemos que esta es una función racional, más específicamente es una fracción propia. El siguiente paso es identificar el tipo de factor que se encuentra en el denominador. En este caso tenemos dos factores lineales únicos. Entonces, de acuerdo a las reglas de integración por fracciones parciales, la fracción propia es $\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$. El siguiente paso es separar la fracción en sus fracciones parciales:

$$\frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

Hacemos la suma, encontrando un común denominador e igualamos ambos lados de la igualdad:

$$\frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+B}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$$

Ordenamos los elementos del numerador para poder comparar ambos lados de la igualdad. Observamos que el coeficiente de x es 0, por lo que $(A+B) = 0$ y el término independiente o constante es 1 por lo que tenemos $(-3A+B) = 1$. Obtenemos una serie de igualdades que organizamos en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + B = 1 \end{cases}$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas A y B . Para resolverlo podemos despejar una variable y sustituir en la otra ecuación. De la primera ecuación se tiene que $A = -B$, entonces sustituimos esta expresión en la segunda ecuación del sistema para tener una ecuación en términos de B :

$$-3(-B) + B = 1 \Rightarrow 3B + B = 1 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

Dado este valor de B , obtenemos $A = -\frac{1}{4}$

Obtenemos:

$$\frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)}$$

Por lo que podemos expresar la integral original en términos de las fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-3)} = \int \left[\frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} \right] dx$$

La integral del lado derecho de la igualdad es la integral de una suma por lo que se puede reescribir siguiendo las reglas de integración como la suma de integrales:

$$\int \left[\frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} \right] dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} dx$$

Observamos que ambas integrales tienen la forma $\int k f(x) dx$ por lo que podemos aplicar la regla 4 que nos dice que podemos sacar la constante de la integral. Aplicando la regla obtenemos:

$$\int \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{(x-3)} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+1)} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x-3)} dx$$

Las integrales obtenidas tienen la forma $\int \frac{1}{u} du$, por lo que aplicamos la regla 8 para resolver.

$$-\frac{1}{4} \int \frac{1}{(x+1)} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x-3)} dx = -\frac{1}{4} \ln|(x+1)| + c_1 + \frac{1}{4} \ln|(x-3)| + c_2 = -\frac{1}{4} \ln|(x+1)| + \frac{1}{4} \ln|(x-3)| + c \text{ donde } c = c_1 + c_2$$

8. $\int \frac{2x-3}{(x+4)(x-1)} dx$

Identificamos que esta función es una función racional, donde el denominador esta compuesto por dos factores lineales no repetidos. En este caso, descomponemos la fracción en la suma de dos fracciones como se detalla a continuación:

$$\frac{2x-3}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$$

Realizamos la suma de fracciones. Para ello encontramos el común denominador $(x+4)(x-1)$. Entonces, tenemos:

$$\frac{2x-3}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} + \frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{Ax-A+Bx+4B}{(x+4)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A+4B)}{(x+4)(x-1)}$$

Los denominadores son iguales en todos los pasos. Como los numeradores tienen que ser también iguales, igualamos:

$2x-3 = (A+B)x + (-A+4B)$. De esta igualdad obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -A + 4B = -3 \end{cases}$$

ya que el coeficiente de x en el lado izquierdo de la igualdad es 2 y el término independiente en ese lado de la igualdad es igual a -3 .

Para resolver este sistema de ecuaciones podemos utilizar el método de sustitución, donde despejamos A de la primera ecuación y sustituimos su valor en la ecuación dos. Así obtenemos una ecuación en términos de B y podemos despejarla y encontrar su valor solución.

Despejando A de la primera ecuación obtenemos: $A + B = 2 \Rightarrow A = 2 - B$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$-A + 4B = -3 \Rightarrow -(2 - B) + 4B = -3 \Rightarrow -2 + B + 4B = -3 \Rightarrow 5B = -3 + 2$$

$$\therefore B = \frac{-1}{5}$$

Para encontrar el valor solución de A , sustituimos el valor de B en la primera ecuación:

$$A + B = 2 \Rightarrow A = 2 - B \Rightarrow A = 2 - \left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{11}{5}$$

Sustituimos los valores de A y B en las fracciones parciales y reescribimos la integral que estamos buscando.

$$\frac{2x-3}{(x+4)(x-1)} = \frac{\frac{11}{5}}{x+4} + \frac{\frac{-1}{5}}{x-1} \Rightarrow \int \frac{2x-3}{(x+4)(x-1)} dx = \int \left[\frac{\frac{11}{5}}{x+4} + \frac{\frac{-1}{5}}{x-1} \right] dx$$

Siguiendo la regla 5 de integración que dice que la integral de una suma es la suma de las integrales obtenemos:

$$\int \left[\frac{\frac{11}{5}}{x+4} + \frac{\frac{-1}{5}}{x-1} \right] dx = \int \frac{\frac{11}{5}}{x+4} dx + \int \frac{\frac{-1}{5}}{x-1} dx$$

Aplicando la regla de integración 4 que dice que la integral

de una constante por una función de la variable es igual a la constante por la integral de la función, es decir podemos "sacar" la constante de la integral, obtenemos:

$$\int \frac{11}{x+4} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx = \frac{11}{5} \int \frac{1}{x+4} dx + \frac{-1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx$$

Observamos y verificamos que podemos aplicar la regla 8 de integración. Aplicando la regla obtenemos:

$$\frac{11}{5} \int \frac{1}{x+4} dx + \frac{-1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{11}{5} [\ln|(x+4)| + c_1] + \frac{-1}{5} [\ln|(x-1)| + c_2] = \frac{11}{5} \ln|(x+4)| + \frac{-1}{5} \ln|(x-1)| + c \text{ donde } c = \frac{11}{5} c_1 + \frac{-1}{5} c_2$$

9. $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x} dx$

Observamos que ésta es una función racional, donde el polinomio del denominador tiene una potencia de mayor grado que el numerador, por lo tanto es una fracción propia. Para encontrar la integral habrá que integrar por fracciones parciales. El primer paso es factorizar completamente el denominador y observar la forma de los factores.

Factorizamos el denominador:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) \text{ factorizando por factor común } x$$

$$x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1) \text{ factorizando la expresión al cuadrado.}$$

$$\therefore \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x} = \frac{3x^2+2x-2}{x(x+2)(x-1)}$$

La expresión obtenida al factorizar está compuesta por tres factores lineales no repetidos. Así que determinamos la forma de las fracciones parciales de acuerdo a este tipo de factores.

$$\frac{3x^2+2x-2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-1)}$$

Recordar que en la suma del lado derecho de la igualdad tenemos tres elementos porque el denominador se factorizó en tres factores lineales.

El siguiente paso es resolver la suma del lado derecho de la igualdad anterior e igualar los numeradores. Para realizar la suma debemos encontrar un común denominador que es la multiplicación de los factores. Realizando la suma obtenemos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-1)} = \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$$

Realizamos las operaciones, desarrollamos y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)} &= \frac{Ax(x-1)+2A(x-1)+Bx_2-Bx+Cx_2+2Cx}{x(x+2)(x-1)} = \\ \frac{Ax_2-Ax+2Ax-2A+Bx_2-Bx+Cx_2+2Cx}{x(x+2)(x-1)} &= \frac{Ax_2+Ax-2A+Bx_2-Bx+Cx_2+2Cx}{x(x+2)(x-1)} \end{aligned}$$

Ordenamos los elementos del numerador para igualar:

$$\frac{Ax_2+Ax-2A+Bx_2-Bx+Cx_2+2Cx}{x(x+2)(x-1)} = (A+B+C)x_2 + (A-B+2C)x - 2A$$

Igualamos los denominadores:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{(A+B+C)x_2+(A-B+2C)x-2A}{x(x+2)(x-1)}$$

Al igualar obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A+B+C=3 \\ A-B+2C=2 \\ -2A=-2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de A , B y C que serán los numeradores de las fracciones parciales. Para resolver el sistema primer despejamos A de la tercera ecuación:

$$-2A = -2 \Rightarrow A = \frac{-2}{-2} = 1$$

Sustituimos el valor solución de A en la primera y segunda ecuación para obtener ecuaciones de dos incógnitas.

$$A+B+C=3 \Rightarrow 1+B+C=3 \Rightarrow B+C=3-1=2$$

$$A - B + 2C = 2 \Rightarrow 1 - B + 2C = 2 \Rightarrow -B + 2C = 2 - 1 = 1$$

Ahora despejamos B de ambas ecuaciones:

$$B + C = 2 \Rightarrow B = 2 - C$$

$$-B + 2C = 1 \Rightarrow -B = 1 - 2C \Rightarrow B = 2C - 1$$

Igualemos $B = B$

$$2 - C = 2C - 1$$

Reorganizamos los elementos de la igualdad para que de un lado tengamos C y del otro lado de la igualdad números:

$$2 + 1 = 2C + C \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow \frac{3}{3} = C = 1$$

A continuación sustituimos el valor solución de C en algún despeje de B :

$$B = 2 - C = 2 - 1 = 1$$

$\therefore$ la fracción queda descompuesta en tres fracciones parciales de la siguiente forma:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)}$$

Reescribimos la integral original en términos de las fracciones parciales:

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+x^2-2x} dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)} \right] dx$$

Aplicando la regla de integración que dice que la integral de una suma es la suma de las integrales obtenemos:

$$\int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)} \right] dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{(x+2)} dx + \int \frac{1}{(x-1)} dx$$

Aplicando la regla 8, integramos y obtenemos:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{(x+2)} dx + \int \frac{1}{(x-1)} dx = \ln|x| + c_1 + \ln|(x+2)| + c_2 + \ln|(x-1)| + c_3 = \ln|x| + \ln|(x+2)| + \ln|(x-1)| + c$$

donde $c = c_1 + c_2 + c_3$

10. $\int \frac{3x^2}{(x-2)^3} dx$

11. $\int \frac{2}{x^3+x} dx$

12. $\int \frac{x^2+2x+2}{x(x^2+5)} dx$

13. Ejercicios. Encontrar Y dadas las condiciones iniciales

a) $\frac{\partial y}{\partial x} = 5x^2 + 2x + 1; y(0) = 1$

b) $\frac{\partial y}{\partial x} = x(x^2 + 2)^2; y(-2) = 3$

c) $\frac{\partial y}{\partial x} = 2xe^{x^2}; y(3) = 0$

4.8. Ejercicios aplicados a economía

Una de las aplicación en economía es el de poder encontrar la función de costos particular a partir de la función de costos marginales y condiciones iniciales relacionadas a los costos fijos. Recordemos que los costos de una empresa pueden expresarse como $C(q) = C_F + C_V$, donde C_F son costos fijos que pueden ser positivos aun cuando no se produzca alguna unidad, es decir cuando $q = 0$, y C_V son costos variables que son función de q .

La integración indefinida con condiciones iniciales nos puede ayudar a encontrar la función de costos particular al integrar la función de costos marginales y darle un valor a la constante con las condiciones iniciales.

Suponer que un empresario identifica que su función de costos marginales es: $cmg(q) = 0,02q^2 + 0,05q + 20$ y que sus costos fijos son $C_F = 400$. El empresario quiere saber cuánto cuesta producir 100 unidades de su producto, es decir quiere saber a cuánto ascienden sus costos para $q = 100$. Para responderle al empresario primero debemos hallar la función de costos (familia de funciones de costos) integrando la función de costos marginales, luego hallar

la función de costos particular al hallar el valor de la constante c con las condiciones iniciales, y después con la función de costos particular hallar el costo de producir 100 unidades. Comencemos.

$C(q) = \int (0,02q^2 + 0,05q + 20) dq$ y las condiciones iniciales son $C(0) = 400$

Esta es la integral de una suma, por lo que es la suma de las integrales:

$$\int (0,02q^2 + 0,05q + 20) dq = \int 0,02q^2 dq + \int 0,05q dq + \int 20 dq$$

Por la regla 4, sacamos las constantes que multiplican una función de q del integrando :

$$\int 0,02q^2 dq + \int 0,05q dq + \int 20 dq = 0,02 \int q^2 dq + 0,05 \int q dq + 20q + c_3$$

Donde la $\int 20 dq = 20q + c_3$ por la regla 1.

$$\begin{aligned} 0,02 \int q^2 dq + 0,05 \int q dq + 20q + c_3 &= 0,02 \left(\frac{q^{2+1}}{2+1} + c_1 \right) + 0,05 \left(\frac{q^{1+1}}{1+1} + c_2 \right) + 20q + c_3 \\ &= 0,02 \left(\frac{q^3}{3} + c_1 \right) + 0,05 \left(\frac{q^2}{2} + c_2 \right) + 20q + c_3 = \frac{0,02}{3} q^3 + 0,02c_1 + \frac{0,05}{2} q^2 + 0,05c_2 + 20q + c_3 \\ &= \frac{0,02}{3} q^3 + \frac{0,05}{2} q^2 + 20q + c \text{ donde } c = 0,02c_1 + 0,05c_2 + c_3 \end{aligned}$$

Si $C(0) = 400$, entonces:

$$C(0) = \frac{0,02}{3}(0)^3 + \frac{0,05}{2}(0)^2 + 20(0) + c = 400$$

$$C(0) = 0 + 0 + 0 + c = 400 \Rightarrow c = 400$$

$$\therefore C(q) = \frac{0,02}{3} q^3 + \frac{0,05}{2} q^2 + 20q + 400$$

$$\begin{aligned} C(100) &= \frac{0,02}{3}(100)^3 + \frac{0,05}{2}(100)^2 + 20(100) + 400 = \frac{0,02}{3}(1000000) + \frac{0,05}{2}(10000) + 2000 + 400 \\ &= 6666,66667 + 250 + 2000 + 400 = 9316,66667 \end{aligned}$$

Otra aplicación en economía de la integración es el cálculo del excedente del consumidor o productor como la diferencia de áreas bajo curvas. El excedente del consumidor está dado por la diferen-

cia que existe entre el precio que el consumidor estaría dispuesto a pagar por un bien y el precio de equilibrio de mercado de ese bien. Si la diferencia es positiva, entonces habrá un excedente.

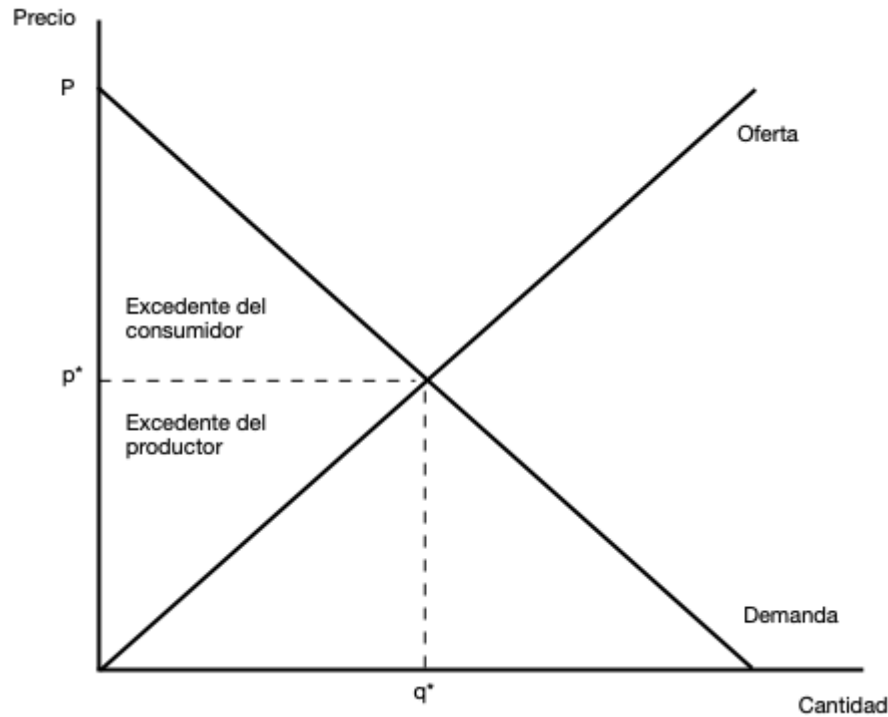


Figura 4.1: Ejemplo de excedentes del consumidor y del productor para funciones de demanda y oferta lineales

Si la función de demanda es lineal, por ejemplo $p(q) = a - \frac{1}{b}q$, entonces el excedente del consumidor será:

$$\text{Excedente consumidor} = \int_0^{q^*} \left(a - \frac{1}{b}t\right) dt - \int_0^{q^*} p^* dt \quad (4.9)$$

donde p^* es el precio de equilibrio y q^* es la cantidad de equilibrio.

Entonces, de acuerdo al Teorema fundamental del cálculo integral tenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^q (a - \frac{1}{b}t) dt - p^*t &= \int_0^q a dt - \int_0^q \frac{1}{b}t dt - p^*t = at|_0^{q^*} - \frac{1}{b} \int_0^q t dt - p^*t = \\ at|_0^{q^*} - \frac{1}{b} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{q^*} - p^*t|_0^{q^*} &= aq^* - \frac{1}{b} \frac{q^{*2}}{2} \Big|_0^{q^*} - p^*t|_0^{q^*} = aq^* - \frac{1}{b} \frac{q^{*2}}{2} - p^*q^* \end{aligned}$$

Si $p^* = 1$, $q^* = 2$, $a = 2$ y $b = 4$, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Excedente consumidor} &= (2)(2) - \frac{1}{4} \frac{(2)^2}{2} - (1)(2) = 4 - \frac{1}{4}(2) - 2 = \\ 4 - \frac{1}{2} - 2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4.9. Ejemplos en Python

INTEGRALES 2 INDEF

September 7, 2021

```
[4]: """
    INTEGRALES INDEFINIDAS
    Dr. Martha Gabriela Alatraste Contreras
    Ingeniero Abisai Israel De La Rosa Gudiño

    A continuación se presenta la solución de algunas integrales indefinidas
    con la finalidad de que el alumno pueda apoyarse de la herramienta para
    hacer la comprobación de sus ejercicios.

    Se menciona que el resultado, no incluye la constante de integración,
    pero el alumno debe saber que la constante está presente.
    @autor:abisai.delarosa
    """

    """1 ejemplo  $f(x)=5x^8+3x^7+2x^5+2x+1$ """
    import numpy as np #importamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
    ↪ mediante ella podremos mandar a llamar a funciones
    # tal como lo veremos después
    """Vamos a empezar a graficar la función"""
    def f(x): # Se define la función
        return (5*x**8+3*x**7+2*x**5+2*x+1) #esta definición nos regresa la función
    ↪ con la que queremos trabajar, en este caso utilizamos
    #la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
    ↪ dependiendo de la función de usa o no
    %matplotlib inline
    import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
    ↪ para iniciar nuestra gráfica

    def move_spines():
        """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
        0 de x para dividir claramente los valores positivos y
        negativos."""
        fig, ax = plt.subplots()
        for spine in ["left", "bottom"]:
            ax.spines[spine].set_position("zero")

        for spine in ["right", "top"]:
            ax.spines[spine].set_color("none")
```

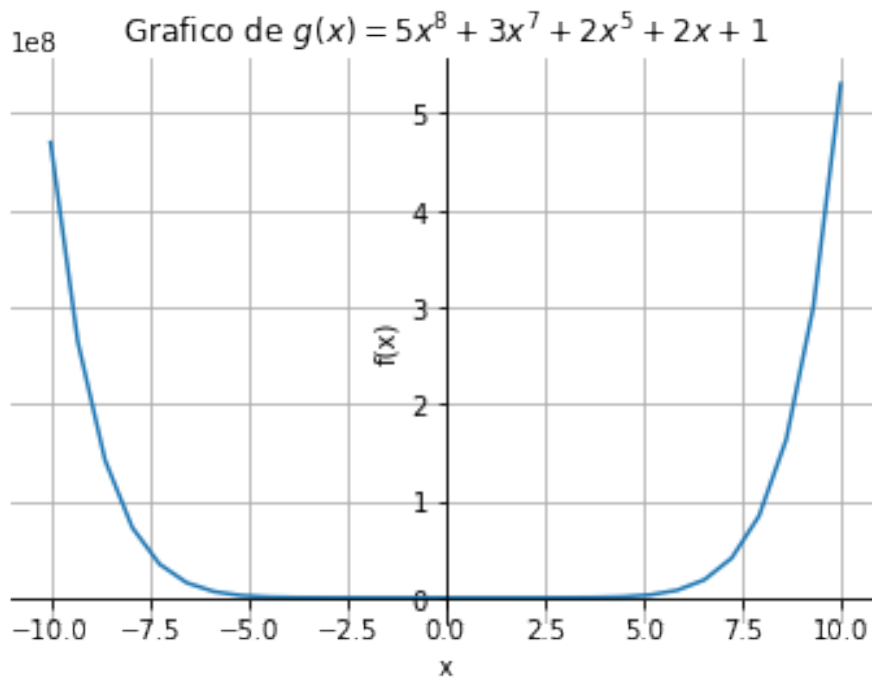
```

    return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(-10, 10, num=30) # Se pone el rango de los valores de las
↳ abscisas, y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳ tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, f(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de $f(x)=5x^8+3x^7+2x^5+2x+1$") #Título de la gráfica
plt.ylabel('f(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

#INTEGRAL DE LA FUNCIÓN
from sympy import Integral, integrate # Necesitamos importar la función
↳ integral llamandola con sympy
from sympy import Symbol # importamos Symbol para poder llamar a la variable
↳ independiente x
x=Symbol('x') # Se declara a x como simbolo
fx = 5*x**8+3*x**7+2*x**5+2*x+1 # Se pone la función a integrar guardandola en
↳ otra variable
dx = Integral(fx, x).doit()# Se utiliza la función integrate que se denotó al
↳ inicio para realizar la integral
print("F(x)=",dx,"+C","Integral de la Función") # Se imprime el resultado

```



$F(x) = 5x^{**9}/9 + 3x^{**8}/8 + x^{**6}/3 + x^{**2} + x + C$ Integral de la Función

```
[9]: """2 ejemplo h(x)=2/x^3+x"""
import numpy as np #importamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
↳ mediante ella podremos mandar a llamar a funciones
# tal como lo veremos después
"""Vamos a empezar a graficar la función"""
def h(x): # Se define la función
    return ((2)/(x**3+x)) #esta definición nos regresa la función con la que
↳ queremos trabajar, en este caso utilizamos
#la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
↳ dependiendo de la función de usa o no
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
↳ para iniciar nuestra gráfica

def move_spines():
    """Esta función divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")
```

```

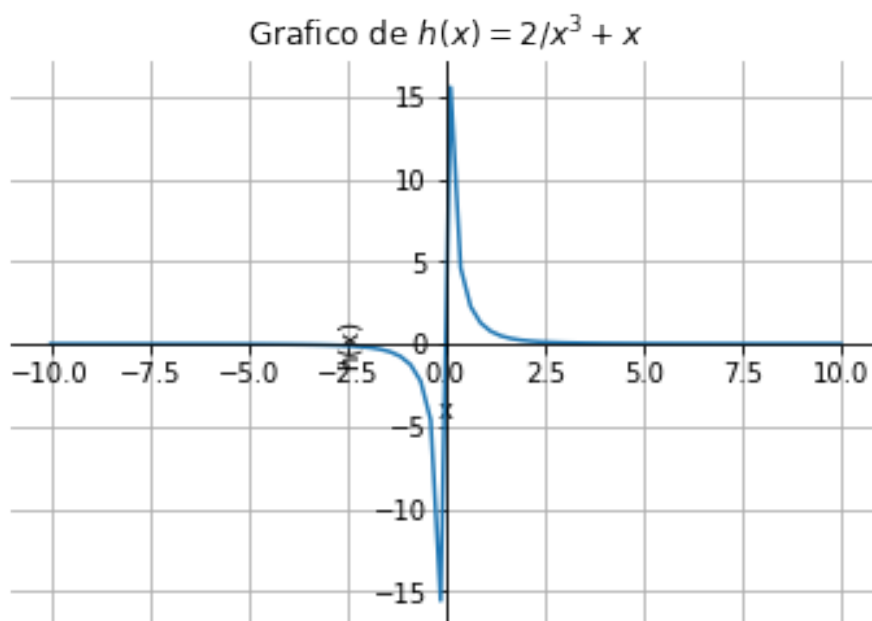
for spine in ["right", "top"]:
    ax.spines[spine].set_color("none")

return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(-10, 10, num=80) # Se pone el rango de los valores de las
↳ abscisas, y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳ tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, h(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de $h(x)=2/x^3+x$") #Título de la gráfica
plt.ylabel('h(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

from sympy import Integral, integrate
from sympy import Symbol
x=Symbol('x')
hx=(2)/(x**3+x)
dx = Integral(hx, x).doit()
print("H(x)=",dx,"+C","Integral de la Función")

```



$H(x) = 2 \cdot \log(x) - \log(x^2 + 1) + C$ Integral de la Función

```
[1]: """3 ejemplo  $g(x)=1/((x+1)^{(x-3)})$ """
import numpy as np #importamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
↳mediante ella podremos mandar a llamar a funcionen
# tal como lo veremos después
"""Vamos a empezar a graficar la función"""
def g(x): # Se define la función
    return (1/((x+1)*(x-3))) #esta definición nos regresa la función con la que
↳queremos trabajar, en este caso utilizamos
#la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
↳dependiendo de la función de usa o no
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
↳para iniciar nuestra gráfica

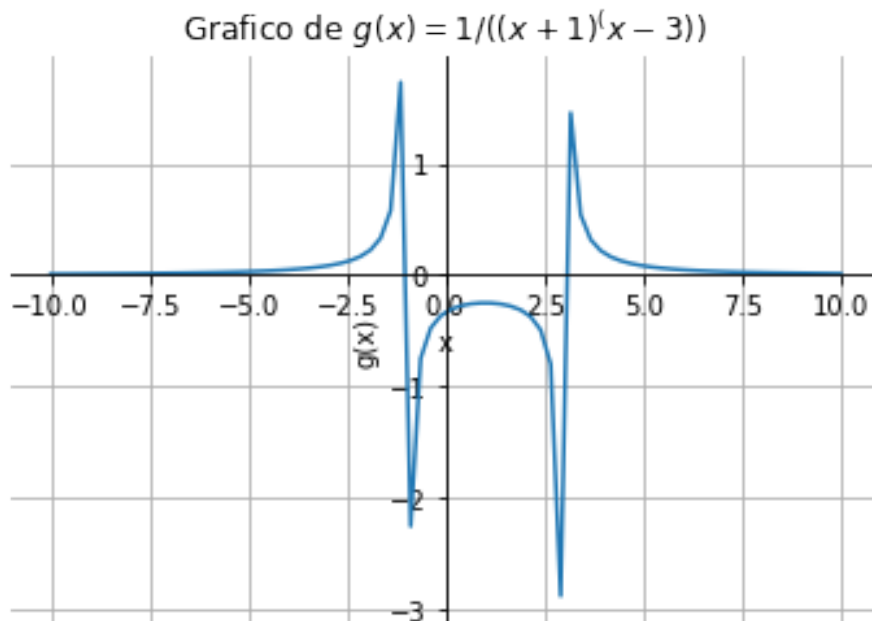
def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fix, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(-10, 10, num=80) # Se pone el rango de los valores de las
↳abscisas,y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, g(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de  $g(x)=1/((x+1)^{(x-3)})$ ") #Título de la gráfica
plt.ylabel('g(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

from sympy import Integral, integrate
from sympy import Symbol
x=Symbol('x')
gx=1/((x+1)*(x-3))
dx = Integral(gx, x).doit()
print("G(x)=",dx,"+C","Integral de la Función")
```



$G(x) = \log(x - 3)/4 - \log(x + 1)/4 + C$ Integral de la Función

```
[3]: """4 ejemplo  $j(x) = (3x^2 + 2x - 2)/(x^3 - x^2 - 2x)$ """
import numpy as np #importamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
↳ mediante ella podremos mandar a llamar a funciones
# tal como lo veremos después
"""Vamos a empezar a graficar la función"""
def j(x): # Se define la función
    return ((3*x**2+2*x-2)/(x**3-x**2-2*x)) #esta definición nos regresa la
↳ función con la que queremos trabajar, en este caso utilizamos
#la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
↳ dependiendo de la función de usa o no
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
↳ para iniciar nuestra gráfica

def move_spines():
    """Esta función divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
```

```

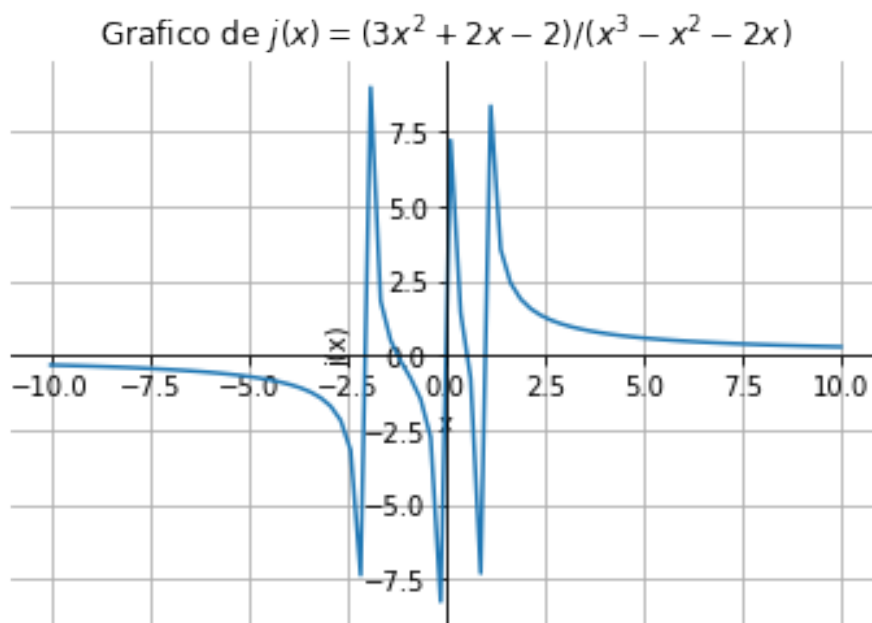
ax.spines[spine].set_color("none")

return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(-10, 10, num=80) # Se pone el rango de los valores de las
↳ abscisas, y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳ tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, j(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de $j(x)=(3x^2+2x-2)/(x^3-x^2-2x)$") #Título de la gráfica
plt.ylabel('j(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

from sympy import Integral, integrate
from sympy import Symbol
x=Symbol('x')
jx=(3*x**2+2*x-2)/(x**3+x**2-2*x)
dx = Integral(jx, x).doit()
print("J(x)=",dx,"+C","Integral de la Función")

```



$J(x) = \log(x^3 + x^2 - 2x) + C$ Integral de la Función

```
[5]: """5 ejemplo  $j(x)=(x^2+2x+2)/(x(x^2+5))$ """
import numpy as np #importamos la libreria numpy y la abreviamos como np,
↳mediante ella podremos mandar a llamar a funciones
# tal como lo veremos después
"""Vamos a empezar a graficar la función"""
def p(x): # Se define la función
    return ((x**2+2*x+2)/(x*(x**2+5))) #esta definición nos regresa la función
↳con la que queremos trabajar, en este caso utilizamos
#la función np.sqrt debido a que nuestra función es una raíz cuadrada,
↳dependiendo de la función de usa o no
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt #vamos a importar la libreria matplotlib.pyplot
↳para iniciar nuestra gráfica

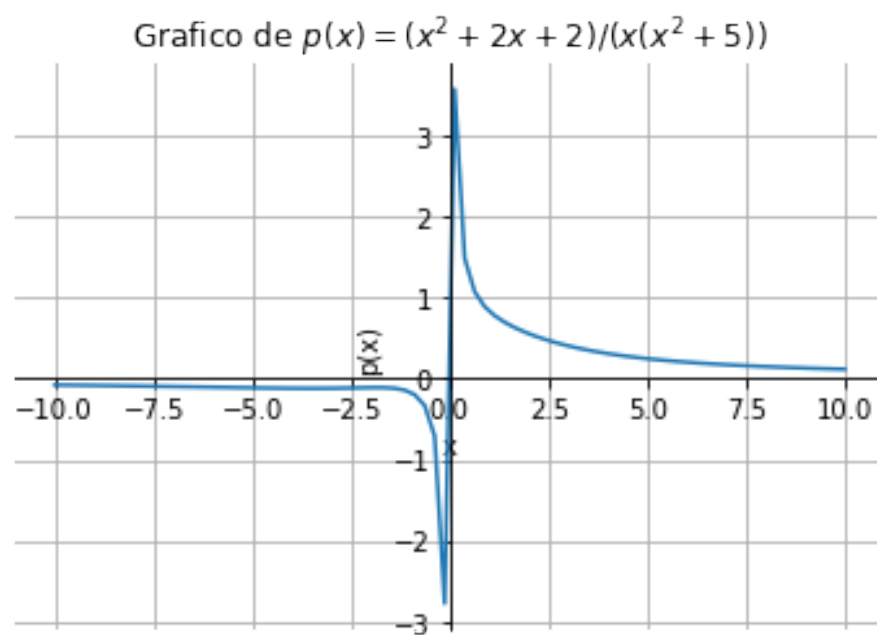
def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax #Se regresa el arreglo ax para poder mapear la gráfica

x = np.linspace(-10, 10, num=80) # Se pone el rango de los valores de las
↳abscisas,y la resolución de la gráfica conse
#cutivamente, en el rango cabe aclarar que el alumno es libre de escoger,
↳tomando en cuenta las discontinuidades en
#la función; es por ello la importancia el tema de límites
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, p(x)) #mapeamos a la función con el arreglo
plt.title(r"Grafico de  $p(x)=(x^2+2x+2)/(x(x^2+5))$ ") #Título de la gráfica
plt.ylabel('p(x)') #Nombre del eje de las ordenadas
plt.xlabel('x') # Nombre del eje de las abscisas
plt.show()# Mandamos a mostrar la gráfica.

from sympy import Integral, integrate
from sympy import Symbol
x=Symbol('x')
px= (x**2+2*x+2)/(x*(x**2+5))
dx = Integral(px, x).doit()
print("P(x)=",dx,"+C","Integral de la Función")
```



$$P(x) = \frac{2 \log(x)}{5} + \frac{3 \log(x^2 + 5)}{10} + \frac{2 \sqrt{5} \operatorname{atan}(\sqrt{5} x / 5)}{5} + C$$
 Integral de la Función

[]:

Capítulo 5

Optimización

En la formulación de un **problema de optimización**, primero debe definirse una **función objetivo**, en la cual la **variable dependiente** representa el objeto a optimizar. Al optimizar maximizamos o minimizamos. El conjunto de **variables independientes** indica los objetos cuyas magnitudes se pueden elegir para la optimización, son las **variables de elección** o de ajuste. El objeto del **proceso de optimización** es encontrar el conjunto de valores de las variables de elección que proporcionan el óptimo deseado. Al optimizar encontramos valores óptimos y valores extremos: máximos o mínimos.

Puntos críticos

Para localizar los **extremos** de una función, primero se encuentran los **valores críticos** y luego se examina si son extremos. Un **punto crítico** es un punto para el cual las derivadas parciales de primer orden son iguales a cero. Si $f(x, y)$, entonces un punto (x_0, y_0) para el cual $f_x = f_y = 0$ es un **punto crítico** de f . Un **punto crítico** puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de estos. Entonces, un **punto crítico** es sólo un candidato para ser extremo relativo.

De esta forma, todos los **extremos relativos** son puntos críticos

pero no todos los **puntos críticos** son extremos relativos.

Determinación de puntos críticos

Regla 1 5.0.1 Si $z = f(x, y)$ tiene un máximo o mínimo relativo en (x_0, y_0) , y si f_x y f_y están definidas para todo punto cercano a (x_0, y_0) , es necesario que (x_0, y_0) sea una **solución del siguiente sistema**:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1. Determinación de extremos relativos

Regla 2 5.1.1 Prueba de la derivada de segundo orden para funciones de dos variables: Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas f_{xx} , f_{yy} y f_{xy} en todo punto (x, y) cercano a punto crítico (x_0, y_0) . Sea D la función definida por:

$$D(x, y) = f_{xx} * f_{yy} - (f_{xy})^2 \quad (5.2)$$

Entonces,

- a) Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx} < 0$, entonces la función f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) .
- b) Si $D(x_0, y_0) > 0$ y $f_{xx} > 0$, entonces la función f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) .
- c) Si $D(x_0, y_0) < 0$, entonces la función f no tiene algún extremo relativo en (x_0, y_0) .
- d) Si $D(x_0, y_0) = 0$, entonces no se puede extraer alguna conclusión con respecto a extremos relativos.

donde $D(x_0, y_0)$ es la evaluación de la función D en cada punto crítico.

5.2. Aplicaciones en economía

Aplicaciones de optimización (sin restricción) de funciones de dos variables incluyen:

- Maximización de la producción
- Maximización del beneficio

En la aplicación de la maximización de la producción, el productor, dueño de la empresa debe elegir las cantidades de factores de producción que arrojen la mayor cantidad de producto. El problema dependerá de la función de producción y de los supuestos que se hagan. En teoría económica se suele asumir que la producción de un producto se da combinando dos factores de producción: capital (K) y trabajo (L). Ambos factores se pueden combinar asumiendo que son sustitutos o complementos. De acuerdo a estos supuestos es que se escoge el tipo de regla para la función de producción. Si son sustitutos perfectos podríamos asumir que la producción de un producto tiene la forma $Y = K + L$. Si, de lo contrario, asumimos que son complementos, podríamos asumir que la función de producción tiene la forma: $Y = K^\alpha L^\beta$. Lo que sigue en cualquiera de los casos es encontrar las derivadas parciales con respecto a cada factor y resolver el sistema de las derivadas igual a cero.

En la aplicación de la maximización del beneficio es útil recordar que un productor calcula su beneficio como $\pi = i - c$, donde π son los beneficios, i son los ingresos y c son los costos totales. También recordemos que el ingreso se calcula como $i = pq$, precio del producto por la cantidad de productos vendidos.

Para introducir el tema de optimización de funciones de n variables, se utilizan algunos conceptos y objetos del álgebra lineal, en particular del álgebra matricial. Por lo tanto, se sugiere revisar la sección 5 del cuaderno de álgebra lineal.

5.3. Optimización de funciones de n variables

Condiciones para extremos relativos para funciones de $n > 2$ variables:

Una función $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene un máximo relativo en $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, suficientemente cercanos a $(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Condiciones para extremos relativos para funciones de $n > 2$ variables:

Una función $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene un mínimo relativo en $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, suficientemente cercanos a $(a_1, a_2, \dots, a_n)$:

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

5.3.1. Condiciones necesarias para extremos relativos

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta f}{\delta x_n} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se encuentran los **puntos críticos** que son candidatos a ser extremos relativos.

5.3.2. Condiciones suficientes para extremos relativos

Las condiciones suficientes hacen uso de las derivadas parciales de segundo orden arregladas en una matriz Hessiana.

La **matriz Hessiana**:

$$H_{n,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} & \cdots & f_{x_1,x_n} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} & \cdots & f_{x_2,x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n,x_1} & f_{x_n,x_2} & \cdots & f_{x_n,x_n} \end{pmatrix}$$

La Matriz Hessiana

- La matriz Hessiana es **cuadrada** y de dimensión n .
- Su diagonal principal está constituida por las derivadas parciales de segundo orden puras.
- Los elementos no diagonales son derivadas parciales de segundo orden mixtas.
- La matriz es **simétrica** alrededor de la diagonal principal.
- Para la matriz Hessiana se identifica un conjunto de **submatrices**, empezando por una submatriz de dimensión 1×1 correspondiente al elemento $(1, 1)$ de la matriz Hessiana.
- Las submatrices son las siguientes:

$$H_1 = (f_{x_1,x_1})$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f_{x_1,x_2} & f_{x_1,x_3} \\ f_{x_2,x_1} & f_{x_2,x_2} & f_{x_2,x_3} \\ f_{x_3,x_1} & f_{x_3,x_2} & f_{x_3,x_3} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$H_n = H = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1} & f_{x_1, x_2} & \cdots & f_{x_1, x_n} \\ f_{x_2, x_1} & f_{x_2, x_2} & \cdots & f_{x_2, x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n, x_1} & f_{x_n, x_2} & \cdots & f_{x_n, x_n} \end{pmatrix}$$

Menores principales

Los **determinantes** de estas submatrices reciben el nombre de **menores principales** de H .

$$\Delta_1 = |H_1|$$

$$\Delta_2 = |H_2|$$

$$\Delta_3 = |H_3|$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = |H_n| = |H|$$

Condición suficiente de extremos relativos:

Si se tienen los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, \dots, x_n = a_n$, para los cuales $f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = \dots, f_{x_n} = 0$, y todas las derivadas de segundo orden son continuas:

1. Existe un **máximo relativo** si los menores principales, evaluados en los valores críticos, **se alternan en el signo**, con los menores principales negativos de número impar y con los positivos de número par:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$$
2. Existe un **mínimo relativo** si todos los menores principales, evaluados en los valores críticos, **son positivos**:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots$$

3. Si no cumple alguna de las dos primeras condiciones, no podrá extraerse conclusion alguna con respecto a extremos relativos.

5.4. Optimización sujeta a restricción lineal

5.4.1. Optimización de una función de dos variables sujeta a restricción lineal

Método del multiplicador de Lagrange (restricción de igualdad)

Problema de optimización:

$$\begin{cases} \max Y = f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2) = k \end{cases} \quad (5.4)$$

o

$$\begin{cases} \min Y = f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2) = k \end{cases} \quad (5.5)$$

donde $Y = f(x_1, x_2)$ es la función objetivo y $g(x_1, x_2) =$ es la restricción de igualdad

$$\begin{cases} \max Y = f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2) = k \end{cases} \quad (5.6)$$

Función lagrangiana:

$$\mathfrak{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - k]$$

donde $f(x_1, x_2)$ es la función objetivo y λ es el múltiplo lineal de la restricción.

La variable λ se llama **multiplicador de Lagrange**

Condiciones necesarias para los extremos relativos

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x_2} = 0 \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para x_1, x_2 .

Condiciones suficientes para los extremos relativos:

Para estimar el comportamiento de $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \lambda)$ en cualquier valor crítico, deberá determinarse la **matriz Hessiana acotada** H_B :

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta g}{\delta x_2} \\ \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 x_2} \\ \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2} \end{pmatrix}$$

Dados los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \lambda = \lambda^*$, para los cuales $\mathfrak{L}_{x_1}, \mathfrak{L}_{x_2}, \mathfrak{L}_\lambda = 0$, el determinante de H_B denotado como Δ_B se evalúa en los valores críticos. Entonces:

1. Existe un máximo relativo si $\Delta_B > 0$.
2. Existe un mínimo relativo si $\Delta_B < 0$.

Optimización de una función de n variables sujeta a restricción lineal

$$\begin{cases} \max(\min) Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = k \end{cases} \quad (5.8)$$

Función Lagrangiana:

$$\mathfrak{L}(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, \dots, x_n) - k]$$

Condiciones necesarias para los extremos relativos

$$\begin{cases} \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x_1} = 0 \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta x_n} = 0 \\ \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \lambda} = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Condiciones suficiente para los extremos relativos:

Para estimar el comportamiento de $\mathfrak{L}(x_1, x_2, \lambda)$ en cualquier valor crítico, deberá determinarse la **matriz Hessiana acotada** H_B :

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta g}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta g}{\delta x_n} \\ \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 \delta x_n} \\ \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2} & \cdots & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 \delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta g}{\delta x_n} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_n \delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_n \delta x_2} & \cdots & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_n^2} \end{pmatrix}$$

Definimos submatrices y menores principales:

$$H_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta g}{\delta x_2} \\ \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 \delta x_2} \\ \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 \delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{B_2} = |H_{B_2}| = [(0)(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2}) + (\frac{\delta g}{\delta x_1})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 x_2})(\frac{\delta g}{\delta x_2}) + (\frac{\delta g}{\delta x_2})(\frac{\delta g}{\delta x_1})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 x_1})] -$$

$$[(\frac{\delta g}{\delta x_2})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2})(\frac{\delta g}{\delta x_2}) + (0)(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 x_2})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 x_1}) + (\frac{\delta g}{\delta x_1})(\frac{\delta g}{\delta x_1})(\frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2})]$$

$$H_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta g}{\delta x_3} \\ \frac{\delta g}{\delta x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1^2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_1 x_3} \\ \frac{\delta g}{\delta x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2^2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_2 x_3} \\ \frac{\delta g}{\delta x_3} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_3 x_1} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_3 x_2} & \frac{\delta^2 \mathfrak{L}}{\delta x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{B_3} = |H_{B_3}|$$

⋮

$$H_{B_n} = H_B \Rightarrow \Delta_{B_n} = |H_B|$$

Condiciones suficientes para los extremos relativos:

Dados los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n, \lambda = \lambda^*$, para los cuales $\mathfrak{L}_{x_1}, \mathfrak{L}_{x_2}, \dots, \mathfrak{L}_{x_n}, \mathfrak{L}_\lambda = 0$, todos los menores asociados a H_B se evalúan en los valores críticos.

Entonces:

1. Existe un máximo relativo si: $\Delta_{B_2} > 0, \Delta_{B_3} < 0, \Delta_{B_4} > 0, \dots$
2. Existe un mínimo relativo si: $\Delta_{B_2} < 0, \Delta_{B_3} < 0, \Delta_{B_4} < 0, \dots$
 $\Leftrightarrow$ los signos de todos los menores principales acotados son negativos.

Interpretación de λ

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta k} = \lambda$$

λ puede interpretarse como la tasa instantánea de cambio en el valor de la función Lagrangiana respecto del que se opera en la constante k de la ecuación de restricción.

El valor de λ^* en la solución óptima indica que si la constante k aumenta o disminuye en una unidad el valor óptimo de $f(x_1, x_2, x_3)$.

5.4.2. Aplicaciones en economía

- El problema del consumidor de la teoría macroeconómica se modela de forma abstracta como un problema de maximización.
- El problema del consumidor consiste en escoger una canasta de bienes que maximice su utilidad según sus preferencias y dado un conjunto presupuestario que indica que el consumidor no puede gastar en su consumo más de lo que tiene.
- El problema del consumidor se puede expresar cómo un problema de maximización de utilidad donde la función de utilidad, $u(x)$ es continua.

Por ejemplo, el problema del consumidor de escoger la canasta de consumo que más prefiera dados los precios $p \gg 0$ y el nivel de riqueza $w > 0$ es el siguiente problema de maximización de la utilidad:

$$\begin{cases} \max u(x) \\ \text{s.a } px = w \end{cases} \quad (5.10)$$

donde x es un vector de variables independientes $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

5.5. Ejemplos

5.5.1. Optimización con restricción. Utilizando el multiplicado de Lagrange.

$$b) \left. \begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + y^2 + x + y \\ s.a(2x + y &= 1) \end{aligned} \right\}$$

Empezamos por escribimos la función Lagrangiana:

$$L(x, y, \lambda) = x^2y + y^2 + x + y - \lambda(2x + y - 1)$$

Por el punto (0.34) del multiplicador de Lagrange:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Determinamos las derivadas parciales:

Planteamos la derivada de L respecto a x :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2y + y^2 + x + y - \lambda(2x + y - 1)]$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2y] + \frac{\partial}{\partial x}[y^2] + \frac{\partial}{\partial x}[x] + \frac{\partial}{\partial x}[y] - \frac{\partial}{\partial x}[\lambda(2x + y - 1)]$$

Utilizando la regla 3 y 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y \frac{\partial}{\partial x}[x^2] + \frac{\partial}{\partial x}[y^2] + \frac{\partial}{\partial x}[x] + \frac{\partial}{\partial x}[y] - \lambda[2 \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial x}(1)]$$

Resolviendo mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy + 1 - 2\lambda$$

Determinamos la derivada parcial de la variable y :

Planteamos la derivada de L respecto a y :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y + y^2 + x + y - \lambda(2x + y - 1)]$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] + \frac{\partial}{\partial y}[y^2] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial y}[y] - \frac{\partial}{\partial y}[\lambda(2x + y - 1)]$$

Utilizando la regla 3 y 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y}[y] + \frac{\partial}{\partial y}[y^2] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial y}[y] - \lambda[2 \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(1)]$$

Resolviendo mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x^2 + 2y - \lambda + 1$$

Determinamos la derivada parcial de la variable λ :

Planteamos la derivada de L respecto a λ :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[x^2y + y^2 + x + y - \lambda(2x + y - 1)]$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[x^2y] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[y^2] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[x] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[y] - \frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda(2x + y - 1)]$$

Utilizando la regla 3 y 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[x^2y] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[y^2] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[x] + \frac{\partial}{\partial \lambda}[y] - (2x + y - 1) \frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda)$$

Resolviendo mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x - y + 1$$

Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 2xy - 2\lambda + 1 = 0 \dots (1) \\ x^2 + 2y - \lambda + 1 = 0 \dots (2) \\ -2x - y + 1 = 0 \dots (3) \end{array} \right\}$$

De la ecuación 3 despejamos y :

$$-2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x + 1 \dots (4)$$

Sustituyendo 4 en la ecuación 1:

$$\begin{aligned} x^2 + 2(-2x + 1) - \lambda + 1 &= 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 - \lambda - 1 = 0 \\ \Rightarrow x^2 - 4x - \lambda - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando λ :

$$\lambda = -x^2 - 4x - 3 \dots (5)$$

Sustituyendo 5 y 4 en la ecuación 1:

$$\begin{aligned} 2x(-2x + 1) - 2(-x^2 - 4x - 3) + 1 &= 0 \Rightarrow -4x^2 + 2x + 2x^2 + \\ 8x + 6 + 1 &= 0 \Rightarrow -2x^2 + 10x + 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - \frac{7}{2} = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo por fórmula general el trinomio cuadrado perfecto:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 5,62 \\ x_2 = -0,62 \end{array} \right\}$$

Sustituyendo cada valor de x en la ecuación 4 y 5:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = -10,24 \\ y_2 = 2,24 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \lambda_1 = -57,06 \\ \lambda_2 = -0,90 \end{array} \right\}$$

Por tanto, tenemos un par de puntos críticos:

$$P_{c1}(5,62, -10,24) \Rightarrow \lambda_1 = -57,06 \quad P_{c2}(-0,62, 2,24) \Rightarrow \lambda_2 = -0,96$$

Obtenemos las segundas derivadas de la función objetivo y las primeras derivadas de la función restricción:

Planteamos la segunda derivada de L respecto a x :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[2xy - 2\lambda + 1]$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[2xy] - \frac{\partial}{\partial x}[2\lambda] + \frac{\partial}{\partial x}[1]$$

Utilizando la regla 3, separamos los valores contantes:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x^2} = 2y \frac{\partial}{\partial x}[x] - 2 \frac{\partial}{\partial x}[\lambda] + \frac{\partial}{\partial x}[1]$$

Resolviendo, mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 x^2} = 2y$$

Obtenemos la segunda derivada de la función objetivo respecto a la variable y :

Planteamos la segunda derivada de L respecto a x :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + 2y - \lambda + 1]$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2] + \frac{\partial}{\partial y}[2y] - \frac{\partial}{\partial y}[\lambda] + \frac{\partial}{\partial y}[1]$$

Utilizando la regla 3, separamos los valores contantes:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2] + 2 \frac{\partial}{\partial y}[y] - \frac{\partial}{\partial y}[\lambda] + \frac{\partial}{\partial y}[1]$$

Resolviendo, mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial^2 y^2} = 2$$

Obtenemos la segunda derivada cruzada:

Planteamos la segunda derivada de L_x respecto a y :

$$L_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y - 1)$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$L_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(1)$$

Utilizando la regla 3, separamos los valores contantes:

$$L_{xy} = 2x \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(1)$$

Resolviendo, mediante la regla 2 de diferenciación:

$$L_{xy} = 2x$$

Obtenemos la primera derivada de la restricción:

Planteamos la derivada de g respecto a x

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + y - 1)$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}(y) - (1)$$

Utilizando la regla 3, separamos los valores contantes:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial x}(y) - (1)$$

Resolviendo, mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2$$

Obtenemos la primera derivada de la restricción de la variable y :

Planteamos la derivada de g con respecto a y :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x + y - 1)$$

De acuerdo a la regla 4 de diferenciación:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) - (1)$$

Utilizando la regla 3, separamos los valores contantes:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) - (1)$$

Resolviendo, mediante la regla 2 de diferenciación:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1$$

Usando la matriz Hessiana que se encuentra en el apartado de optimización:

$$H_b = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2y & 2x \\ 1 & 2x & 2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores del punto crítico:

Para $P_{c1}(5,62, -10,24)$

$$H_{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -20,48 & 11,24 \\ 1 & 11,24 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|H_{b1}| = [(0)(-20,48)(2) + (2)(11,24)(1) + (2)(11,24)(1)] - [(1)(-20,48)(1) + (2)(2)(2) + (11,24)(11,24)(0)]$$

$$|H_{b1}| = (44,96) - (-12,48) = 57,44 > 0$$

Por tanto, existe un máximo relativo en el punto $P(5,62, -10,24)$, este máximo relativo es $z = -223,18$ para una $\lambda^* = -53,06$

Para $P_{c2}(-0,62, 2,24)$

$$H_{b1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4,48 & -1,24 \\ 1 & -1,24 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|H_{b2}| = [(0)(4,48)(2) + (2)(-1,24)(1) + (2)(-1,24)(1)] - [(1)(4,18)(1) + (2)(2)(2) + (-1,24)(-1,24)(0)]$$

$$|H_{b2}| = [-4,96] - (12,48) = -17,44 < 0$$

Por tanto, existe un máximo relativo en $P(-0,62, 2,24)$, este máximo relativo es $z = 7,49$ para una $\lambda^* = -0,96$

5.6. Ejemplos aplicados en economia

Cómo se mencionó en la introducción al cuaderno, el cálculo diferencial es utilizado para resolver el problema de optimización de

los agentes en la economía. La teoría económica asume que los agentes son optimizadores y por lo tanto, para tomar decisiones deben de resolver un problema de optimización. En particular, el problema del consumidor consiste en escoger una canasta de bienes que maximice su utilidad según sus preferencias, las cuales tienen ciertas propiedades matemáticas como convexidad, y dado un conjunto presupuestario que indica que el consumidor no puede gastar en su consumo más de lo que tiene. La solución al problema del consumidor es su demanda. A continuación presentamos un ejemplo.

Suponer que para un consumidor dos bienes de consumo son complementos entre si. Dadas estas preferencias, el este consumidor presenta la función de utilidad: $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$. Si suponemos que la restricción presupuestaria de este consumidor es: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$, donde p_1 es el precio del bien 1, p_2 es el precio del bien 2 y m es la riqueza del consumidor que es exógena en este problema de optimización. La restricción presupuestaria es una recta que resume que el valor de los bienes que consume el consumidor deben de ser iguales a su riqueza. Entonces, el problema de optimización del consumidor es el siguiente:

$$\begin{cases} \max U(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{cases}$$

donde $U(x_1, x_2)$ es la función objetivo y la recta presupuestaria es la restricción de igualdad que es lineal y las variables de ajuste son $\{x_1, x_2\}$.

Para hallar el valor óptimo definimos el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) \quad (5.11)$$

donde λ es una constante.

Las condiciones necesarias o de primer orden para hallar el valor óptimo son las derivadas parciales de la función Lagrangiana con respecto a cada una de sus tres variables y son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = 0 \rightarrow \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_1} \right) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = 0 \rightarrow \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_2} \right) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) = 0 \end{cases}$$

La solución a este sistema de ecuaciones es es punto crítico candidato a extremo relativo. En el ejemplo del programa del consumidor, la solución es la demanda óptima del consumidor. Entonces, procedemos a resolver el sistema.

De las ecuaciones anteriores podemos obtener el valor óptimo de una de las variables, ya que podemos despejar λ de las dos primeras condiciones. Despejamos λ de ambas ecuaciones e igualamos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_1} \right) &= \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_2} \right) \\ \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} / p_1 &= \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} / p_2 \end{aligned}$$

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} / \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5.12)$$

Observar cómo esta última ecuación presenta lo que la Teoría neoclásica del consumidor llama la tasa marginal de sustitución del lado izquierdo de la ecuación y los precios relativos del lado derecho. La tasa marginal de sustitución es el cociente de las utilidades marginales de cada bien. Así la condición necesaria para extremos relativos en este problema del consumidor equivale a la igualdad entre la tasa marginal de sustitución entre los bienes de consumo y los precios relativos.

Para $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ obtenemos:

$$\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} = ax_1^{a-1}x_2^b \quad (5.13)$$

y

$$\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} = x_1^a bx_2^{b-1} \quad (5.14)$$

Por lo tanto:

$$\frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{x_1^a bx_2^{b-1}} = \frac{p_1}{p_2} \quad (5.15)$$

De esta ecuación podemos despejar x_2 para obtener:

$$x_2 = \frac{p_1 bx_1}{p_2 a} \quad (5.16)$$

Para hallar x_1^* , sustituimos el valor de x_2 en la restricción presupuestaria:

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1 bx_1}{p_2 a} = m \quad (5.17)$$

podemos acomodar los términos y obtener:

$$x_1(p_1 + p_2 \frac{p_1 b}{p_2 a}) = m \quad (5.18)$$

Despejando x_1 , obtenemos:

$$x_1^* = \frac{m}{p_1 + \frac{p_1 b}{a}} \quad (5.19)$$

Sustituyendo el valor encontrado para x_1^* encontramos x_2^* .

$$x_2^* = \frac{p_1 b \left(\frac{m}{p_1 + \frac{p_1 b}{a}} \right)}{p_2 a} \quad (5.20)$$

Así, obtenemos la elección óptima o la cesta demandada del consumidor: (x_1^*, x_2^*)

Si queremos encontrar las cantidades demandadas óptimas de cada bien de acuerdo a precios determinados sustituimos en las funciones de demanda de cada bien x_1^*, x_2^* los precios específicos. Por ejemplo, si queremos saber la demanda óptima para los precios $p_1 = 2,5, p_2 = 2$, suponemos que $a = b = 1$:

$$x_1^* = \frac{100}{2,5 + \frac{2,5(1)}{(1)}} = \frac{100}{2,5 + 2,5} = \frac{100}{5} = 20$$

Sustituyendo el valor encontrado para x_1^* encontramos x_2^* .

$$x_2^* = \frac{2,5(1) \left(\frac{100}{2,5 + \frac{2,5(1)}{(1)}} \right)}{2(1)} = \frac{2,5 \left(\frac{100}{2,5 + 2,5} \right)}{2} = \frac{2,5 \left(\frac{100}{5} \right)}{2} = \frac{2,5(20)}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

∴ el consumidor consumirá 20 unidades del bien 1 y 25 del bien 2.

Si ahora las preferencias del consumidor muestran que los bienes son sustitutos, en este caso la función de utilidad tendría la forma: $U(x_1, x_2) = 4x_1 + 2x_2$ con una tasa de sustitución de 2:1.

Si los precios de los bienes son respectivamente 4 y 2, y si el consumidor tiene una riqueza $m = 100$, entonces el problema del consumidor es:

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a } 4x_1 + 2x_2 = 100 \end{cases}$$

En este caso, la función Lagrangiana sería:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + 2x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) \quad (5.21)$$

y las condiciones necesarias o de primer orden serían:

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x_1} = 0 \rightarrow \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_1} \right) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta x_2} = 0 \rightarrow \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} - \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_2} \right) = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta \lambda} = 0 \rightarrow (p_1 x_1 + p_2 x_2 - m) = 0 \end{cases}$$

Despejamos λ de la primera y segunda ecuación e igualamos $\lambda = \lambda$. De la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1} &= \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_1} \right) \\ \frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1}}{\left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_1} \right)} &= \lambda \\ \frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1}}{p_1} &= \lambda \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2} &= \lambda \left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_2} \right) \\ \frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2}}{\left(\frac{\delta(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)}{\delta x_2} \right)} &= \lambda \\ \frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2}}{p_2} &= \lambda \end{aligned}$$

Igualando $\lambda = \lambda$:

$$\frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2}}{p_2}$$

Reorganizamos:

$$\frac{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_1}}{\frac{\delta U(x_1, x_2)}{\delta x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

Sustituyendo para el ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\delta(4x_1 + 2x_2)}{\delta x_1} &= \frac{\delta 4x_1}{\delta x_1} + \frac{\delta 2x_2}{\delta x_1} = 4 \frac{\delta x_1}{\delta x_1} + 2 \frac{\delta x_2}{\delta x_1} = 4(1) + 2(0) = 4 \\ \frac{\delta(4x_1 + 2x_2)}{\delta x_2} &= \frac{\delta 4x_1}{\delta x_2} + \frac{\delta 2x_2}{\delta x_2} = 4 \frac{\delta x_1}{\delta x_2} + 2 \frac{\delta x_2}{\delta x_2} = 4(0) + 2(1) = 2 \end{aligned}$$

Obtuvimos las derivadas parciales aplicando las reglas de diferenciación de la suma, la regla de una constante por una función y la regla de la potencia.

De la tercera ecuación obtenemos:

$$p_1x_1 + p_2x_2 - m = 0 \Rightarrow p_1x_1 + p_2x_2 = m \Rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 100$$

5.7. Ejemplos en Python

Optimización de funciones de una variable 1 ejemplo

August 13, 2021

```
[1]: """Optimización de Funciones de Una Variable
      Dr. Martha Gabriela Alatríste Contreras.
      Ing. Abisai Israel De La Rosa Gudiño.

      Para los siguientes Scripts, se muestra como se puede optimizar o llegar a
      ↪ la conclusión de si una función tiene
      uno o más máximos o mínimos, tomando en cuenta que este script solo se
      ↪ utilizará para funciones polinomiales,
      funciones más comunes en economía, y tomando en cuenta que al llegar a los
      ↪ puntos críticos, estos deben ser reales"""

      """Ejemplo #1  $d(x)=2x^3-2x^2+1$ """

      #Empezamos con la gráfica de la función, esta es opcional y se puede ver la
      ↪ explicación de está en los ejemplos de derivadas
      #Lo único que el estudiante y profesor cambia es la ecuación que desea graficar
      ↪ y el rango de la gráfica
      import numpy as np
      from numpy.polynomial import Polynomial as P
      def d(x):
          return (2*x**3-2*x**2+1) #Aquí se pone la ecuación deseada
      %matplotlib inline
      import matplotlib.pyplot as plt

      def move_spines():
          """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
          0 de x para dividir claramente los valores positivos y
          negativos."""
          fix, ax = plt.subplots()
          for spine in ["left", "bottom"]:
              ax.spines[spine].set_position("zero")

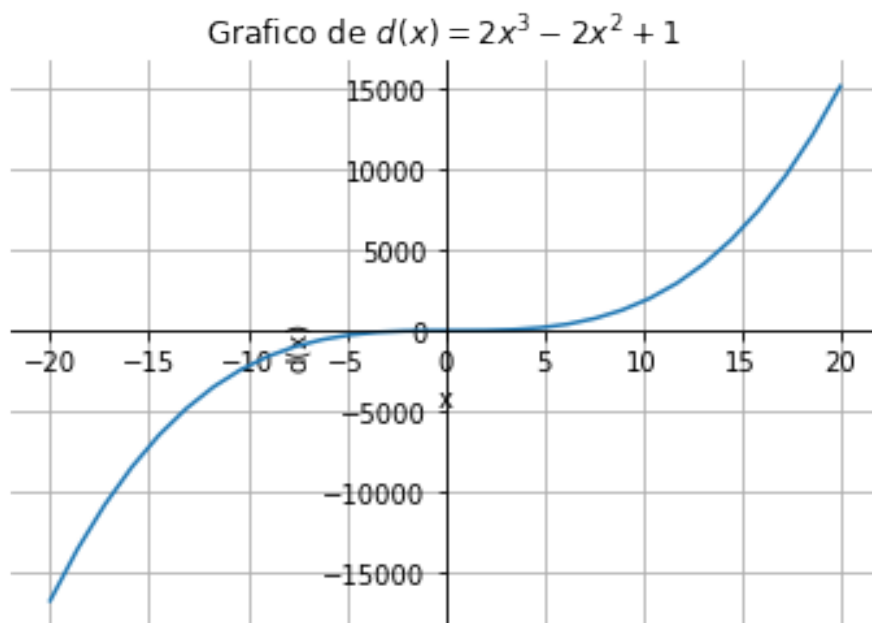
          for spine in ["right", "top"]:
              ax.spines[spine].set_color("none")

          return ax
```

```

x = np.linspace(-20, 20, num=30) #aquí se ajusta el rango de la gráfica y la
    ↪ resolución de la misma
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, d(x))
plt.title(r"Grafico de  $d(x)=\{2x^3-2x^2+1\}$ ") #Se pone el título o la ecuación
    ↪ de la gráfica
plt.ylabel('d(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()

```



```

[1]: """Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""
    #Obtenemos la derivada de la función dada
    #Esta parte ya fue explicada en los scripts de derivadas
    from sympy import Symbol
    from sympy import Derivative, diff, simplify
    x=Symbol('x')
    d=(2*x**3-2*x**2+1)
    derivada2=Derivative(d,x).doit()
    print("d'(x)=",derivada2,"Primera derivada")

```

d'(x)= 6*x**2 - 4*x Primera derivada

```

[11]: """Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""

```

```

import numpy as np #es necesario usar la libreria numpy para poder utilizar la
    ↪función de roots "raices"
coef=[6,-4,0]#Se escriben los coeficiente de las raices con sus signos, aquí el
    ↪alumno solo cambia los coeficeintes
pc=np.roots(coef)#Se procede a sacar las raíces de la variable en donde se
    ↪guardarón los coeficientes
print("El Punto crítico se encuentra en", pc)#Se imprimen las raíces
#Tomar el cuenta que si las reices no son reales, detener el proceso ya que de
    ↪ser así,no se va a poder determinar un máximo o un mínimo

```

El Punto crítico se encuentra en [0.66666667 0.]

```

[12]: """Paso # 3.Obtенemos el criterio de la segunda derivada"""
segf=Derivative(d,x,x).doit()#Utilizamos la misma función para sacar la primera
    ↪derivada, escribiendo la variable a derivar una segunda vez
print("d''(x)=",segf ,"Segunda derivada")#Imprimimos la derivada

```

d''(x)= 4*(3*x - 1) Segunda derivada

```

[14]: """Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos
    ↪de la función, procedemos a verificar con
        los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""
def funcion(x): #definimos una función que contiene la varoiable independiente
    f=(4*(3*x-1)) #Escribimos la segunda derivada
    return (f) #retornamos a esa función
s=funcion(m) #Se sustituye el punto crítico #1 o #2 o #n en la segunda
    ↪derivada, aquí es el orden en que el alumno desee sut.
m=0 #ponemos una ariable guardando ese punto crítico

#Condiciones para determinar si existe un máximo o un mínimo en la función con
    ↪el punto crítico
if s<0: #Se pone la condición de "sí" la sustitución de ese punto crítico en la
    ↪2 derivada es menor a 0
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",m) #Imprimimos
    ↪que la función tiene un máximo en ese punto crít.
elif s>0:# "Sí" la sut. de ese punto crítico en la 2 derivada es mayor a 0
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc="m)#Imprimimos
    ↪que la función tiene un mínimo en ese punto crít.
else: #Si no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores, quiere decir
    ↪que el resultado de sut, es 0
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico
    ↪pc=",m)#Imprimimos que existe un punto de inflexión
#Para los demás puntos críticos realizamos los mismos pasos.
g=funcion(n)
n=0.67
if g<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",n)

```

```

elif g>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",n)

else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",n)

```

La función tiene un máximo en el punto crítico pc= 0

La función tiene un mínimo en el punto crítico pc= 0.67

```

[16]: """Paso #5. Una vez sabiendo si hay máximos o mínimos, procedemos a obtener
      ↪ esos máximos y mínimos sust. los puntos críticos
      en la función original"""

def s2(x): #definimos una función nuevamente con la función original para poder
      ↪ sustituir los puntos críticos
    f2=(2*x**3-2*x**2+1)#Función original
    return (f2)
s3=s2(0)#punto crítico
print("El máximo se encuentra en d=", [m,s3]) #Aquí por supuesto el alumno le
      ↪ cambia dependiendo de si existe un máximo o un mínimo

s4=s2(0.67)
print("El mínimo se encuentra en d=", [n,s4]) #De igual manera para el siguiente
      ↪ punto crítico

print ("FELICIDADES, HAS ENCONTRADO EL RESULTADO CORRECTO SI TODO LO ESCRIBISTE
      ↪ CORRECTO")

```

El máximo se encuentra en d= [0, 1]

El mínimo se encuentra en d= [0.67, 0.703726]

FELICIDADES, HAS ENCONTRADO EL RESULTADO CORRECTO SI TODO LO ESCRIBISTE CORRECTO

[]:

Optimización de funciones de una variable #2 Ejemplo

August 13, 2021

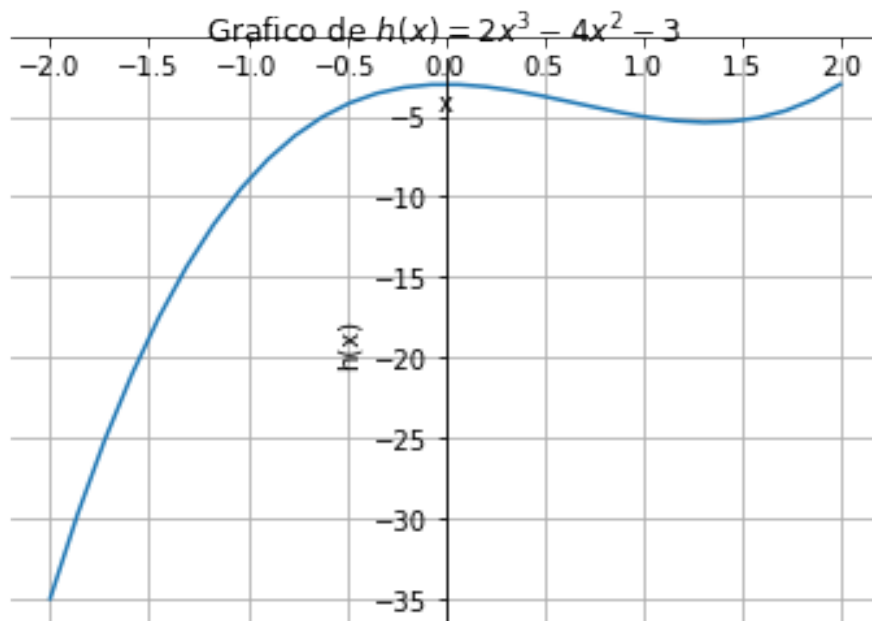
```
[1]: """Ejemplo #2.  $h(x)=2x^3-4x^2-3$ """
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as P
def h(x):
    return (2*x**3-4*x**2-3)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x = np.linspace(-2, 2, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, h(x))
plt.title(r"Grafico de  $h(x)=\{2x^3-4x^2-3\}$ ")
plt.ylabel('h(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()
```



[2]: *"""Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""*

```
from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x')
h=(2*x**3-4*x**2-3)
derivada3=Derivative(h,x).doit()
print("h'(x)=",derivada3,"Primera derivada")
```

$h'(x) = 6x^2 - 8x$ Primera derivada

[3]: *"""Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""*

```
import numpy as np
coef2=[6,-8,0]
pc2=np.roots(coef2)
print("El Punto crítico se encuentra en", pc2)
```

El Punto crítico se encuentra en [1.33333333 0.]

[4]: *"""Paso # 3. Obtenemos el criterio de la segunda derivada"""*

```
h2=Derivative(h,x,x).doit()
print("h''(x)=",h2,"Segunda derivada")
```

$h''(x) = 4(3x - 2)$ Segunda derivada

[1]: *"""Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos de la función, procedemos a verificar con los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""*

```

def funcion2(x):
    h3=(4*(3*x-1))
    return (h3)
h5=0
h4=funcion2(h5)

if h4<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",h5)
elif h4>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",h5)
else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",h5)

h7=1.33
h6=funcion2(h7)

if h6<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",h7)
elif h6>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",h7)

else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",h7)

```

La función tiene un máximo en el punto crítico pc= 0

La función tiene un mínimo en el punto crítico pc= 1.33

[6]: *"""Paso #5. Una vez sabiendo si hay máximos o mínimos, procedemos a obtener_*
↪ esos máximos y mínimos sust. los puntos críticos
en la función original"""

```

def i(x):
    i2=(2*x**3-4*x**2-3)
    return (i2)
i3=i(0)
print("El máximo se encuentra en d=", [h5,i3])

i4=i(1.33)
print("El mínimo se encuentra en d=", [h7,i4])

```

El máximo se encuentra en d= [0, -3]

El mínimo se encuentra en d= [1.33, -5.3703259999999995]

[]:

Optimización de funciones de una variable #3 ejemplo

August 13, 2021

```
[1]: """Ejemplo #3.  $d(x)=x^4+2x^3-2x^2+4$ """

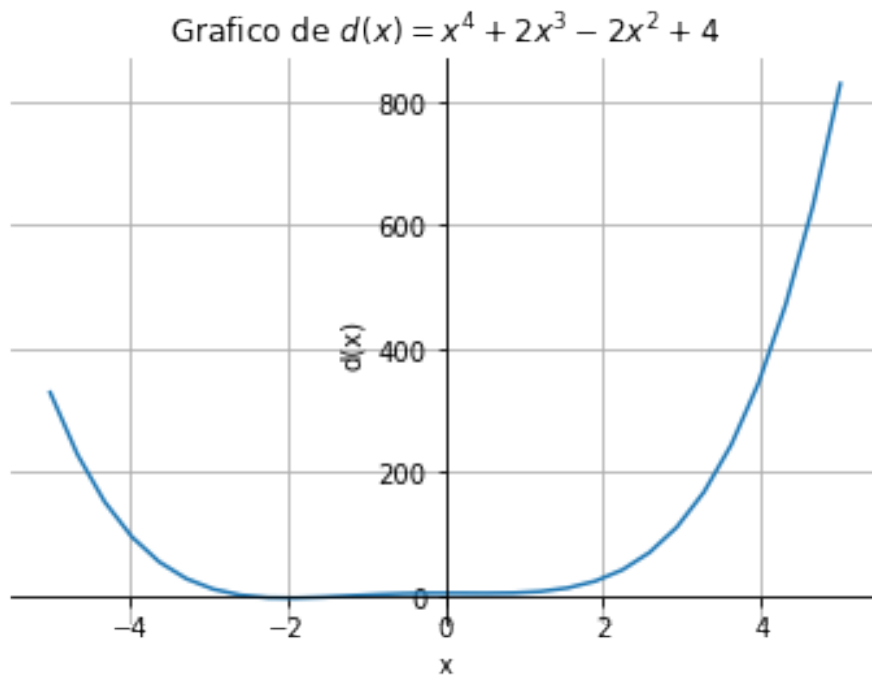
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as P
def d(x):
    return (x**4+2*x**3-2*x**2+4)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x = np.linspace(-5, 5, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, d(x))
plt.title(r"Grafico de  $d(x)=x^4+2x^3-2x^2+4$ ")
plt.ylabel('d(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()
```



[2]: *"""Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""*

```
from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x')
d=(x**4+2*x**3-2*x**2+4)
derivada2=Derivative(d,x).doit()
print("d'(x)=",derivada2,"Primera derivada")
```

d'(x)= 4*x**3 + 6*x**2 - 4*x Primera derivada

[3]: *"""Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""*

```
import numpy as np
coef=[4,6,-4,0]
pc=np.roots(coef)
print("El Punto crítico se encuentra en", pc)
```

El Punto crítico se encuentra en [-2. 0.5 0.]

[4]: *"""Paso # 3. Obtenemos el criterio de la segunda derivada"""*

```
segf=Derivative(d,x,x).doit()
print("d''(x)=",segf,"Segunda derivada")
```

d''(x)= 4*(3*x**2 + 3*x - 1) Segunda derivada

```
[1]: """Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos
↳ de la función, procedemos a verificar con
los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""
def funcion(x):
    f=(4*(3*x**2 + 3*x - 1))
    return (f)
m=-2
s=funcion(m)

if s<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",m)
elif s>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",m)
else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",m)

n=0.5
g=funcion(n)

if g<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",n)
elif g>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",n)

else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",n)
i=0
h=funcion(i)

if h<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",i)
elif h>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",i)

else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",i)
```

La función tiene un mínimo en el punto crítico pc= -2
La función tiene un mínimo en el punto crítico pc= 0.5
La función tiene un máximo en el punto crítico pc= 0

```
[6]: """Paso #5. Una vez sabiendo si hay máximos o mínimos, procedemos a obtener
↳ esos máximos y mínimos sust. los puntos críticos
en la función original"""
def s2(x):
    f2=(x**4+2*x**3-2*x**2+4)
    return (f2)
```

```
s3=s2(-2)
print("El mínimo se encuentra en d=", [m,s3])

s4=s2(0)
print("El máximo se encuentra en d=", [i,s4])

s5=s2(0.5)
print("El mínimo se encuentra en d=", [n,s5])
```

El mínimo se encuentra en d= [-2, -4]

El máximo se encuentra en d= [0, 4]

El mínimo se encuentra en d= [0.5, 3.8125]

[]:

Optimización de funciones de una variable #4 Ejemplo

August 13, 2021

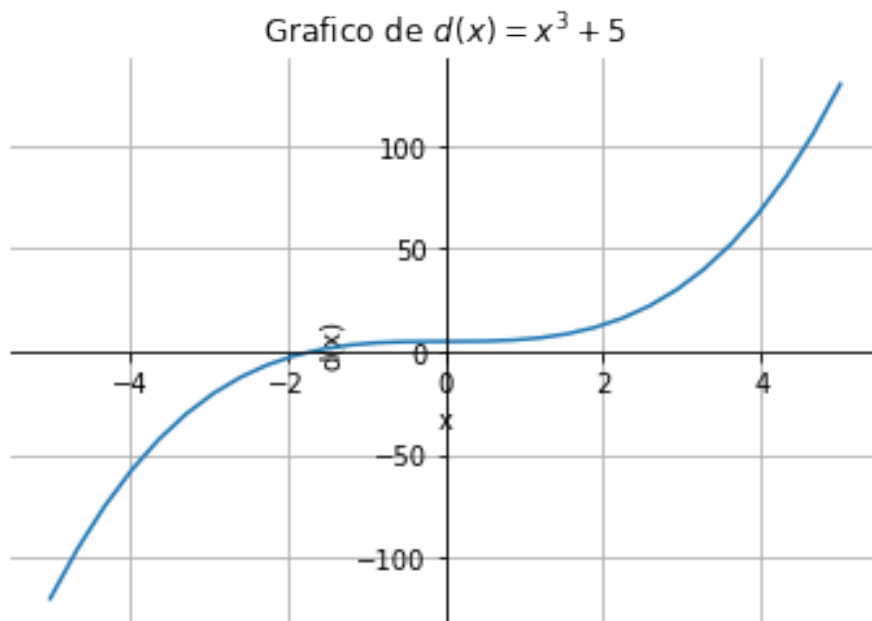
```
[1]: """Ejemplo #4.  $d(x)=x^3+5$ """
import numpy as np
from numpy.polynomial import Polynomial as P
def d(x):
    return (x**3+5)
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt

def move_spines():
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor
    0 de x para dividir claramente los valores positivos y
    negativos."""
    fig, ax = plt.subplots()
    for spine in ["left", "bottom"]:
        ax.spines[spine].set_position("zero")

    for spine in ["right", "top"]:
        ax.spines[spine].set_color("none")

    return ax

x = np.linspace(-5, 5, num=30)
ax = move_spines()
ax.grid()
ax.plot(x, d(x))
plt.title(r"Grafico de  $d(x)={x^3+5}$ ")
plt.ylabel('d(x)')
plt.xlabel('x')
plt.show()
```



[2]: *"""Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""*

```
from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
x=Symbol('x')
d=(x**3+5)
derivada2=Derivative(d,x).doit()
print("d'(x)=",derivada2,"Primera derivada")
```

d'(x)= 3*x**2 Primera derivada

[3]: *"""Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""*

```
import numpy as np
coef=[3,0]
pc=np.roots(coef)
print("El Punto crítico se encuentra en", pc)
```

El Punto crítico se encuentra en [0.]

[4]: *"""Paso # 3. Obtenemos el criterio de la segunda derivada"""*

```
segf=Derivative(d,x,x).doit()
print("d''(x)=",segf,"Segunda derivada")
```

d''(x)= 6*x Segunda derivada

[6]: *"""Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos de la función, procedemos a verificar con los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""*

```
def funcion(x):
    f=(6*x)
    return (f)
m=0
s=funcion(m)

if s<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",m)
elif s>0:
    print("La función tiene un mínimo")
else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc=",m)
```

La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico pc= 0

```
[7]: """Paso #5. Una vez sabiendo si hay máximos o mínimos, procedemos a obtener
↪ esos máximos y mínimos sust. los puntos críticos
    en la función original"""
def s2(x):
    f2=(x**3+5)
    return (f2)
s3=s2(0)
print("El punto de inflexión se encuentra en d=", [m,s3])
```

El punto de inflexión se encuentra en d= [0, 5]

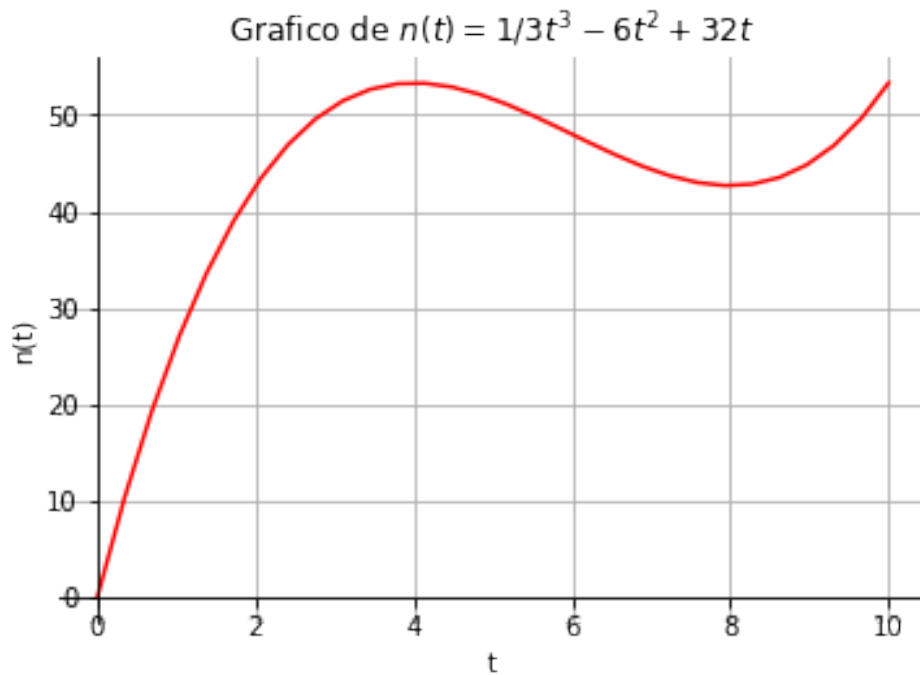
[]:

Ejemplo# 5 de aplicación__optimización de una función de una variable

August 13, 2021

```
[12]: """Ejemplo 5. Ejemplo de aplicación.  
En un artículo publicado en una revista de sociología se plantea que, si se  
↪ iniciara un programa específico a la salud  
para personas de edad , entonces 't' años después de su inicio, recibirían  
↪ beneficios directos 'n' millares de ancianos  
en donde:  
 $n(t) = t^3/3 - 6t^2 + 32t$  para  $0 \leq t \leq 12$   
¿Para qué valor de 't' recibe beneficios el número máximo de personas"""  
  
import numpy as np  
from numpy.polynomial import Polynomial as P  
def n(t):  
    return ((1/3)*t**3-6*t**2+32*t)  
%matplotlib inline  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
def move_spines():  
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor  
0 de t para dividir claramente los valores positivos y  
negativos."""  
    fix, at = plt.subplots()  
    for spine in ["left", "bottom"]:  
        at.spines[spine].set_position("zero")  
  
    for spine in ["right", "top"]:  
        at.spines[spine].set_color("none")  
  
    return at  
  
t = np.linspace(0, 10, num=30)  
at = move_spines()  
at.grid()  
at.plot(t, n(t), "r")  
plt.title(r"Grafico de  $n(t) = \{1/3t^3 - 6t^2 + 32t\}$ ")  
plt.ylabel('n(t)')  
plt.xlabel('t')
```

```
plt.show()
print("La gráfica nos representa la cantidad de personas que reciben beneficios,
↳ en un determinado tiempo, por lo que 'n' es en cantidad de personas y 't' en
↳ años ")
```



La gráfica nos representa la cantidad de personas que reciben beneficios en un determinado tiempo, por lo que 'n' es en cantidad de personas y 't' en años

```
[4]: """Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""
from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
t=Symbol('t')
n=((1/3)*t**3-6*t**2+32*t)
derivada2=Derivative(n,t).doit()
print("n'(t)=",derivada2,"Primera derivada")
```

$n'(t) = 1.0 \cdot t^2 - 12 \cdot t + 32$ Primera derivada

```
[8]: """Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""
import numpy as np
coef=[1,-12,32]
pc=np.roots(coef)
print("El Punto crítico se encuentra en", pc,"años")
```

El Punto crítico se encuentra en [8. 4.] años

```
[6]: """Paso # 3.Obtenemos el criterio de la segunda derivada"""
segf=Derivative(n,t,t).doit()
print("n''(t)=",segf , "Segunda derivada")
```

n''(t)= 2.0*t - 12 Segunda derivada

```
[9]: """Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos
↳de la función, procedemos a verificar con
los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""
def funcion(t):
    f=(2.0*t - 12 )
    return (f)
m=8
s=funcion(m)

if s<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",m,"años")
elif s>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",m,"años")
else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico
↳pc=",m,"años")
n=4
g=funcion(n)

if g<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",n,"años")
elif g>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",n,"años")

else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico
↳pc=",n,"años")
```

La función tiene un mínimo en el punto crítico pc= 8 años

La función tiene un máximo en el punto crítico pc= 4 años

```
[22]: """Paso #5. Hata este punto, ya sabemos cuál es el máximo, por lo que solo hay
↳que sustituir ese punto
crítico en la función original para saber que cantidad de personas reciben
↳ese beneficio"""

def s2(t):
    n2=((1/3)*t**3-6*t**2+32*t)
    return (n2)
n=4
s3=round(s2(4))#redondeamos con round debido a que son personas, entonces en
↳cantidades que sabemos que deben ser enteras hacemos redondeo
```

```
print("Para t=",n,"años","El número máximo de personas que recibe beneficios es",  
↵n=",s3,"personas")
```

Para t= 4 años El número máximo de personas que recibe beneficios es n= 53
personas

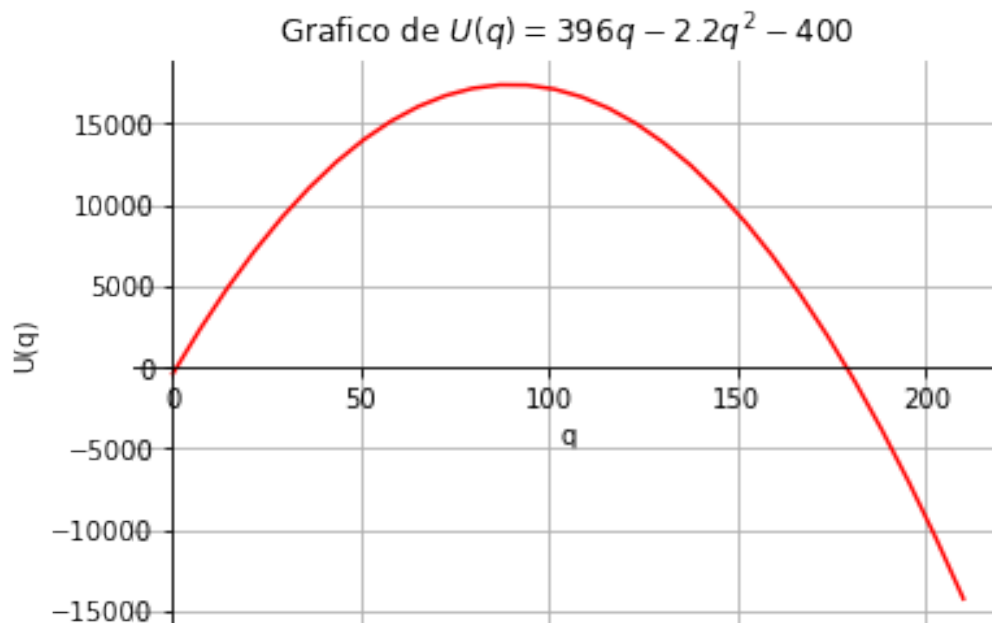
[]:

[]:

EJEMPLO #6. APLICACIÓN_OPTIMIZACIÓN_FUN_UNA_VARIABLE

August 15, 2021

```
[8]: """Ejemplo #6. La función de Utilidades de un monopolista es:  
      P(q)=396q-2.2q^2-400  
      Obtenga la producción que maximiza las utilidades """  
import numpy as np  
from numpy.polynomial import Polynomial as P  
def U(q):  
    return (396*q-(2.2)*q**2-400)  
%matplotlib inline  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
def move_spines():  
    """Esta funcion divide pone al eje y en el valor  
    0 de t para dividir claramente los valores positivos y  
    negativos."""  
    fix, aq = plt.subplots()  
    for spine in ["left", "bottom"]:  
        aq.spines[spine].set_position("zero")  
  
    for spine in ["right", "top"]:  
        aq.spines[spine].set_color("none")  
  
    return aq  
  
q = np.linspace(0, 210, num=30)  
aq = move_spines()  
aq.grid()  
aq.plot(q, U(q), "r")  
plt.title(r"Grafico de $U(q)={396q-2.2q^2-400}$")  
plt.ylabel('U(q)')  
plt.xlabel('q')  
plt.show()  
print("La gráfica nos representa la utilidad 'U' respecto a la producción 'q',  
↪donde U esta dado en $ y q en unidades de producto")
```



La gráfica nos representa la utilidad 'U' respecto a la producción 'q', donde U esta dado en \$ y q en unidades de producto

```
[11]: """Paso # 1. Se obtiene la derivada de la función"""
from sympy import Symbol
from sympy import Derivative, diff, simplify
q=Symbol('q')
U=(396*q-(2.2)*q**2-400)
derivada2=Derivative(U,q).doit()
print("P'(q)=",derivada2,"Primera derivada")
```

P'(q)= 396 - 4.4*q Primera derivada

```
[13]: """Paso # 2. Obtenemos el o los puntos críticos de la primera derivada"""
import numpy as np
coef=[-4.4,396]
pc=np.roots(coef)
print("El Punto crítico se encuentra en", pc,"productos")
```

El Punto crítico se encuentra en [90.] productos

```
[14]: """Paso # 3. Obtenemos el criterio de la segunda derivada"""
segf=Derivative(U,q,q).doit()
print("U''(q)=",segf,"Segunda derivada")
```

U''(q)= -4.40000000000000 Segunda derivada

```
[15]: """Paso # 4. Conociendo la reglas para determinar los puntos máximos o mínimos,
↳ de la función, procedemos a verificar con
    los puntos críticos obtenidos en la segunda derivada"""
def funcion(t):
    f=(-4.400000000000000)
    return (f)
m=90
s=funcion(m)

if s<0:
    print("La función tiene un máximo en el punto crítico pc=",m,"Productos")
elif s>0:
    print("La función tiene un mínimo en el punto crítico pc=",m,"Productos")
else:
    print("La función tiene un punto de inflexión en el punto crítico,
↳ pc=",m,"Productos")
```

La función tiene un máximo en el punto crítico pc= 90 Productos

```
[16]: """Paso #5. Hata este punto, ya sabemos cuál es el máximo, por lo que solo hay
↳ que sustituir ese punto
    crítico en la función original para saber que cantidad de personas reciben
↳ ese beneficio"""

def s2(q):
    u2=(396*q-(2.2)*q**2-400)
    return (u2)
m=90
s3=round(s2(m))#redondeamos con round debido a que son personas, entonces en
↳ cantidades que sabemos que deben ser enteras hacemos redondeo
print("Para q=",m,"productos(producción)", "La Producción máxima,
↳ U=",s3,"unidades monetarias")
```

Para q= 90 productos(producción) La Producción máxima U= 17420 unidades monetarias

[]:

Capítulo 6

Álgebra lineal

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que tiene diversas aplicaciones en la economía. El estudio riguroso del álgebra lineal es de suma importancia para la economía. A pesar de que en economía los modelos no siempre relacionan las variables de forma lineal, un modelo lineal puede ser una buena aproximación para estudiar ciertos fenómenos económicos. Toda función “suave” (continua y diferenciable) de una variable es, para un cambio pequeño de la variable independiente, cercana a una función lineal.

El estudio de **funciones lineales y sus sistemas** constituye el objeto del álgebra lineal. El objetivo del álgebra lineal es el de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Un sistema de ecuaciones lineales es completamente descrito por el conjunto de coeficientes. El conjunto de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales está dado por un arreglo rectangular llamado matriz.

Empecemos por estudiar qué es una ecuación y después estudiaremos un sistema de ecuaciones lineales. Una ecuación es una proposición que indica que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones que forman una ecuación se denominan lados o miembros y están separadas por el signo de igualdad $=$. En una ecuación uno encuentra: variables o incógnitas, constantes, y coeficientes de las variables. Resolver una ecuación significa encontrar todos

los valores de sus variables para los cuales la ecuación es verdadera. Estos valores se denominan soluciones de la ecuación y se dice que satisfacen la ecuación.

Una ecuación lineal en la variable x es una ecuación que puede escribirse en la forma: $ax + b = 0$ donde a y b son constantes y $a \neq 0$. Una ecuación lineal se conoce como una ecuación de primer grado o una ecuación de grado uno, puesto que la potencia de mayor grado de la variable es la primera. Para resolver una ecuación lineal se realizan operaciones sobre ella hasta obtener una ecuación equivalente cuyas soluciones sean obvias. Esto significa hallar una ecuación en la que la variable quede aislada en un lado de la ecuación ("despejar la variable").

Sea el conjunto de los n tuples $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de números reales denotado por $\mathbb{R}$, para $n = 1$ tenemos la línea real $\mathbb{R}$. Por ejemplo, suponer que el precio de dos coches, a y b , es igual a la suma de sus precios: $p(ab) = p_a + a_b$; la adición es una operación lineal. Sin embargo, $p(ab) = p_a^2 + p_b^2$ no es una relación lineal. Una ecuación que relaciona una variable independiente x a una variable dependiente y de la forma $y = kx + b$, donde k, b son constantes, representa a una **función lineal**.

Propiedades de la línea recta

- La pendiente m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y x_2, y_2 está dada por: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ si $x_1 \neq x_2$.
- Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1 \Rightarrow$ la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida.
- Cualquier recta, a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida, se puede describir con su ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen.
- Dos rectas distintas son paralelas sí, y solo sí, tienen la misma

pendiente.

- Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, para $b \neq 0$, entonces se puede calcular la pendiente m como $m = -a/b$.
- Si m_1 es la pendiente de la recta L_1 , m_2 es la pendiente de la recta L_2 , para $m_1 \neq 0$ y L_1, L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = \frac{-1}{m_1}$.
- Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero.
- Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

6.1. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2×2 :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (6.1)$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son números dados.

Cada una de estas **ecuaciones** corresponde a una **línea recta**.

Cualquier par de números reales $(x, y) \in \mathbb{R}$ que satisface el sistema se denomina **solución**. Para encontrar la solución existen diferentes métodos. Antes de ver estos métodos, se repasarán algunas propiedades del álgebra elemental:

A Si $a = b$ y $c = d \Rightarrow a + c = b + d$

B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$

La **propiedad A** establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. La **propiedad B** establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación válida.

Un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas que describe matemáticamente una situación se llama sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables. El problema consiste en encontrar valores de cada incógnita para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea. Estos valores serán las soluciones del sistema.

Entonces, el problema consiste en encontrar valores de x y y para los cuales ambas ecuaciones sean verdaderas de manera simultánea. Estos valores serán las soluciones del sistema.

Un sistema de ecuaciones puede tener:

- Una solución única
- Múltiples o infinitas soluciones
- Ninguna solución

Cuando estamos resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dentro de un contexto económico y encontramos que existen infinitas soluciones, podemos reducir el número de soluciones a uno definido si utilizamos las propiedades y supuestos de los sistemas económicos. Por ejemplo, no podemos encontrar que la solución al equilibrio de mercado consiste en precios o cantidades negativas. Así que, sabemos que para estas variables las soluciones negativas quedan excluidas y nos enfocamos en las soluciones que tienen precios o cantidades mayores o iguales a cero. Otra condición es cuando se pide que la solución consista en cantidades positivas para todas las variables.

6.2. Métodos de solución

Existen por lo menos los siguientes tres métodos de solución, generalmente utilizados para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos variables.

- Eliminación por adición
- Igualdad
- Sustitución

6.2.1. Eliminación por adición

Los pasos a seguir para el método de eliminación por adición son:

- Se escoge la variable a eliminar
- Se señalan las operaciones a realizar para obtener las ecuaciones equivalentes que permitan eliminar la variable.
- Se realizan las operaciones paso a paso.

Dado un sistema de ecuaciones:

- Escogemos eliminar la variable x .
- Para eliminar la variable x realizamos operaciones en el sistema de tal modo que los coeficientes de esta variable sean de igual magnitud pero signo contrario para que al sumar las ecuaciones se elimine.
- Entonces, tenemos que multiplicar las ecuaciones por un número de tal forma que sean iguales.
- ¡Cuidado! Al multiplicar la ecuación por un número, modificamos los coeficientes de todas las variables, tanto de x como de y .

6.2.2. Método de igualdad

Para aplicar el método de igualdad:

- Escogemos una variable del sistema.
- Despejamos la misma variable en cada ecuación del sistema.
- Igualamos las expresiones obtenidas al despejar. Por ejemplo, si escogimos la variable x , entonces la despejamos de cada ecuación y después igualamos $x = x$.

6.2.3. Método de sustitución

- Escogemos una variable del sistema.
- Despejamos la variable escogida de una ecuación.
- Sustituimos en la otra ecuación y resolvemos para la variable.
- Encontramos el valor de la variable que despejamos inicialmente y que sustituimos.

6.2.4. Representación gráfica

- Gráficamente, las coordenadas de cualquier punto sobre la línea recta satisface la ecuación de esa línea, hacen a la ecuación verdadera.
- Por lo tanto, las coordenadas de cualquier punto de intersección de las dos rectas de las dos ecuaciones del sistema satisfacen ambas ecuaciones.
- Esto significa que un punto de intersección proporciona una solución del sistema.

Si se dibujan las rectas de las ecuaciones en el mismo plano, podrán ocurrir una de las siguientes tres situaciones:

- Las dos rectas pueden intersectarse en un punto único, y el sistema tiene una **solución única**.
- Las rectas pueden ser paralelas y no tener puntos en común, por lo que **no existe solución**.
- Las dos rectas pueden ser la misma recta, así que las coordenadas de cualquier punto sobre la recta constituye una solución del sistema. Por lo tanto, existe un **número infinito de soluciones**.

6.2.5. Ejemplos en economía

Algunos ejemplos aplicados incluyen:

- Equilibrio de mercado
- Problema de la política macroeconómica
- Modelo Insumo-Producto
- Portafolios de inversiones

Equilibrio de mercado:

Considerar un mercado con un bien y asumir que la cantidad demandada q_d es una función decreciente del precio p del bien:

$q_d = a - bp$ donde $a, b > 0$

- Asumir también que la cantidad de oferta q_s del bien es una función creciente y lineal del precio del bien:

$$q_s = -c + dp$$

- Considerar la siguiente definición:

Definición 1. Equilibrio es un estado del sistema en el cual no hay tendencia al cambio.

- Definir exceso de demanda como la diferencia entre demanda y oferta. Un mercado se dice en equilibrio en el precio p si el exceso de demanda del bien es cero:

$$E(p) = q_d - q_s = 0$$

- Entonces el precio de equilibrio puede encontrarse al resolver simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} q_d(p) = q = a - bp \\ q_s(p) = q = -c + dp \end{cases}$$

- Una solución única al equilibrio del mercado existe para ciertos valores de los parámetros a, b, c, d
- Estos valores tienen que asegurar cantidades positivas: $q > 0$
- Encontramos el valor p^* de equilibrio que satisface ambas ecuaciones del sistema simultáneamente.
- Después encontramos la cantidad de equilibrio correspondiente.
- En este sistema las dos variables son el precio y la cantidad

Otro ejemplo es El problema de la política macroeconómica de la teoría de la política económica del marco de Tinbergen. Este marco consiste en tres ingredientes básicos:

1. Un conjunto de instrumentos que son controlados por el hacedor de política.
2. Un conjunto de metas que consideran la contribución al bienestar de la sociedad y no son controlados por el hacedor de política.
3. Un modelo cuantitativo que describa las relaciones entre las metas, los instrumentos y otras variables endógenas y exógenas.

Las relaciones descritas en el modelo son lineales:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = C + I + G + X - M \\ C = cY_d, 0 < c < 1 \\ Y_d = Y - T \\ T = tY, 0 < t < 1 \\ G = T + D \\ M = mY, 0 < m < 1 \end{array} \right.$$

donde Y es el PIB, C es el consumo, I es la inversión, G es el gasto del gobierno, X son las exportaciones, M son las importaciones, c es la propensión marginal al consumo, T son los impuestos recaudados por el gobierno, t es la tasa de impuesto, D es el déficit del gobierno y m la propensión marginal a las importaciones.

- Cada ecuación del modelo describe el comportamiento de una variable del modelo.
- Hay tres variables exógenas I , X y D .
- D puede ser controlada por el hacedor de política (fiscal) así que es un instrumento de política.
- El teorema de Tinbergen dicta que el número de metas tiene que ser igual al número de instrumentos.
- Como hay un solo instrumento, puede haber una sola meta, en este caso la meta puede ser el nivel de Y , el PIB.

Un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si **no** tiene solución (también conocidos como sistemas incompatibles). Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos **una solución** (también llamados sistemas compatibles). Los sistemas consistentes o compatibles pueden ser determinados (una sola solución) o indeterminados (más de una solución).

Sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6.2)$$

Este sistema $n \times n$ se caracteriza por arreglos rectangulares: arreglo de coeficientes, arreglo de variables y arreglo de constantes.

Arreglo rectangular de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Arreglo de variables:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Arreglo de constantes: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Cada **arreglo rectangular** se llama **matriz**. Se encierra entre corchetes o paréntesis. En su representación se usan las letras mayúsculas. Puede haber arreglos de un renglón o una columna llamados **vectores**.

6.3. Vectores

- Un tuple de n objetos ordenados es llamado un vector: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.
- Dado un vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, los elementos y_i para $i = 1, \dots, n$ se llaman componentes del vector.
- El número n de componentes es llamado la dimensión del vector y .
- Dos vectores son iguales si $x_i = y_i \ \forall i = 1, 2, \dots, n$

6.3.1. Operaciones con vectores:

- Adición de dos n-vectores: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- Resta de dos n-vectores: $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$
- Multiplicación de un vector por un número real λ : $\lambda \mathbf{y} = (\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_n)$

Propiedades algebraicas de vectores:

1. Conmutativa: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. Asociativa: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
4. $\mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$
5. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
6. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda\mu(\mathbf{x})$
7. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$
8. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$

Producto de dos vectores:

Para dos vectores cualesquiera $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ el producto interno de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ denotado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y es definido por:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots, x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i \quad (6.3)$$

El producto interno de dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ es un número real y tiene las siguientes propiedades:

- Simetría o conmutatividad: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
- Asortatividad con respecto a la multiplicación por un escalar: $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Distributividad: $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$.
- No negatividad: $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ iff $x = 0$.

6.4. Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Denotamos a las matrices con letras mayúsculas.
- El elemento genérico de una matriz A es denotado por a_{ij} , $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ donde i es el número del renglón y j es el número de la columna.
- La matriz es denotada de forma rápida por $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

- Esta matriz con m renglones y n columnas tiene **dimensión** $m \times n$.
- Si la matriz es **cuadrada** entonces $m = n$.
- Denotamos por $\mathbf{0}$ a la matriz nula que contiene sólo ceros en todas sus entradas.
- Denotamos por $I = I_n$ a la **matriz identidad** cuyos elementos son $i_{kk} = 1$ y $i_{km} = 0$ para $k \neq m$, $k = 1, \dots, n$ y $m = 1, \dots, n \Rightarrow$ tiene unos en la diagonal y ceros en los demás lugares.
- Se dice que una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ es no negativa si $a_{ij} \geq 0 \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \Rightarrow A \geq \mathbf{0}$.
- De forma análoga, una matriz positiva es $A > \mathbf{0}$

6.4.1. Operaciones en matrices

Suma de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ dos matrices. La suma de estas matrices está definida como:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \quad (6.4)$$

La multiplicación de una matriz por un escalar

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n} \quad (6.5)$$

La multiplicación de una matriz por un escalar es la multiplicación de cada uno de los elementos de la matriz por el escalar.

Propiedades de suma y multiplicación por un escalar:

1. $A + B = B + A$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + (-A) = \mathbf{0}$ donde $-A = (-1)A$
4. $A + \mathbf{0} = A$
5. $1A = A$
6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
7. $0A = \mathbf{0}$
8. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
9. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, entonces el múltiplo escalar $(-1)A$ se escribe como $-A$ y se denomina negativo de A :

$$(-1)A = -A \quad (6.6)$$

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ dos matrices, entonces:

$$A - B = A + (-B) \quad (6.7)$$

Multiplicación de matrices

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ dos matrices. Entonces la matriz AB de orden $m \times p$ se define como:

$$AB = \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p} \quad (6.8)$$

Un producto $C = AB$ de las matrices es una matriz $C = [c_{ij}]$, donde c_{ij} es igual al producto interno (A_i, B^j) del renglón i , A_i , de la matriz A y la columna j , B^j , de la matriz B considerados como vectores de $\mathbb{R}^n$.

Para realizar la multiplicación entre dos matrices se tiene que verificar que el número de columnas de A es igual al número de

renglones de B . La matriz resultante tendrá dimensión $m \times p$, es decir, el número de renglones de A y el número de columnas de B .

El caso de 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

1. $\alpha(AB) = ((\alpha A)B) = A(\alpha B)$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. ¡Precaución! En general $AB \neq BA$

Transpuesta de una matriz

Sea $A = [a_{ij}]m \times n$. La matriz $B = [b_{ij}]n \times m$ es llamada la transpuesta de A y denotada por A^T si $b_{ij} = a_{ji} \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

El operador de transposición satisface las siguientes propiedades:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Teorema: Para cada matriz A de orden $n \times n$, la matriz AA^T es simétrica.

Ejemplos de vectores y matrices en economía:

- Vectores de demanda para una economía: demanda de consumidores y demanda de industrias por bienes
- Vectores de costos
- Vectores gradientes: vector de derivadas parciales con respecto a cada una de las variables de una función

6.4.2. Determinantes

La función determinante es una función que toma una matriz cuadrada y calcula un número real:

$$f : A \rightarrow \det A = r \text{ para } r \in \mathbb{R}$$

$$\det A = |A|$$

Métodos para el cálculo de un determinante

- Regla de Sarrus
- Cofactores
- Propiedades de los determinantes
- Método de condensación

Regla de Sarrus

Este método se emplea para calcular el determinante de segundo y de tercer orden, es decir, se emplea únicamente para matrices de dimensión 2×2 y 3×3 .

Matrices de dimensión 2×2 :

Para calcular el valor de un determinante de segundo orden empleando la regla de Sarrus, se efectúa el producto de los elementos

de la diagonal principal y a este se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}) - (a_{21}a_{12})$$

Para matrices de dimensión 3×3 :

Para calcular el valor de un determinante de tercer orden empleando la regla de Sarrus, se efectúa el **producto** de los elementos de la **diagonal principal y de las dos diagonales paralelas** a ella. Para obtener estas dos diagonales paralelas se utiliza el artificio de volver a escribir las dos primeras columnas a la derecha o los dos primeros renglones abajo del tercero. A la suma de dichos productos se restan los productos de los elementos de la diagonal secundaria y de las dos paralelas a ella.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \end{aligned}$$

Propiedades de los determinantes

Podemos clasificar a las propiedades de los determinantes de acuerdo a dos tipos:

1. Condiciones bajo las cuales se puede concluir que un determinante es nulo mediante la inspección de las líneas de la matriz (renglones y columnas), así como los efectos producidos en el determinante al efectuar transformaciones elementales con las líneas de la matriz.
2. Propiedades del determinante en relación con las operaciones definidas para las matrices.

Propiedades de los determinantes tipo I

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$:

1. Si los elementos de una línea de A (renglón o columna) son todos nulos (todas las entradas son cero), entonces $\det A = 0$
2. Si B se obtiene de A multiplicando los elementos de una de sus líneas por un número $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\det B = \lambda \det A$.
3. Si B se obtiene de A intercambiando dos líneas paralelas (dos renglones o dos columnas), entonces $\det B = -\det A$.
4. Si dos líneas paralelas de A son proporcionales, entonces $\det A = 0$
5. Si B se obtiene de A sumando a los elementos de una línea los elementos de una línea paralela multiplicados por un número $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\det B = \det A$
6. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$
7. Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c , entonces $\det A$ se multiplica por c . Si se denota por B esta nueva matriz, entonces $|B| = c|A| = \det B = c \cdot \det A$
8. El intercambio de cualesquiera dos renglones o columnas de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por (-1)
9. Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det A = 0$
10. Si se suma un múltiplo escalar de un renglón o columna de A a otro renglón o columna de A , entonces el determinante no cambia.

Propiedades de los determinantes tipo II

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son dos matrices de $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$ entonces:

1. $\det A = \det A^T$
2. $\det (\lambda A) = \lambda^n \det A$
3. $\det (AB) = (\det A)(\det B)$
4. $\det A^T = \det A$
5. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
6. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

Factorización LU para calcular el determinante de una matriz:

$$\det A = \det LU = \det L \cdot \det U$$

Teorema. Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU , entonces $A = LU$, donde L tiene unos en la diagonal. Entonces, $\det A = \det U =$ producto de los elementos de la diagonal de U

Cofactores

Para explicar y desarrollar el método de cofactores, es necesario precisar el concepto de cofactor, y de menor de una matriz.

- El concepto de cofactor surge como el factor que multiplica al elemento en el desarrollo del determinante.
- Dicho cofactor es igual al menor, o su negativo, según sea par o impar la característica del elemento.
- El menor de una entrada de la matriz, es el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar el renglón y la columna de esa entrada.
- Por ejemplo, el menor de la entrada a_{12} es el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar el primer renglón y la segunda columna de la matriz original.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$. Se llama **menor** del elemento a_{ij} , y se representa con M_{ij} , al determinante

de la matriz que se obtiene suprimiendo en A el renglón i y la columna j . Se llama **cofactor** del elemento a_{ij} al producto: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$ y r es un número entero tal que $1 \leq r \leq n$, entonces:

- $\det A = \sum_{j=1}^n a_{rj} C_{rj} = \sum_{j=1}^n a_{rj} (-1)^{r+j} M_{rj}$
- $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ir} C_{ir} = \sum_{i=1}^n a_{ir} (-1)^{i+r} M_{ir}$

Determinantes por cofactores

- Se puede calcular el determinante de A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A .
- Además, se puede calcular el determinante de A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A .

Método de condensación

- En ciertos casos especiales, puede evitarse el cálculo de algunos cofactores cuando los elementos correspondientes son nulos.
- Podemos utilizar las propiedades de los determinantes para hacer ceros las entradas de un renglón excepto una.

El método de condensación se basa en esta idea.

- Elegir un renglón que tenga el mayor número de ceros posible.
- Elegir un elemento no nulo de dicho renglón (de preferencia un 1 o -1) y aplicar reiteradamente las propiedades de los determinantes hasta reducir a cero todas las demás entradas del renglón.
- Desarrollar por cofactores dicho renglón.
- Repetir los tres pasos anteriores hasta obtener un determi-

nante de tercer orden (o de segundo) y obtener su valor mediante la regla de Sarrus.

6.4.3. Inversa de una matriz

La utilización de la inversa es otro método para resolver sistemas de ecuaciones $n \times n$ por medio de resolver la **ecuación matricial**

$$AX = B \quad (6.9)$$

donde A es la matriz de coeficientes, X es el vector de incógnitas y B es el vector de constantes o términos independientes. $AX = B$ es una **ecuación matricial**.

Para resolver la ecuación necesitamos el inverso multiplicativo de la matriz A . Esta es una matriz C tal que $CA = I$, donde I es la matriz identidad. Si esta matriz C existe es llamada la **inversa** de A y se puede escribir como:

$$C = A^{-1}$$

Entonces,

$$C(AX) = CB$$

$$(CA)X = CB$$

$$IX = CB \text{ ya que } CA = I$$

$$X = CB, \text{ ya que } IX = X$$

$$\therefore \text{ la solución es } X = CB$$

Definición:

Sea A una matrix **cuadrada**, si existe una matriz C tal que $CA = I$, donde I es la matriz identidad, entonces C se llama **inversa** de A y se dice que A es **invertible**.

Puede demostrarse que una matriz invertible tiene una y solo una inversa $\Rightarrow$ la **inversa es única**. C es la única matriz tal que $CA = I$

$$\Rightarrow C = A^{-1} \Rightarrow A^{-1}A = I$$

$$A^{-1} \text{ conmuta con } A: A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Si A es una matriz invertible, entonces la ecuación matricial $AX = B$ tiene la **solución única** $X = A^{-1}B$

Teorema:

Para las matrices cuadradas A y A_k , A es invertible sí y solo sí $A_k = I$.

Además, si la sucesión de operaciones elementales con renglones convierte a A en I , entonces la misma sucesión de operaciones convierte a I en A^{-1}

Método para encontrar la inversa de una matriz:

- Verificar que A es una matriz cuadrada, es decir tiene dimensión $n \times n$.
- Formar la matriz aumentada de $n \times 2n$, $[A|I]$
- Realizar operaciones elementales con renglones hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida.
- Suponer que el resultado es $[R|B]$ de manera que se tiene:

$$[A|I] \Rightarrow \dots \Rightarrow [R|B]$$
- Si $R = I$, entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.
- Si $R \neq I$ entonces A no es invertible, lo que significa que A^{-1} no existe.

Para verificar si hemos encontrado la inversa de la matriz tenemos que verificar que la matriz multiplicada por su inversa da como resultado la matriz identidad:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

6.4.4. Solución de un sistema de ecuaciones lineales

Solución de un sistema de ecuaciones por la inversa

Procedimiento:

- Se transforma el sistema de ecuaciones a una ecuación matricial: $AX = B$.
- Se toma la matriz de coeficientes $A_{n \times n}$ y se aumenta con una matriz identidad $I_{n \times n}$, a la derecha. El resultado es una matriz de dimensión $n \times 2n$.
- Se aplican operaciones elementales en renglones a toda la matriz aumentada hasta que las primeras n columnas formen una matriz reducida.
- Si el resultado de estas primeras n columnas es la matriz I , entonces por el teorema, A es invertible y las últimas n columnas se han sido transformadas en A^{-1} .
- Si las primeras n columnas de la matriz reducida no es la matriz I , entonces la matriz A no es invertible.

Identificamos el determinante de la matriz de coeficientes, $\mathbf{A}$, para verificar si la matriz es invertible y determinamos si podemos encontrar la solución por medio de la inversa (Grossman, 2012). Si el determinante es diferente de cero, entonces podemos encontrar la inversa de la matriz por medio del siguiente planteamiento:

A es una matriz cuadrada $n \times n$ y $|A|$ es el determinante de A , si $|A| \neq 0$, entonces:

$$A_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\text{adj} A = C_A^T = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \cdots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \cdots & c_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

donde $c_{ij} = (-1)^{(i+j)} M_{ij}$ es el cofactor de la entrada a_{ij} y M_{ij} es el menor asociado a la entrada a_{ij} que es el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar el renglón i y la columna j de la matriz $\mathbf{A}$.

$$A * \text{adj} A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \cdots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \cdots & c_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{2,n} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{adj} \mathbf{A} = C_A^T$ (la traspuesta de la matriz de cofactores de A); el miembro derecho de la ecuación se obtiene por el desarrollo de Laplace, y la suma de las multiplicaciones de las entradas de $\mathbf{A}$ por cofactores ajenos es igual a cero. Esto implica que el miembro derecho de la ecuación es una matriz cuadrada con $|A|$ en la diagonal principal y ceros en cualquier otra entrada.

El desarrollo de Laplace es el siguiente:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij} \text{ para el renglón } i \quad (6.10)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij} \text{ para la columna } j \quad (6.11)$$

Factorizamos el miembro derecho de la ecuación $A * adj A$ por la matriz identidad y obtenemos:

$$A * adj A = |A|I \quad (6.12)$$

Dividimos ambos miembros de la ecuación entre $|A|$:

$$\frac{A * adj A}{|A|} = \frac{|A|I}{|A|} \quad (6.13)$$

$$\frac{A * adj A}{|A|} = I \quad (6.14)$$

Premultiplicamos por la inversa de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{-1}$, en ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{A^{-1}A * adj A}{|A|} = A^{-1}I \quad (6.15)$$

Hacemos las operaciones y obtenemos:

$$\frac{I adj A}{|A|} = A^{-1} \quad (6.16)$$

donde $A^{-1} * A = I$, por la definición de la matriz identidad. Obtenemos la inversa de la siguiente forma:

$$\frac{\text{adj} A}{|A|} = A^{-1} \quad (6.17)$$

Con la matriz inversa podemos encontrar la solución al sistema con el siguiente despeje de la ecuación matricial:

$$AX = B \quad (6.18)$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad (6.19)$$

$$IX = A^{-1}B \quad (6.20)$$

$$X = A^{-1}B \quad (6.21)$$

Esta solución será única y cumple con la no singularidad de la matriz de coeficientes. La no singularidad nos dice que si el determinante es diferente de cero, la matriz de coeficientes es invertible y el sistema tendrá una solución única.

El desarrollo para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones lineales puede ser resumido en forma de algoritmo, el cual se puede seguir paso a paso.¹ Este algoritmo es una herramienta para mostrar de forma clara el proceso que se debe seguir y el diagrama de flujo asociado a este algoritmo es una herramienta visual de dicho proceso. A continuación se presenta el algoritmo para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones lineales y su diagrama de flujo.

Algoritmo y diagrama de flujo para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales

¹Un algoritmo es un listado de pasos en secuencia a seguir para resolver un problema.

De acuerdo a lo descrito con anterioridad, podemos especificar el siguiente algoritmo y su correspondiente diagrama de flujo:

1. Determinar la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, el vector de incógnitas $\mathbf{X}$, y el vector de constantes o términos independientes $\mathbf{B}$.
2. Encontrar el determinante de $\mathbf{A}$: $|A|$.
 - Si $|A| = 0$: La matriz A es no invertible por lo que su inversa no existe, A es singular y el sistema descrito por A no tiene una solución única. Hay que utilizar el método de reducción o Gauss-Jordan para determinar si existen múltiples soluciones o ninguna solución.
 - Si $|A| \neq 0$: ir a paso 3.
3. Encontrar la matriz de cofactores de A : C_A .
4. Encontrar la adjunta de A : $\text{adj} A = C_A^T$
5. Encontrar la inversa de A : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * \text{adj} A$
6. Encontrar la solución al sistema de ecuaciones: $X = A^{-1}B$

El diagrama de flujo que ilustra el algoritmo antes descrito señala los dos caminos que uno puede seguir para conocer la solución de un sistema de ecuaciones (ver Figura 6.1). Estos caminos llevan a una solución única si el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero, o a múltiples soluciones o ninguna solución si el determinante es igual a cero.

6.4.5. Modelo insumo-producto

El modelo insumo-producto propuesto por W. Leontief (1936) es un modelo lineal donde la economía es un sistema de sectores interrelacionados entre sí. En este modelo, la producción de cada sector es una función lineal de la producción de todos los sectores

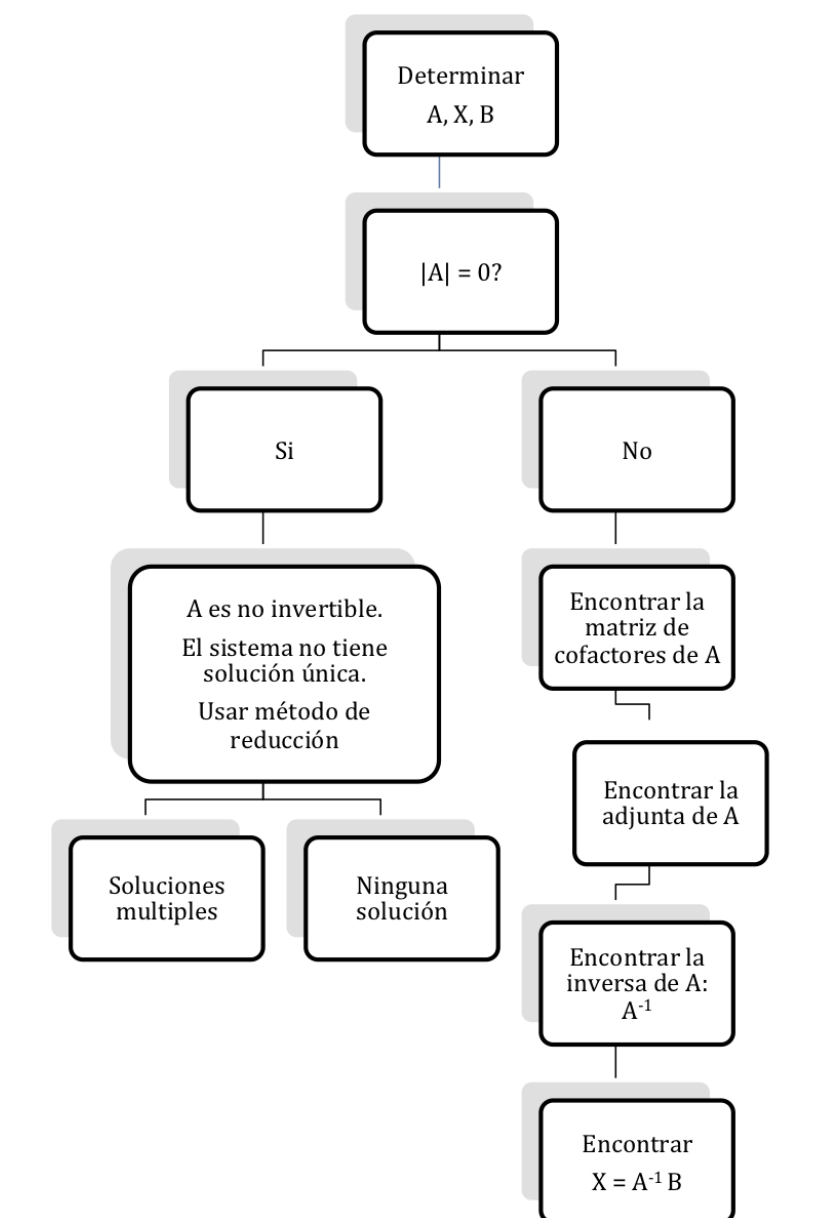


Figura 6.1: Diagrama de flujo de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales

de la economía, llamada demanda intermedia, más una demanda final.² El modelo puede ser descrito por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n + df_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n + df_2 = x_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n + df_n = x_n \end{cases}$$

donde x_i es la producción del sector i y df_i es la demanda final del sector i .

En términos de matrices el sistema de ecuaciones se escribe:

$$X = AX + DF \quad (6.22)$$

donde $\mathbf{A} = [a_{ij}] = [\frac{z_{ij}}{y_j}]$ es la matriz cuadrada de coeficientes directos de insumos y a_{ij} es insumo por producto y da información sobre lo que paga el sector j al comprar el producto de i para usarlo como insumo entre el producto de j , z_{ij} es la demanda intermedia de j por el producto de i . Por definición, la matriz A es no negativa con $a_{ij} \geq 0 \forall i, j$; esta característica se escribe como $\mathbf{A} \geq 0$ (Miller and Blair, 2009).

Entonces, de acuerdo al modelo, la producción de la economía, $\mathbf{X}$ se encuentra siguiendo el siguiente procedimiento:

$$X - AX = DF \quad (6.23)$$

factorizamos el miembro izquierdo de la ecuación por factor común:

²El modelo asume que cada sector está compuesto por un grupo de empresas que produce un mismo producto y bajo la misma tecnología.

$$X(I - A) = DF \quad (6.24)$$

Para despejar $\mathbf{X}$ premultiplicamos por $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ el término $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ del miembro izquierdo y $\mathbf{DF}$ del miembro derecho:

$$X(I - A)^{-1}(I - A) = (I - A)^{-1}DF \quad (6.25)$$

realizando las operaciones obtenemos:

$$XI = (I - A)^{-1}DF \quad (6.26)$$

donde $(I - A)^{-1}(I - A) = I$.

Simplificando el miembro izquierdo de la ecuación obtenemos:

$$X = (I - A)^{-1}DF = LDF \quad (6.27)$$

donde $\mathbf{X}$ es el vector columna de producción, $\mathbf{L} = (I - A)^{-1}$ es la matriz cuadrada llamada inversa de Leontief o de requerimientos totales con $L \geq 0$, y $\mathbf{DF}$ es el vector columna de las demandas finales.

Si conocemos la matriz de coeficientes directos de insumo y la demanda final podemos encontrar el efecto de un cambio en la demanda final en la producción de los sectores y la economía:

$$X' = LDF' \quad (6.28)$$

Este ejercicio se llama análisis de impacto en la literatura de insumo-producto. Asume que la matriz $\mathbf{A}$ no cambia, por lo que no hay cambios tecnológicos que modifiquen cómo producen los sectores, y lo único que cambia exógenamente es el vector $\mathbf{DF}$. Se

mide, cuánta producción es necesaria para compensar un cambio en la demanda final de un sector.

Para medir el efecto de un cambio (perturbación) en la demanda final de un sector, entonces encontramos:

$$\Delta x = x^1 - x^0 = L(DF^1 - DF^0) \quad (6.29)$$

Equivalentemente,

$$L\Delta DF = L * f \quad (6.30)$$

donde $\mathbf{f}$ es un vector con un uno en la posición del sector que tuvo un cambio en la demanda final y ceros de otra manera (normalizando el cambio en la demanda final). Si hacemos este ejercicio para cada sector terminamos con tantos escenarios como sectores en la economía y podemos comparar para determinar cuál sector genera los efectos más grandes.

6.5. Ejemplos

6.5.1. Eliminación por adición

1.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{a} \\ x + y = 4 & \text{b} \end{cases} \quad (6.31)$$

Primero identificamos que variable se quiere eliminar del sistema de ecuaciones. Podemos escoger la variable y .

Para eliminar la variable y por adición debemos multiplicar alguna de las ecuaciones por (-1) .

Escogemos realizar la siguiente operación: $a + (-1)b$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ +(-1)(x + y = 4) \end{cases} \quad (6.32)$$

Al sumar, obtenemos:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 1 \\ +(-x - y = -4) \\ \hline x + 0 = -3 \end{array} \quad (6.33)$$

$$\therefore x = -3$$

Para obtener el valor solución de y sustituimos en alguna de las ecuaciones originales. Elegimos sustituir en la ecuación b .

$$x + y = 4$$

$$-3 + y = 4 \Rightarrow y = 4 + 3 = 7$$

$\therefore$ la solución al sistema de ecuaciones es: $(-3, 7)$

Para comprobar la solución podemos sustituir y verificar que se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

$$2(-3) + 7 = -6 + 7 = 1$$

$$-3 + 7 = 4$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \text{ a} \\ 2x + 2y = 0 \text{ b} \end{cases} \quad (6.34)$$

Primero identificamos que variable se quiere eliminar del sistema de ecuaciones. Podemos escoger la variable x .

Para eliminar la variable x por adición debemos de realizar la siguiente operación: $a + (-2)b$

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ +(-2)(2x + 2y = 0) \end{cases} \quad (6.35)$$

Al sumar, obtenemos:

$$\begin{array}{r} 4x - 3y = -2 \\ +(-4x - 4y = 0) \\ \hline 0 - 7y = -2 \end{array} \quad (6.36)$$

$$\therefore y = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

Para obtener el valor solución de x sustituimos en alguna de las ecuaciones originales. Elegimos sustituir en la ecuación b .

$$2x + 2y = 0$$

$$2x + 2\left(\frac{2}{7}\right) = 0 \Rightarrow 2x = 0 - \frac{4}{7} \Rightarrow 2x = -\frac{4}{7} \Rightarrow x = -\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

$\therefore$ la solución al sistema de ecuaciones es: $\left(-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right)$

Para comprobar la solución podemos sustituir y verificar que se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

$$4\left(-\frac{2}{7}\right) - 3\left(\frac{2}{7}\right) = -\frac{8}{7} - \frac{6}{7} = -\frac{14}{7} = -2 \quad 2\left(-\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{2}{7}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{-7}{5}x + 2y = 3 \text{ a} \\ x - 3y = 2 \text{ b} \end{cases} \quad (6.37)$$

Primero identificamos que variable se quiere eliminar del sistema de ecuaciones. Podemos escoger la variable y .

Para eliminar la variable x por adición debemos de realizar la siguiente operación: $3a + (2)b$

$$\begin{cases} (3)(\frac{-7}{5}x + 2y = 3) \\ +(2)(x - 3y = 2) \end{cases} \quad (6.38)$$

Al sumar, obtenemos:

$$\begin{array}{r} \frac{-21}{5}x + 6y = 9 \\ +2x - 6y = 4 \\ \hline -\frac{11}{5}x - 0 = 13 \end{array} \quad (6.39)$$

$$\therefore x = 13(-\frac{5}{11}) = -\frac{65}{11}$$

Para obtener el valor solución de y sustituimos en alguna de las ecuaciones originales. Elegimos sustituir en la ecuación b .

$$x - 3y = 2$$

$$-\frac{65}{11} - 3y = 2 \Rightarrow -3y = \frac{65}{11} \Rightarrow y = \frac{65}{11}(-\frac{1}{3}) = -\frac{65}{33}$$

$$\therefore \text{la solución al sistema de ecuaciones es: } (-\frac{65}{11}, -\frac{65}{33})$$

Para comprobar la solución podemos sustituir y verificar que se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} \frac{-7}{5}(-\frac{65}{11}) + 2(\frac{65}{33}) &= \\ -\frac{65}{11} - 3\frac{65}{33} &= \end{aligned}$$

6.5.2. Igualación

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \text{ a} \\ x + 5y = 4 \text{ b} \end{cases} \quad (6.40)$$

Primero identificamos que variable se quiere eliminar del sistema de ecuaciones. Podemos escoger la variable x . Entonces, despejamos la variable x de ambas ecuaciones.

Despejando de la ecuación a:

$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 2x = 1 - 3y \Rightarrow x = \frac{1-3y}{2}$$

Despejando de la ecuación b:

$$x + 5y = 4 \Rightarrow x = 4 - 5y$$

Igualamos, $x = x$

$$\frac{1-3y}{2} = 4 - 5y \Rightarrow 1 - 3y = (4 - 5y)(2) \Rightarrow 1 - 3y = 8 - 10y \Rightarrow -3y + 10y = 8 - 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7}$$

therefore $y = 1$

Para obtener el valor solución de x sustituimos en alguna de las ecuaciones originales. Elegimos sustituir en la ecuación a.

$$2x + 3(1) = 1 \Rightarrow 2x = 1 - 3 = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

$\therefore$ la solución es $(-1, 1)$

Para comprobar la solución podemos sustituir y verificar que se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

$$2(-1) + 3(1) = -2 + 3 = 1$$

$$-1 + 5(1) = -1 + 5 = 4$$

2.

$$\begin{cases} a^2x + by = 2c & \text{a} \\ Kx + dy = 3 & \text{b} \end{cases} \quad (6.41)$$

Primero identificamos que variable se quiere eliminar del sistema de ecuaciones. Podemos escoger la variable x . Entonces, despejamos la variable x de ambas ecuaciones.

$$a^2x + by = 2c \Rightarrow a^2x = 2c - by \Rightarrow x = \frac{2c-by}{a^2}$$

$$Kx + dy = 3 \Rightarrow kx = 3 - dy \Rightarrow x = \frac{3-dy}{k}$$

Iguálamos $x = x$

$$\frac{2c-by}{a^2} = \frac{3-dy}{k} \Rightarrow (k)(2c - by) = (a^2)(3 - dy) \Rightarrow 2kc - bky = 3a^2 - a^2dy$$

Para despejar y tenemos que juntar todos los elementos que tengan y de un sólo lado de la ecuación y el resto del otro lado:

$$a^2dy - bky = 3a^2 - 2kc$$

Ahora factorizamos por factor común y y despejamos:

$$y(a^2d - bk) = 3a^2 - 2kc \Rightarrow y = \frac{3a^2 - 2kc}{a^2d - bk}$$

Usamos este valor para encontrar x sustituyendo en alguna de las ecuaciones originales:

$$Kx + d\left(\frac{3a^2 - 2kc}{a^2d - bk}\right) = 3 \Rightarrow kx = 3 - d\left(\frac{3a^2 - 2kc}{a^2d - bk}\right)$$

Entonces,

$$x = \left[3 - d\left(\frac{3a^2 - 2kc}{a^2d - bk}\right)\right]\left(\frac{1}{k}\right)$$

Ejemplos del método de sustitución

1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 & \text{a} \\ x + 2y = 0 & \text{b} \end{cases} \quad (6.42)$$

Escogemos despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones. Después sustituimos esto en la segunda ecuación para obtener una tercera ecuación que esté únicamente en términos de una variable. Escogemos despejar x de la ecuación b.

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$$

Ahora sustituimos este valor en donde esté x en la ecuación a:

$$2x + 3y = -3 \Rightarrow 2(-2y) + 3y = -3$$

Haciendo las operaciones obtenemos:

$$-4y + 3y = -3 \Rightarrow (-4 + 3)y + 3y = -3 \text{ al factorizar por factor común } y.$$

$$-y = -3 \therefore y = 3$$

Para obtener el valor solución de x sustituimos este valor de y en alguna de las ecuaciones originales. Escogemos sustituir en la ecuación b.

$$x + 2y = 0 \Rightarrow x + 2(3) = 0 \Rightarrow x + 6 = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ y la solución es } (-6, 3)$$

2.

$$\begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = 3 & \text{a} \\ \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1 & \text{b} \end{cases} \quad (6.43)$$

Escogemos despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones. Después sustituimos esto en la segunda ecuación para obtener una tercera ecuación que esté únicamente en términos de una variable. Escogemos despejar x de la ecuación b.

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 1 - \frac{2}{3}y \Rightarrow x = (1 - \frac{2}{3}y)(2)$$

$$\therefore x = 2 - \frac{4}{3}y$$

Para encontrar el valor solución de y , sustituimos el valor encontrado para x en alguna de las ecuaciones originales. Escogemos sustituirlo en la ecuación b.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 1 &\Rightarrow \frac{1}{2}(2 - \frac{4}{3}y) + \frac{2}{3}y = 1 \Rightarrow 1 - \frac{4}{6}y + \frac{2}{3}y = 1 \Rightarrow \\ 1 - y(\frac{4}{6} + \frac{2}{3}) &= 1 \Rightarrow -y(\frac{4}{6} + \frac{2}{3}) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow y(\frac{4}{6} + \frac{2}{3}) = \\ 0 &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{cases} -bx + cy = r & \text{a} \\ tx + 2y = 1 & \text{b} \end{cases} \quad (6.44)$$

Escogemos despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones. Después sustituimos esto en la segunda ecuación para obtener una tercera ecuación que esté únicamente en términos de una variable. Escogemos despejar y de la ecuación a .

$$-bx + cy = r \Rightarrow cy = r + bx \Rightarrow y = \frac{r+bx}{c}$$

Sustituimos este valor en la ecuación b para encontrar x :

$$\begin{aligned} tx + 2y = 1 &\Rightarrow tx + 2(\frac{r+bx}{c}) = 1 \Rightarrow tx + \frac{2r}{c} + \frac{2bx}{c} = 1 \Rightarrow \\ x(t + \frac{2b}{c}) &= 1 - \frac{2r}{c} \Rightarrow x = (1 - \frac{2r}{c})(\frac{1}{\frac{2b}{c}}) = (1 - \frac{2r}{c})(\frac{c}{2b}) = \\ \frac{c}{2b} - \frac{2rc}{2bc} &= \frac{c}{2b} - \frac{r}{b} \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{c}{2b} - \frac{r}{b} \text{ y la solución es } (\frac{c}{2b} - \frac{r}{b}, \frac{r+bx}{c})$$

Ejemplos de álgebra matricial

1. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores restantes para que la siguiente ecuación sea verdadera.

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 3 & a_{12} + 4 & a_{13} + 5 \\ a_{21} + 1 & a_{22} + 2 & a_{23} + 3 \\ 1 + b_{31} & -1 + b_{32} & 1 + b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

El primer paso es el establecer a que debe ser igual cada entrada de la matriz que queremos obtener. Esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 3 = 6 & a_{12} + 4 = 6 & a_{13} + 5 = 4 \\ a_{21} + 1 = 2 & a_{22} + 2 = 4 & a_{23} + 3 = 6 \\ 1 + b_{31} = 8 & -1 + b_{32} = 0 & 1 + b_{33} = 4 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que el valor de cada entrada será la solución a cada ecuación; por ejemplo, la primera entrada será igual a la solución de $a_{11} + 3 = 6$. Para determinar el valor de cada entrada hay que despejar las a_{ij} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} = 6 - 3 & a_{12} = 6 - 4 & a_{13} = 4 - 5 \\ a_{21} = 2 - 1 & a_{22} = 4 - 2 & a_{23} = 6 - 3 \\ b_{31} = 8 - 1 & +b_{32} = 0 + 1 & +b_{33} = 4 - 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la respuesta es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} = 3 & a_{12} = 2 & a_{13} = -1 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 2 & a_{23} = 3 \\ b_{31} = 7 & +b_{32} = 1 & +b_{33} = 3 \end{pmatrix}$$

2. Para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar $A * B$ y $B * A$

$$A * B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizando la multiplicación de matrices obtenemos lo siguiente, recordando que la multiplicación de matrices se realiza renglón por columna y cada nueva entrada de la matriz producto es la suma de los productos de las entradas correspondientes.

$$A * B =$$

$$\begin{pmatrix} (3)(1) + (4)(0) + (5)(3) & (3)(1) + (4)(1) + (5)(4) & (3)(-1) + (4)(1) + (5)(0) \\ (1)(1) + (2)(0) + (3)(3) & (1)(1) + (2)(1) + (3)(4) & (1)(-1) + (2)(1) + (3)(0) \\ (0)(1) + (1)(0) + (3)(3) & (0)(1) + (1)(1) + (3)(4) & (0)(-1) + (1)(1) + (3)(0) \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones obtenemos:

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 + 15 & 3 + 4 + 20 & -3 + 4 + 0 \\ 1 + 0 + 9 & 1 + 2 + 12 & -1 + 2 + 0 \\ 0 + 0 + 9 & 0 + 1 + 12 & -1 + 1 + 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz producto es:

$$= \begin{pmatrix} 18 & 27 & 1 \\ 10 & 15 & 1 \\ 9 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

El segundo producto que tenemos que realizar es $B * A$:

$$B * A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B * A =$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(3) + (1)(1) + (1)(0) & (1)(4) + (1)(2) + (1)(1) & (1)(5) + (1)(3) + (1)(3) \\ (0)(3) + (1)(1) + (1)(0) & (0)(4) + (1)(2) + (1)(1) & (0)(5) + (1)(3) + (1)(3) \\ (3)(3) + (4)(1) + (0)(0) & (3)(4) + (4)(2) + (0)(1) & (3)(5) + (4)(3) + (0)(3) \end{pmatrix}$$

$$B * A = \begin{pmatrix} 3 + 1 + 0 & 4 + 2 + 1 & 5 + 3 + 3 \\ 0 + 1 + 0 & 0 + 2 + 1 & 0 + 3 + 3 \\ 9 + 4 + 0 & 12 + 8 + 0 & 15 + 12 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 11 \\ 1 & 3 & 6 \\ 13 & 20 & 27 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las siguientes matrices, determinar las operaciones que se pide:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $A * B * C$

Para realizar este producto nos enfocamos en verificar si las dimensiones de las matrices permiten realizar la multiplicación de matrices. A es de dimensión 2×3 y B es de dimensión 3×2 por lo que sí podemos realizar la multiplicación. Entonces empezamos por calcular el producto de los primeros dos factores, es decir $A * B$, y luego este producto lo multiplicaremos por C .

$$A * B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (3)(1) + (-2)(3) + (1)(0) & (3)(1) + (-2)(2) + (1)(1) \\ (1)(1) + (2)(3) + (1)(0) & (1)(1) + (2)(2) + (1)(1) \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 3 - 6 + 0 & 3 - 4 + 1 \\ 1 + 6 + 0 & 1 + 4 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = M$$

Ahora multiplicamos esta matriz M que obtuvimos por la matriz C . De nuevo verificamos si las dimensiones de las matrices nos permiten realizar la multiplicación. M es de dimensión 2×2 y C es de dimensión 2×1 por lo que sí podemos realizar la multiplicación y queda de la siguiente manera:

$$M * C = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 0 \\ 7 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) $A * C$

De nuevo verificamos si las dimensiones de las matrices nos permiten realizar la multiplicación. A es de dimensión 2×3 y C es de dimensión 2×1 por lo que no podemos realizar la multiplicación.

c) $B * A$

B es de dimensión 3×2 y A es de dimensión 2×3 por lo que sí podemos realizar la multiplicación.

$$\begin{aligned} B * A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1)(3) + (1)(1) & (1)(-2) + (1)(2) & (1)(1) + (1)(1) \\ (3)(3) + (2)(1) & (3)(-2) + (2)(2) & (0)(1) + (1)(1) \\ (0)(3) + (1)(1) & (0)(-2) + (1)(2) & (0)(1) + (1)(1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 + 1 & -2 + 2 & 1 + 1 \\ 9 + 2 & -6 + 4 & 0 + 1 \\ 0 + 1 & 0 + 2 & 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 11 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 4 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 31 & 36 & 41 \\ 9 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinar los valores de x, y, z de tal manera que se cumpla con la siguiente ecuación: $A * B = C$.

Como todas las matrices son de la misma dimensión no es necesario

hacer más verificaciones. Procedemos a realizar la multiplicación de A por B y después a resolver las ecuaciones resultantes al igualar ese producto a C

$$\begin{aligned}
 A * B &= \begin{pmatrix} x & 3 & 4 \\ 1 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} (x)(4) + (3)(1) + (4)(5) & (x)(3) + (3)(2) + (4)(6) & (x)(2) + (3)(3) + (4)(7) \\ (1)(4) + (y)(1) + (1)(5) & (1)(3) + (y)(2) + (1)(6) & (1)(2) + (y)(3) + (1)(7) \\ (0)(4) + (1)(1) + (z)(5) & (0)(3) + (1)(1) + (z)(6) & (0)(2) + (1)(3) + (z)(7) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 4x + 3 + 20 & 3x + 6 + 24 & 2x + 9 + 28 \\ 4 + y + 5 & 3 + 2y + 6 & 2 + 3y + 7 \\ 0 + 1 + 5z & 0 + 2 + 6z & 0 + 3 + 7z \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 4x + 3 + 20 & 3x + 6 + 24 & 2x + 9 + 28 \\ 4 + y + 5 & 3 + 2y + 6 & 2 + 3y + 7 \\ 0 + 1 + 5z & 0 + 2 + 6z & 0 + 3 + 7z \end{pmatrix} \\
 A * B &= \begin{pmatrix} 4x + 23 & 3x + 30 & 2x + 37 \\ y + 9 & 2y + 9 & 3y + 9 \\ 5z + 1 & 6z + 2 & 7z + 3 \end{pmatrix} \\
 A * B = C : &\begin{pmatrix} 4x + 23 = 31 & 3x + 30 = 36 & 2x + 37 = 41 \\ y + 9 = 9 & 2y + 9 = 9 & 3y + 9 = 9 \\ 5z + 1 = 1 & 6z + 2 = 2 & 7z + 3 = 3 \end{pmatrix} \\
 A * B = C : &\begin{pmatrix} 4x = 31 - 23 & 3x = 36 - 30 & 2x = 41 - 37 \\ y = 9 - 9 & 2y = 9 - 9 & 3y = 9 - 9 \\ 5z = 1 - 1 & 6z = 2 - 2 & 7z = 3 - 3 \end{pmatrix} \\
 A * B = C : &\begin{pmatrix} x = 2 & x = 2 & x = 2 \\ y = 0 & y = 0 & y = 0 \\ z = 0 & z = 0 & z = 0 \end{pmatrix} \\
 \therefore &\left. \begin{matrix} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Ejemplos del método de reducción o Gauss-Jordan

1.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \quad (6.45)$$

La matriz aumentada correspondiente a este sistema de ecuaciones lineales es la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

donde la última columna corresponde a los términos independientes del sistema.

Recordemos que el método de reducción consiste en hacer unos en la diagonal principal de la matriz y ceros por arriba y por debajo de la diagonal principal.

Como la entrada principal del primer renglón ya es un uno, entonces nos enfocamos en hacer ceros por debajo. Empezamos por hacer cero el 2 en la entrada (2,1). Para ello realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ (-2)(1) + 2 & (-2)(-1) & (-2)(1) & (-2)(0) \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para hacer cero el uno en la entrada (3,1) realizamos la operación sobre el renglón 3: $(-1)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ (-1)(1) + 1 & (-2)(1) + 1 & (-1)(-1) + (-1) & (-1)(1) + (-1) \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Ahora nos enfocamos en hacer un uno la entrada principal del renglón 2. Para ello multiplicamos el renglón 2 por el inverso multiplicativo de 2, es decir $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ (\frac{1}{2})0 & (\frac{1}{2})2 & (\frac{1}{2})(-2) & (\frac{1}{2})0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Enseguida hacemos cero las entradas por arriba de la entrada principal del renglón 2. Para ello realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-2)R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} (-2)(0)+1 & (-2)(1)+2 & (-2)(-1)+1 & (-2)(0)+1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (-2)(0)+1 & (-2)(1)+2 & (-2)(-1)+1 & (-2)(0)+1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

2.

$$\begin{cases} -2x + 4y - 8z = 12 \\ 3x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

La matriz aumentada correspondiente a este sistema de ecuaciones lineales es la siguiente matriz: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -8 & 12 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(\frac{-1}{2})R1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\rightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-3)R1 + R2 \rightarrow$

$$R_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & -15 & 22 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\rightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(-4)R1 + R3 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & -15 & 22 \\ 0 & 9 & -17 & 24 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(-8)R3 + (9)R2 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & -15 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(15)R3 + R2 \rightarrow R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 0 & 112 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(\frac{1}{8})R2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(-4)R3 + R1 \rightarrow R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(-2)R2 + R1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es: $P(10, 14, 6)$

3.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \quad (6.47)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(2)R_2 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(\frac{1}{4})R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-2)R_3 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(\frac{-1}{2})R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $-R_3 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es: $P(\frac{14}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4})$

4.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ x + 3y - 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \quad (6.48)$$

La matriz aumentada correspondiente al sistema de ecuaciones es:

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre los renglones 1 y 2: $R_2 \leftrightarrow R_1$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-3)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -4 \end{array} \right)$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 3: $(4)R_2 + (7)R_3 \rightarrow R_3$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(\frac{1}{4}R3 + R2 \rightarrow R2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-8)R3 + R2 \rightarrow R2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(\frac{-1}{7}R2 \rightarrow R2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(3)R3 + R1 \rightarrow R1$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(-3)R2 + R1 \rightarrow R1$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución es la solución trivial debido a que: $P(0, 0, 0)$.

5.

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad (6.49)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

→ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 2: $(-1)R1 + R2 \rightarrow R2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

→ realizamos la siguiente operación sobre el renglón 1: $(2)R2 + R1 \rightarrow R1$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Reescribiendo la ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 5x - z = 1 \\ 4x - y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 5x - 1 \\ y = 4x - 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = k \\ y = 4k - 1 \\ z = 5k - 1 \end{array} \right\}$$

Por tanto, la solución es: $P(k, 4k - 1, 5k - 1)$

Método de Gauss

$$(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$$

Dados las siguientes matrices, determinar las inversas de las mismas por el método de Gauss, en caso de no existir, determinar la causa.

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Mostramos la matriz aumentada con la matriz identidad a la derecha.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Realizamos las operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow R2 : (-2)R1 + R2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow R2 : -R2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow R1 : (-3)R2 + R1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R1 : (\frac{1}{2})R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación:

$$A * A^{-1} = I$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2(\frac{-5}{2}) + 3(2) & 2(\frac{3}{2}) + 3(-1) \\ 4(\frac{-5}{2}) + 5(2) & 4(\frac{3}{2}) + 5(-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 6 & 3 - 3 \\ -10 + 10 & 6 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Realizamos las operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow R2 : (-4)R2 + R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow R2 : -R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow R1 : R1 + R2 \longrightarrow \\ \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow R1 : (\frac{1}{4})R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow \therefore b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comprobación:

$$B * B^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4(0) + (-1)(-1) & (4)(1) + (-1)(4) \\ (1)(0) + (0)(1) & (1)(1) + (0)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 4-4 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \ C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizamos las operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow R2 : (-2)R2 + R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R3 : (-3)R1 + (4)R3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$R3 : (11)R2 + (3)R3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 2 & -22 & 12 \end{array} \right).$$

$$\longrightarrow R3 : \left(\frac{1}{18}\right)R3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \longrightarrow R2 : (-3)R3 + R2 \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R2 : \left(-\frac{1}{3}\right)R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right) \longrightarrow R1 : (-3)R3 +$$

$$R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R1 : R1 - R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{28}{9} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R1 : \left(\frac{1}{4}\right)R1 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\therefore C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$C * C^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot * \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{7}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (4)(\frac{1}{9}) + (-1)(\frac{-2}{9}) + (3)(\frac{1}{9}) & (4)(\frac{7}{9}) + (-1)(\frac{-5}{9}) + (3)(\frac{-11}{9}) & (4)(\frac{-1}{3}) + (-1)(\frac{2}{3}) + (3)(\frac{2}{3}) \\ (2)(\frac{1}{9}) + (1)(\frac{-2}{9}) + (0)(\frac{1}{9}) & (2)(\frac{7}{9}) + (1)(\frac{-5}{9}) + (0)(\frac{-11}{9}) & (2)(\frac{-1}{3}) + (1)(\frac{2}{3}) + (0)(\frac{2}{3}) \\ (3)(\frac{1}{9}) + (2)(\frac{-2}{9}) + (1)(\frac{1}{9}) & (3)(\frac{7}{9}) + (2)(\frac{-5}{9}) + (1)(\frac{-11}{9}) & (3)(\frac{-1}{3}) + (2)(\frac{2}{3}) + (1)(\frac{2}{3}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} & \frac{28}{9} + \frac{5}{9} + \frac{-11}{3} & \frac{-4}{3} - \frac{2}{3} + \frac{6}{3} \\ \frac{2}{9} - \frac{2}{9} + 0 & \frac{14}{9} - \frac{5}{9} + 0 & \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} + 0 \\ \frac{1}{3} - \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & \frac{7}{3} - \frac{10}{9} - \frac{-11}{9} & -1 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

Realizamos las operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow R2 : (-2)R1 + R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow R2 : (-)R1 + R2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow R3 : (-3)R2 + (2)R3 \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow R3 : -R3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow R2 : (3)R3 + R2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -14 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow R2 : (\frac{1}{2})R2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow R1 : (-2)R3 + R1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 9 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right).$$

$$\rightarrow R2 : R1 + R2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right) \therefore D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$D * D^{-1} = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & 5 & -3 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Ejemplo del Modelo Insumo-producto

Suponer que una economía se puede organizar por la producción y uso de los productos de cuatro sectores. La demanda intermedia está dada por la matriz Z y la demanda final por el vector DF de acuerdo a las siguientes matrices:

$$Z = \begin{pmatrix} 80 & 120 & 48 & 35 \\ 150 & 60 & 80 & 120 \\ 48 & 50 & 175 & 20 \\ 72 & 90 & 125 & 80 \end{pmatrix}$$

$$DF = \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = Z1 + DF = \begin{pmatrix} 80 & 120 & 48 & 35 \\ 150 & 60 & 80 & 120 \\ 48 & 50 & 175 & 20 \\ 72 & 90 & 125 & 80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} (80)1 + (120)1 + (48)1 + (35)1 \\ (150)1 + (60)1 + (80)1 + (120)1 \\ (48)1 + (50)1 + (175)1 + (20)1 \\ (72)1 + (90)1 + (125)1 + (80)1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 283 \\ 410 \\ 293 \\ 367 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 320 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 483 \\ 730 \\ 393 \\ 867 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ya obtuvimos el vector de producción. Ahora, con este vector, calculamos la matriz de coeficientes directos de insumos.

$$\begin{aligned}
A = [z_{ij}/x_j] &= \begin{pmatrix} 80/483 & 120/730 & 48/393 & 35/867 \\ 150/483 & 60/730 & 80/393 & 120/867 \\ 48/483 & 50/730 & 175/393 & 20/867 \\ 72/483 & 90/730 & 125/393 & 80/867 \end{pmatrix} = \\
A &= \begin{pmatrix} 0,165631 & 0,164383 & 0,122137 & 0,040369 \\ 0,310559 & 0,082191 & 0,203562 & 0,138408 \\ 0,099378 & 0,068493 & 0,445293 & 0,023068 \\ 0,149068 & 0,123287 & 0,318066 & 0,092272 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A continuación calculamos la matriz de requerimientos totales o la inversa de Leontief. Esta matriz se obtiene como $L = (I - A)^{-1}$. Para encontrar L , primero tenemos que realizar la resta dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned}
I - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,165631 & 0,164383 & 0,122137 & 0,040369 \\ 0,310559 & 0,082191 & 0,203562 & 0,138408 \\ 0,099378 & 0,068493 & 0,445293 & 0,023068 \\ 0,149068 & 0,123287 & 0,318066 & 0,092272 \end{pmatrix} = \\
= I - A &= \begin{pmatrix} 1 - 0,165631 & 0 - 0,164383 & 0 - 0,122137 & 0 - 0,040369 \\ 0 - 0,310559 & 1 - 0,082191 & 0 - 0,203562 & 0 - 0,138408 \\ 0 - 0,099378 & 0 - 0,068493 & 1 - 0,445293 & 0 - 0,023068 \\ 0 - 0,149068 & 0 - 0,123287 & 0 - 0,318066 & 1 - 0,092272 \end{pmatrix} = \\
= I - A &= \begin{pmatrix} 0,834369 & -0,164383 & -0,122137 & -0,040369 \\ -0,310559 & 0,917809 & -0,203562 & -0,138408 \\ -0,099378 & -0,068493 & 0,554707 & -0,023068 \\ -0,149068 & -0,123287 & -0,318066 & 0,907728 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para encontrar $(I - A)^{-1}$, primero hay que encontrar el determinante de $(I - A)$. Como es una matriz 4×4 , tenemos que utilizar cofactores. Escogemos utilizar el primer renglón.

$$\begin{aligned}
|(I - A)| &= 0,834369(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0,917809 & -0,203562 & -0,138408 \\ -0,068493 & 0,554707 & -0,023068 \\ -0,123287 & -0,318066 & 0,907728 \end{vmatrix} + \\
&-0,164383(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0,310559 & -0,203562 & -0,138408 \\ -0,099378 & 0,554707 & -0,023068 \\ -0,149068 & -0,318066 & 0,907728 \end{vmatrix} + \\
&-0,122137(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0,310559 & 0,917809 & -0,138408 \\ -0,099378 & -0,068493 & -0,023068 \\ -0,149068 & -0,123287 & 0,907728 \end{vmatrix} + \\
&-0,040369(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -0,310559 & 0,917809 & -0,203562 \\ -0,099378 & -0,068493 & 0,554707 \\ -0,149068 & -0,123287 & -0,318066 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Realizamos los determinantes 3×3 por medio de la regla de Sarrus y obtenemos:

$$\begin{aligned}
|(I - A)| &= \\
&= (0,834369)(-1)^{1+1} [(0,917809)(0,554707)(0,907728) + (-0,203562)(-0,023068)(-0,123287) + (-0,138408)(-0,068493)(-0,318066) - \\
&(-0,138408)(0,554707)(-0,123287) - (0,917809)(-0,023068)(-0,318066) - (-0,203562)(-0,068493)(0,907728)] + \\
&(-0,164383)(-1)^{1+2} [(-0,310559)(0,554707)(0,907728) + (-0,203562)(-0,023068)(-0,149068) + (-0,138408)(-0,099378)(-0,318066) - \\
&(-0,138408)(0,554707)(-0,149068) - (-0,310559)(-0,023068)(-0,318066) - (-0,203562)(-0,099378)(-0,907728)] + \\
&(-0,122137)(-1)^{1+3} [(-0,310559)(-0,068493)(0,907728) + (0,917809)(-0,023068)(-0,149068) + (-0,138408)(-0,099378)(-0,123287) - \\
&(-0,138408)(-0,068493)(-0,149068) - (-0,310559)(-0,023068)(-0,123287) - (0,917809)(-0,099378)(0,907728)] + \\
&(-0,040369)(-1)^{1+4} [(-0,310559)(-0,068493)(-0,318066) + (0,917809)(0,554707)(-0,149068) + (-0,203562)(-0,099378)(-0,123287) - \\
&(-0,2003562)(-0,068493)(-0,149068) - (-0,310559)(0,554707)(-0,123287) - (0,917809)(-0,099378)(-0,318066)]
\end{aligned}$$

$$|(I - A)| = 0,30914154784329717$$

$$L = \begin{pmatrix} 1,38993888 & 0,3013057 & 0,48547375 & 0,12009405 \\ 0,61129945 & 1,2872747 & 0,74599754 & 0,2424249 \\ 0,34243098 & 0,22554339 & 2,01878658 & 0,10092252 \\ 0,43127163 & 0,3033486 & 0,88842575 & 1,18966309 \end{pmatrix}$$

Si la demanda final cambia a $DF1$, entonces, cuánta producción es necesaria para compensar este cambio en la demanda final?

$$DF1 = \begin{pmatrix} 210 \\ 350 \\ 115 \\ 505 \end{pmatrix}$$

El nuevo nivel de producción se encuentra por medio de la siguiente operación:

$$X1 = LDF1 = \begin{pmatrix} 1,389938 & 0,301305 & 0,485473 & 0,120094 \\ 0,611299 & 1,287274 & 0,745997 & 0,242424 \\ 0,342430 & 0,225543 & 2,018786 & 0,100922 \\ 0,431271 & 0,303348 & 0,888425 & 1,189663 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 350 \\ 115 \\ 505 \end{pmatrix} =$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 1,389938 & 0,301305 & 0,485473 & 0,120094 \\ 0,611299 & 1,287274 & 0,745997 & 0,242424 \\ 0,342430 & 0,225543 & 2,018786 & 0,100922 \\ 0,431271 & 0,303348 & 0,888425 & 1,189663 \end{pmatrix}$$

6.6. Ejemplos de código escrito con Python

Sistema de Ecuaciones Lineales3

July 29, 2021

```
[30]: """
Dr. Martha Gabriela Alatraste Contreras
Ingeniero Abisai Israel De La Rosa Gudiño
Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
@author: abisai.delarosa
"""

"""Para estos ejemplos, y los ejercicios que el alumno quiera experimentar, se
↳ debe de tomar en cuenta que el sistema debe
de tener solución única, si el sistema de ecuaciones no tiene solución única, al
↳ correr el sistema marcará un error
como se puede ver en el último ejercicio"""

"""1 Ejemplo 2x+y=1
      x+y=4"""
import numpy as np # se importa la librería numpy para utilizarla como arreglo
↳ abreviandola como np

a=np.array([[2,1],[1,1]])#Se guarda los coeficientes de las variables lineales
↳ por columna consecutivamente (arreglo array)
b=np.array([1,4])# Se guarda los coeficientes independientes (arreglo array)
x=np.linalg.solve(a,b) #se hace la solución del sistema y se guarda en una
↳ variable utilizando la función linalg obtenida de la
#librería numpy
print("(x,y)=",x)# se imprime la variable para mostrar el resultado

"""Para poder realizar la gráfica, debemos de realizar el despeje de la
↳ variable independiente
Se le invita al alumno y al profesor a graficar los demás sistemas de
↳ ecuaciones, sólo las de dos variables, y crear sus propios
ejercicios
y=-2x+1
y=-x+4"""

import matplotlib.pyplot as plt #Llamamos a la librería matplotlib.pyplot para
↳ maopear
x=[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]# Damos el rango de valores de nuestra
↳ gráfica
```

Script_Multiplicación de dos matrices_1parte

July 29, 2021

```
[ ]: """
Created on Fri Mar 19 21:45:20 2021
Dr. Martha Gabriela Alatraste Contreras
Ingeniero Abisai Israel De La Rosa Gudiño
Multiplicación de matrices mediante código
@author: abisai.delarosa
"""

"""Este ejemplo, es un ejemplo iterativo de multiplicación de 2 matrices A y B
↪ en donde el alumno y profesor pueden modificar; es decir
declarar mas matrices para multiplicar, dependiendo la experiencia que vaya
↪ adquiriendo, así también el ejemplo está
realizado para indicar que el alumno está cometiendo un error al momento de de
↪ declarar el número de columnas de A y el número
de reblones de B"""

"""El alumno y el profesor pueden copiar este Script para que lo prueben y
↪ puedan interactuar con el ya sea en Jupyter o en
la consola de Spyder"""
import numpy #Se importa la libreria numpy para los arreglos de las matrices
import sys #Importamos a sys para marcar el error
print("Para este programa necesitamos que el usuario indique lo que se le
↪ pide") #Saludo o manera formal de iniciar el programa, no importante
reg1=int(input('Escribe el número de renglones de la Matriz A :'))#Declaramos
↪ el número de renglones de A
column1=int(input('Escribe el número de columnas de la Matriz A :'))#Declaramos
↪ el número de columnas de A
reg2=int(input('Escribe el número de renglones de la Matriz B :'))#Declaramos
↪ el número de renglones de B
column2=int(input('Escribe el número de columnas de la Matriz B :'))#Declaramos
↪ el número de columnas de B
##VERIFICAR SI SE PUEDE REALIZAR LA MULTIPLICACIÓN
if(column1 != reg2): #Si el numero de columnas de A es diferente de renglones de
↪ B
    print("No puedes realizar la multiplicación, analiza por qué razón") #Se
↪ imprime un mensaje avisando que no se puede realizar
#la multiplicación
    sys.exit()#Se sale del programa
```

INVERSA DE MATRICES_SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES MEDIANTE INVERSA DE LA MATRIZ

July 30, 2021

```
[1]: """
Dr. Martha Gabriela Alatraste Contreras
Ing. Abisai Israel De La Rosa Gudiño
INVERSA DE UNA MATRIZ UTILIZANDO LIBRERÍAS numpy
@author: abisai.delarosa

Para estos ejercicios, se espera que el alumno haya entendido el proceso de
↳ obtener una matriz inversa con todos los métodos
descritos, para después así, hacer uso de este script y poder apoyarse de él,
↳ así también como crear e investigar qué más
puede realizar con lo presentado
"""
"""Ejemplo #1 M=[2 3
                4 5]"""
import numpy as np #Se utiliza la libreria "numpy" para mandar a llamar a la
↳ función array (arreglo) que servirá para
                #ordenar los elementos de nuestra matriz
m=np.array([[2,3],[4,5]])# Se realiza un arreglo con np.array para ordenar los
↳ renglones de la matriz, en cada [] van las
                #columnas de la matriz
d=np.linalg.inv(m)# Se utiliza la función "linalg.inv" para obtener la inversa
↳ de m

print("M'",d)# Se imprime la inversa
```

```
M'= [[-2.5  1.5]
      [ 2.  -1. ]]
```

```
[2]: """Una manera de comprobar que la Matriz inversa es correcta, es con la
↳ siguiente función: AA'=I"""
print(np.dot(m,d)) # Comprobación AA'=I
```

```
[[1.  0.]
 [0.  1.]
```

Determinantes y regla de Cramer

Autor: Dra. Martha G. Alatríste Contreras

Cuaderno de ejercicios de calculo diferencial e integral y algebra lineal

Dra. Martha G. Alatríste Contreras

Ing. Abisai Israel De la Rosa

```
In [2]: #Importamos las librerias a usar
import numpy as np

#Creamos los arrays o matrices que vamos a utilizar
a = np.array([[7,-1,30],[0.16*(60),0.12*(80),0.09*(30)],[0,-4,1]])

aD = np.array([[500000,80,30],[68400,0.12*(80),0.09*(30)],[0,-4,1]])

aE = np.array([[60,500000,30],[0.16*(60),68400,0.09*(30)],[0,0,1]])

aF = np.array([[60,80,500000],[0.16*(60),0.12*(80),68400],[0,-4,0]])
```

Calculamos el determinante de cada matriz con el metodo det() de la libreria de algebra lineal de numpy

```
In [3]: deta = np.linalg.det(a)
print(deta)

detaD = np.linalg.det(aD)
print(detaD)

detaE = np.linalg.det(aE)
print(detaE)

detaF = np.linalg.det(aF)
print(detaF)

-999.5999999999998
-3479999.9999999997
-696000.0
-2784000.0000000005
```

Aplicamos la regla de Cramer para encontrar los valores solucion

```
In [4]: D = detaD/deta
print(D)

E = detaE/deta
print(E)

F = detaF/deta
print(F)

3481.392557022807
696.278511404562
2785.1140456182484
```

Ejemplo de Modelo Insumo-Producto

Cuaderno de ejercicios de calculo diferencial y algebra lineal

Dra. Martha G. Alatríste Contreras e Ing. Abisai Israel De la Rosa

Autor: Dra. Martha G. Alatríste Contreras

Agosto 2021

Este código está escrito para introducir el tema de Modelo insumo-producto de Leontief y para introducir la programación con Python.

```
In [2]: #Importar librerías a utilizar
import numpy as np
from numpy.linalg import inv
```

Para empezar necesitamos los arreglos numéricos (vectores y matrices): demanda intermedia Z, demanda final DF y producción X.

```
In [3]: sectors = [1,2,3,4]

Z = [[80,120,48,35],
     [150,60,80,120],
     [48,50,175,20],
     [72,90,125,80]]
```

Creemos un diccionario con los valores de demanda final y producción utilizando dict(), donde producción se calcula $X = Z1 + DF$

```
In [4]: DF0 = [[200],[320],[100],[500]]

DF0array = np.array(DF0)
FD0dict = dict()
for index,item in enumerate(DF0):
    FD0dict[index] = item

X = np.dot(Z,np.ones((4,1))) + DF0array

Xarray = np.array(X.flatten())

print('X:',Xarray)

XDict = dict()
for index,item in enumerate(X):
    XDict[index] = item
```

X: [483. 730. 393. 867.]

De acuerdo al modelo insumo-producto tenemos: $X = Z1 + DF$ donde X es el vector producción, Z es la matriz nxn de demanda intermedia, 1 es un vector de unos llamado vector suma y DF es la demanda final. Si definimos $A = [a_{ij}] = [z_{ij}/x_j] \rightarrow X = AX + DF$ Despejando X, obtenemos: $X = (I - A)^{-1}DF \rightarrow X = LDF$ donde I es la matriz identidad que tiene la misma dimensión que A y L es la inversa de Leontief.

```
In [5]: Alist = []
for i in range(len(sectors)):
    Arow = []
    for j in range(len(sectors)):
        if Xarray[j]!=0:
            aij = Z[i][j]/Xarray[j]
        elif Xarray[j]==0:
            aij = 0
        Arow.append(aij)
    Alist.append(Arow)
A = np.array(Alist)

print('A:',A)

A: [[0.16563147 0.16438356 0.1221374 0.04036909]
     [0.31055901 0.08219178 0.20356234 0.1384083 ]
     [0.09937888 0.06849315 0.44529262 0.02306805]
     [0.14906832 0.12328767 0.31806616 0.0922722 ]]
```

Ahora creamos la matriz identidad I y la matriz L o inversa de Leontief.

```
In [6]: a = len(A)
I = np.identity(a,float)
IA = I-A
L = inv(IA)

print('L:',L)

L: [[1.38993888 0.3013057 0.48547375 0.12009405]
     [0.61129945 1.2872747 0.74599754 0.2424249 ]
     [0.34243098 0.22554339 2.01878658 0.10092252]
     [0.43127163 0.3033486 0.88842575 1.18966309]]
```

Si cambia la demanda final y tenemos que calcular cuánta producción en cada sector es necesaria para compensar este cambio, utilizamos lo que estipula el modelo insumo-producto: $X1 - X0 = L * (DF1 - DF0)$. Definimos el cambio en la demanda final como: $df = DF1 - DF0$

```
In [7]: DF1 = [[210],[350],[115],[505]]
DF1array = np.array(DF1)
df = DF1array - DF0array
```

Calcular el nuevo nivel de producción después del cambio en la demanda final

```
In [8]: X1 = np.dot(L,DF1array)

print('X1:',X1)

X1: [513.82113626]
     [787.13332323]
     [433.97702287]
     [899.68787602]]
```

Si queremos el cambio en el nivel de producción calculamos $x = X1 - X0 = Ldf$

```
In [9]: x = np.dot(L,df)

print('x:',x)

x: [[30.82113626]
     [57.13332323]
     [40.97702287]
     [32.68787602]]
```


Referencias

- Chiang, A. (2006). Métodos fundamentales de la economía matemática. McGraw Hill, 4a Ed.
- Granville, W. A. (2015). Cálculo Diferencial e Integral. Limusa Noriega Ed.
- Grossman, S. I. and Flores Godoy, J. (2012). Álgebra Lineal. Séptima Edición. McGrawHill.
- Varian, H. R. (2006). Intermediate Microeconomics A Modern Approach. Eighth Edition.
- Berson, M. J. (1996). Journal of Research on Computing in Education.ERIC Number: EJ531085.
- Haeussler, E. F., Jr. and Richard S. P. (2008). Matemáticas para administración y economía. Prentice Hall. Décima Edición.
- Aleskerov F., H. Ersel, y D. Piontkovski (2011). Linear Algebra for Economists, Springer.
- González, S. E. y L. Speziale de Guzmán (1985). Apuntes de Álgebra Lineal, División de Ciencias Básicas, Departamento de Matemáticas Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Goldwasser, M. and D. Letscher (2008). Object-Oriented Programming in Python, Pearson Prentice Hall, New Jersey.
- Lambert, K. (2012). Fundamentals of Python: First Programs (Introduction to Programming), Course Technology, Cengage Learning.
- Dierbach, C (2013). Introduction to Computer Science Using

Python: A Computational Problem Solving Focus. John
Wiley & Sons Ltd