



Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

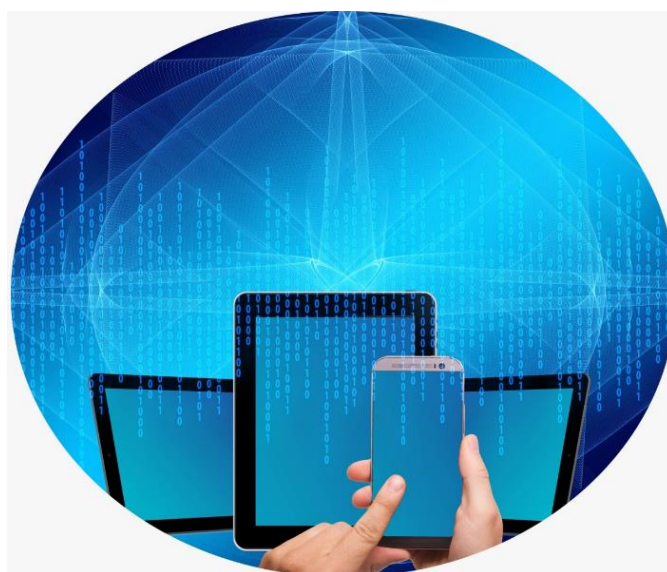
Proyecto DGAPA PAPIME PE306019

Solución numérica de ecuaciones de una sola variable

Mayra Olguín Rosas

Socorro Martínez José

Adalberto López López



Índice

Introducción.....	4
1 Método de Bisección	5
1.1 Algoritmo del Método de Bisección	9
1.2 Ventajas y Desventajas del Método.....	9
1.3 Ejemplos	12
2 Método de Falsa Posición.....	60
2.1 Algoritmo del Método de Falsa Posición.....	62
2.2 Ventajas y Desventajas del Método.....	63
2.3 Ejemplos	64
3 Método de Newton	105
3.1 Algoritmo del Método de Newton.....	107
3.2 Ventajas y Desventajas del Método.....	112
3.3 Ejemplos	112
4 Método de la Secante	149
4.1 Algoritmo del Método de la Secante	151
4.2 Ventajas y Desventajas del Método.....	155
4.3 Ejemplos	155
5 Método de Bairstow.....	196
5.1 Algoritmo del Método de Bairstow	199
5.2 Ventajas y Desventajas del Método.....	200
5.3 Convergencia del método.....	201
5.4 Ejemplos	201
Ejercicios Propuestos	241
Método de Bisección.....	241

Método de Falsa Posición	241
Método de Newton	242
Método de la Secante.....	243
Método de Bairstow.....	244
Referencias	245

Introducción

En muchas aplicaciones de la ingeniería y la ciencia se presentan con frecuencia problemas que no se pueden resolver analíticamente¹, por lo que se recurre a los métodos numéricos para poder encontrar la solución. El objetivo principal de este tema es aplicar algunos métodos numéricos para el cálculo de raíces reales² de ecuaciones no lineales de una variable, y encontrar los valores para los cuales:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Los valores que hacen que una función $f(x) = 0$, se conocen con el nombre de **raíces o ceros** de f . Se analizarán los siguientes métodos numéricos, por medio de los cuales se obtendrá un valor x_n tal que:

$$x_n \approx x \quad (2)$$

$$f(x_n) \approx 0 \quad (3)$$

1. **Métodos cerrados:** requieren dos valores iniciales x_0 y x_1 ,³ que deben encerrar a la raíz.
 - a. Método de Bisección.
 - b. Método de Falsa Posición.
2. **Métodos abiertos:** requieren un sólo valor de inicio x_0 o dos de ellos x_0 y x_1 , pero que no necesariamente deben encerrar a la raíz.
 - a. Método de Newton.
 - b. Método de la secante.
 - c. Método de Bairstow

¹ Los métodos analíticos consisten en despejar la variable x de la función $f(x)$.

² Solo se estudiarán raíces complejas para ecuaciones polinómicas.

³ Los valores iniciales también se pueden denominar como a y b .

1 Método de Bisección

En este capítulo estudiaremos uno de los problemas básicos de la aproximación numérica: el problema de la búsqueda de raíces, el cual consiste en obtener una raíz o solución, de una ecuación de la forma $f(x) = 0$ para una función dada f .

El Método de Bisección es el más antiguo y sencillo para determinar las raíces reales de una ecuación, también denominado **Método de Bolzano**, ya que Bernard Bolzano fue el primero en proponerlo⁴. Comienza con un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, garantizando así la existencia de al menos una raíz en el intervalo $[a, b]$, esta es una consecuencia del Teorema del Valor Medio o Teorema de Lagrange, que se ocupa en funciones continuas para el cálculo de derivadas.

Teorema 1

Si f es una función continua definida en el intervalo $[a, b]$, y se satisface $f(a) * f(b) < 0$, entonces existe al menos un número x en (a, b) tal que $f(x) = 0$.

Para simplificar, asumimos que $[a, b]$ contiene exactamente una raíz x . (El método también se puede aplicar cuando existe más de una raíz en $[a, b]$; pero cuando esto sucede no se garantiza que el método converja a la solución buscada).

Éste método consiste en dividir sucesivamente el intervalo $[a, b]$ por la mitad, hasta que la longitud del subintervalo tienda a cero.

En la Figura 1 se muestra la representación gráfica del método de bisección.

⁴ Bernard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano (Praga, Bohemia -actual República Checa-, 5 de octubre de 1781 – ídem, 18 de diciembre de 1848), conocido como Bernard Bolzano fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemio que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento. Ha sido reconocido como el Rafael Alberti de la filosofía y las matemáticas. Fuente: Pagina web: Matemáticos en México, Recuperado de matematicos.matem.unam.mx, consultado el 29 de agosto de 2020.

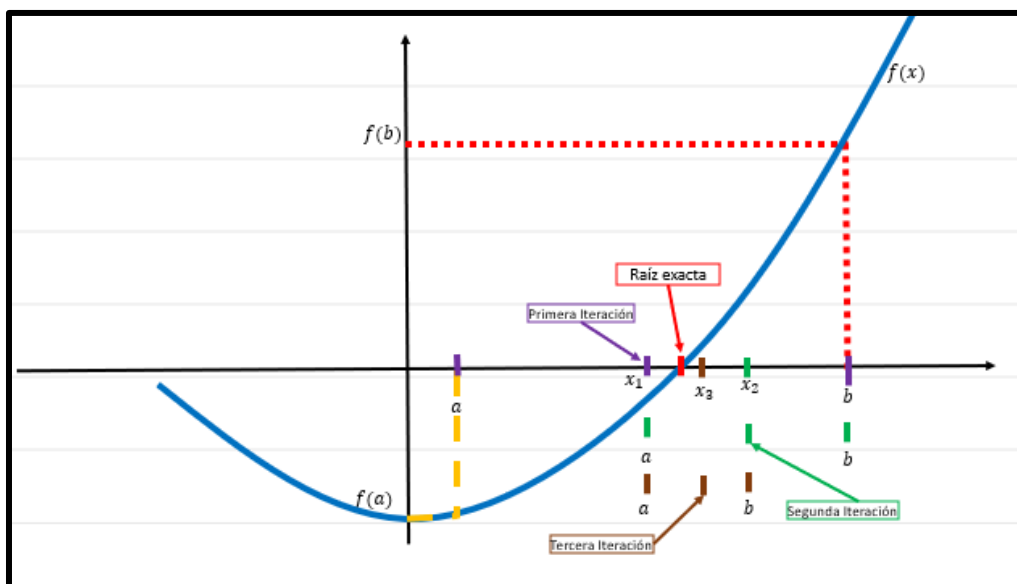


Figura 1: Método de Bisección.

El primer paso para garantizar que el Método de Bisección converja a la solución deseada, es comprobar que f es continua en el intervalo $[a, b]$ ⁵; y que en éste intervalo se encuentra exactamente una raíz ⁶; si se cumplen estos dos requisitos, se garantiza la convergencia del método; si cualquiera de estos no se cumple no quiere decir que el método diverja.

A continuación, se calcula para la primera iteración ($n = 1$) el punto medio del intervalo, que será la primera aproximación a la raíz. Este valor está dado por:

$$x_1 = a + \frac{b - a}{2} = \frac{2a + b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

⁵ Cuando no hay información previa acerca de los valores aproximados de las raíces, una forma sencilla para hallar intervalos $[a, b]$ que contengan una raíz es escribir una tabla de la función para valores de x con separación uniforme; ó graficar la función con ayuda de un programa.

⁶ Una forma de verificar estos dos requisitos es graficando la función $f(x)$.

De esta forma para obtener el n – ésimo punto medio, la ecuación será:

Fórmula de iteración para el Método de Bisección

$$x_n = \frac{a + b}{2} \quad (4)$$

Después se verifican los signos de $f(a) * f(x_n)$ y $f(x_n) * f(b)$, para saber en que subintervalo se encuentra la raíz:

1. Si $f(a) * f(x_n) < 0$, entonces en el subintervalo $[a, x_n]$ se encuentra la raíz, renombrando $a = a$ y $b = x_n$.
2. Si $f(a) * f(x_n) > 0$, entonces en el subintervalo $[x_n, b]$ se encuentra la raíz, renombrando $a = x_n$ y $b = b$.
3. Si $f(a) * f(x_n) = 0$, entonces x_n ⁷ es la raíz.

Si ocurre alguno de los dos primeros casos, se calcula para la segunda iteración el punto medio del nuevo intervalo con la ecuación (4), siendo este la aproximación más actualizada de la raíz.

Se repite el proceso hasta que se cumplan los siguientes criterios de convergencia:

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq Tol \quad (5)$$

$$|f(x_n)| \leq Tol \quad (6)$$

$$n > N \quad (7)$$

Donde Tol es alguna tolerancia definida > 0 y N es un número máximo de iteraciones.

Para asegurar que se ha encontrado una aproximación a la raíz se deben cumplir simultáneamente los criterios (5) y (6), en su defecto se debe cumplir el criterio (7), el cual nos indicará que no se ha logrado la convergencia, en un cierto número N de iteraciones.

⁷ Debido a errores de redondeo, es poco probable que $f(x_n) = 0$, por lo que se deben utilizar otros criterios para saber cuando detener el proceso.

Teorema 2

Si f es una función continua definida en el intervalo $[a, b]$, y se satisface que $f(a) * f(b) < 0$.
El Método de Bisección genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que aproxima una raíz de f tal que:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq Tol \quad \text{para} \quad n \geq 1 \quad (8)$$

Aplicando el Teorema 2, se puede despejar n de la ecuación (8), para saber cuántas iteraciones se necesitan realizar con una tolerancia (Tol); obteniéndose:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{b-a}{2^n} \\ &b-a \leq 2^n Tol \\ &\frac{b-a}{Tol} \leq 2^n \\ &\log\left(\frac{b-a}{Tol}\right) \leq \log 2^n \\ &\log\left(\frac{b-a}{Tol}\right) \leq n \log 2 \\ &\frac{\log\left(\frac{b-a}{Tol}\right)}{\log 2} \leq n \\ &\therefore N > \frac{\log\left(\frac{b-a}{Tol}\right)}{\log 2} \end{aligned} \quad (9)$$

Nota: Es necesario utilizar más iteraciones de las obtenidas al calcular $\frac{\log\left(\frac{b-a}{Tol}\right)}{\log 2}$ ya que deben cumplirse simultáneamente los criterios: $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right| \leq Tol$ y $|f(x_n)| \leq Tol$ para asegurar que se ha encontrado una aproximación a la raíz; es decir, no sólo se está tomando en cuenta un error determinado, sino que la función $|f(x)| \approx Tol$ y la ecuación (9) solo toma en cuenta el intervalo y el error.

1.1 Algoritmo del Método de Bisección

Algoritmo 1

Método de Bisección.⁸

Para encontrar una aproximación de la raíz de una ecuación $f(x) = 0$ donde f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) * f(b) < 0$. (Para garantizar la convergencia del método).

Datos: $f(x)$, el intervalo $[a, b]$, una tolerancia Tol , y un número máximo de iteraciones N .

Resultados: Una raíz aproximada o un mensaje de falla.

- **Paso 1:** Calcular $\frac{\log(\frac{b-a}{Tol})}{\log 2} + 10$, redondear a enteros e igualar con N .
- **Paso 2:** Hacer $n = 1$.
- **Paso 3:** Mientras $n \leq N$, repetir los pasos 4 a 15.
 - **Paso 4:** Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
 - **Paso 5:** Si $n = 1$ entonces realizar las siguientes comparaciones. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 6:** Si $f(a) * f(b) = 0$ entonces IMPRIMIR “Una raíz de la ecuación dada es uno de los extremos del intervalo” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 7:** Si $f(a) * f(b) > 0$, entonces IMPRIMIR “Intervalo incorrecto, no hay raíz o hay varias raíces” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 8:** Si $f(a) * f(b) < 0$, entonces IMPRIMIR “Intervalo correcto” y CONTINUAR. De lo contrario TERMINAR.
 - **Paso 9:** Calcular $x_n = \frac{a+b}{2}$
 - **Paso 10:** Calcular $f(x_n)$.

⁸ Burden, 2002, como se citó en Sánchez, 2007.

- **Paso 11:** Si $f(a) * f(x_n) = 0$ entonces IMPRIMIR *"Una raíz de la ecuación dada es, x_n "* y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 12:** Si $f(a) * f(x_n) = 0$, entonces hacer $a = a$ y $b = x_n$, de lo contrario hacer $a = x_n$ y $b = b$.
- **Paso 13:** Si $n > 1$ entonces calcular $\varepsilon = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$ y realizar la siguiente comparación. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 14:** Si $\varepsilon \leq Tol$ y $|f(x_n)| \leq Tol$ entonces IMPRIMIR *"Una raíz aproximada de la ecuación dada es" x_n* y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 15:** Hacer $n = n + 1$.
- **Paso 16:** IMPRIMIR mensaje de falla *"El método no converge a una raíz"* y TERMINAR.

1.2 Ventajas y Desventajas del Método

Ventajas

1. Encuentra una raíz aun cuando la función no sea analítica.
2. Siempre encuentra una raíz de la función si se sabe que la raíz existe en un intervalo dado; es decir siempre converge.
3. Sirve como punto inicial para la aplicación de otro método.
4. Por el Teorema 2 se sabe cuántas iteraciones se necesitan realizar con un error determinado Tol .
5. La longitud del subintervalo que contiene a la raíz tiende a cero, por lo que la aproximación puede tomarse como un criterio de aproximación a la raíz.

Desventajas

1. Su convergencia es muy lenta comparada con la convergencia de otros métodos, por lo que se sugiere escoger un intervalo inicial $[a, b]$, tan pequeño como sea posible.
2. No toma en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , solo toma en cuenta el signo de $f(x_n)$, lo que puede resultar que una aproximación intermedia, mejor que la respuesta aproximación final, pase desapercibida.
3. Puede atrapar una singularidad como si fuera una raíz, debido a que el método no distingue las raíces de las singularidades.
4. Una tarea importante que se debe de realizar antes de aplicar el método para garantizar la convergencia es encontrar un intervalo que contenga la raíz buscada, así como verificar que la función sea continua en él. Lo anterior no significa que si no se cumple cualquiera de estos requisitos el método vaya a diverger.

1.3 Ejemplos

Ejemplo 1: Usar el método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación, en el intervalo $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-5} y un redondeo de 6 decimales. Ejercicio tomado de Wheatley, G. (2001).

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, obteniendo la Figura 2; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

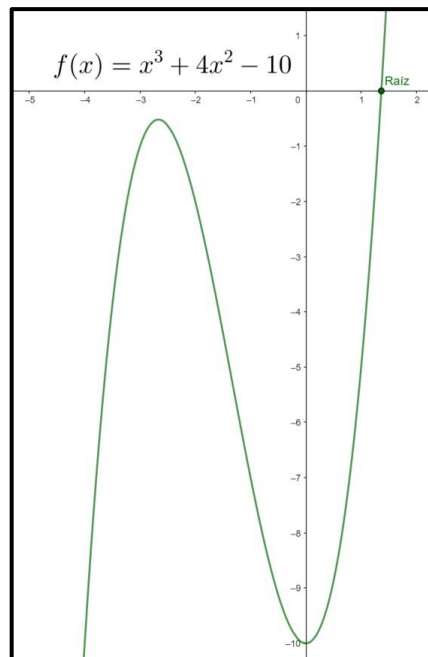


Figura 2 Gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = -5$$

$$f(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

Después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.5) = (1.5)^3 + 4(1.5)^2 - 10 = 2.375$$

y se multiplica $f(1) * f(1.5) = -11.875$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 1$ y $b = 1.5$. Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.25) = (1.25)^3 + 4(1.25)^2 - 10 = -1.796875$$

y se multiplica $f(1) * f(1.25) = -8.984375$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 1.25$ y $b = 1.5$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que

$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 17. Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{17}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 1.

Cuadro 1. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-5.000000	14.000000	1.500000	11.375000	-7.500000	-----
2	1.000000	1.500000	-5.000000	11.375000	1.250000	-1.796875	8.984375	0.200000
3	1.250000	1.500000	-1.796875	11.375000	1.375000	0.162109	-0.291290	0.090909
4	1.250000	1.375000	-1.796875	0.162109	1.312500	-0.848389	1.524448	0.047619
5	1.312500	1.375000	-0.848389	0.162109	1.343750	-0.350983	0.297770	0.023256
6	1.343750	1.375000	-0.350983	0.162109	1.359375	-0.096409	0.033838	0.011494
7	1.359375	1.375000	-0.096409	0.162109	1.367188	0.032356	-0.003119	0.005714
8	1.359375	1.367188	-0.096409	0.032356	1.363281	-0.032150	0.003100	0.002865
9	1.363281	1.367188	-0.032150	0.032356	1.365234	0.000072	-0.000002	0.001431

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
10	1.363281	1.365234	-0.032150	0.000072	1.364258	-0.016047	0.000516	0.000716
11	1.364258	1.365234	-0.016047	0.000072	1.364746	-0.007989	0.000128	0.000358
12	1.364746	1.365234	-0.007989	0.000072	1.364990	-0.003959	0.000032	0.000179
13	1.364990	1.365234	-0.003959	0.000072	1.365112	-0.001944	0.000008	0.000089
14	1.365112	1.365234	-0.001944	0.000072	1.365173	-0.000936	0.000002	0.000045
15	1.365173	1.365234	-0.000936	0.000072	1.365204	-0.000432	0.000000	0.000022
16	1.365204	1.365234	-0.000432	0.000072	1.365219	-0.000180	0.000000	0.000011
17	1.365219	1.365234	-0.000180	0.000072	1.365227	-0.000054	0.000000	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.25 - 1.5}{1.25} \right| = 0.2$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.375 - 1.25}{1.375} \right| = 0.09909$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 1.

Comprobación:

$$f(1.365227) = (1.365227)^3 + 4(1.365227)^2 - 10 = -0.000054 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.365227 - 1.365219}{1.365227} \right| = 0.000006 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.365227** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 2: Usar el método de Bisección para encontrar una aproximación de la primera raíz positiva de la siguiente ecuación; en el intervalo $[0,1]$ con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

$$f(x) = 3x^2 - e^x$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se gráfica la función $f(x) = 3x^2 - e^x$, obteniendo en la Figura 3; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

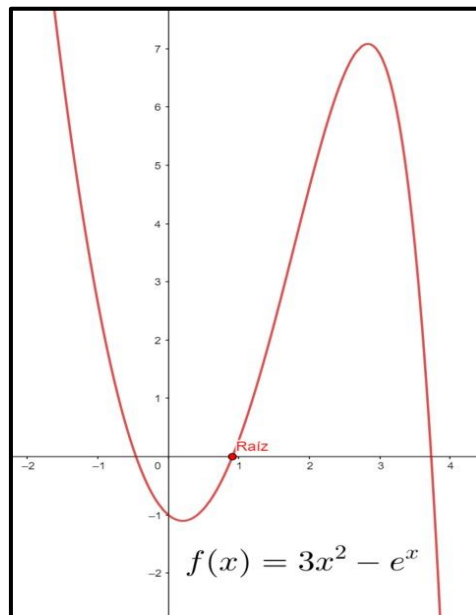


Figura 3. Gráfica $f(x) = 3x^2 - e^x$

Utilizando el algoritmo (1), sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, obteniéndose:

$$f(0) = 3(0)^2 - e^{(0)} = -1$$

$$f(1) = 3(1)^2 - e^{(1)} = 0.281718$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

Después se calcula $f(x_1)$: 0

$$f(0.5) = 3(0.5)^2 - e^{0.5} = -0.898721$$

y se multiplica $f(0) * f(0.5) = 0.898721$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 0.5$ y $b = 1$. Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.75) = 3(0.75)^2 - e^{(0.75)} = -0.4295$$

y se multiplica $f(0.5) * f(0.75) = 0.386001$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 0.75$ y $b = 1$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 18.

Para obtener $x_3, x_4, x_5, \dots, x_{18}$: se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	0.281718	0.500000	-0.898721	0.898721	-----
2	0.500000	1.000000	-0.898721	0.281718	0.750000	-0.429500	0.386001	0.333333
3	0.750000	1.000000	-0.429500	0.281718	0.875000	-0.102000	0.043809	0.142857
4	0.875000	1.000000	-0.102000	0.281718	0.937500	0.083129	-0.008479	0.066667
5	0.875000	0.937500	-0.102000	0.083129	0.906250	-0.011157	0.001138	0.034483
6	0.906250	0.937500	-0.011157	0.083129	0.921875	0.035561	-0.000397	0.016949
7	0.906250	0.921875	-0.011157	0.035561	0.914063	0.012095	-0.000135	0.008547
8	0.906250	0.914063	-0.011157	0.012095	0.910156	0.000442	-0.000005	0.004292
9	0.906250	0.910156	-0.011157	0.000442	0.908203	-0.005364	0.000060	0.002151

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
10	0.908203	0.910156	-0.005364	0.000442	0.909180	-0.002462	0.000013	0.001074
11	0.909180	0.910156	-0.002462	0.000442	0.909668	-0.001010	0.000002	0.000537
12	0.909668	0.910156	-0.001010	0.000442	0.909912	-0.000284	0.000000	0.000268
13	0.909912	0.910156	-0.000284	0.000442	0.910034	0.000079	0.000000	0.000134
14	0.909912	0.910034	-0.000284	0.000079	0.909973	-0.000102	0.000000	0.000067
15	0.909912	0.909973	-0.000284	-0.000102	0.909943	-0.000193	0.000000	0.000034
16	0.909912	0.909943	-0.000284	-0.000193	0.909927	-0.000239	0.000000	0.000017
17	0.909912	0.909927	-0.000284	-0.000239	0.909920	-0.000261	0.000000	0.000008
18	0.909912	0.909920	-0.000284	-0.000261	0.909916	-0.000273	0.000000	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.75 - 0.5}{1.25} \right| = 0.333333$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.875 - 0.75}{0.875} \right| = 0.142857$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 2.

Comprobación:

$$f(0.909916) = 3(0.909916)^2 - e^{(0.909916)} = 0.000273 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.909916 - 0.909920}{0.909916} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.909916** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 3: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación a la raíz de la siguiente ecuación; en $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar un redondeo de 6 decimales. . Ejercicio tomado de Wheatley, G. (2001).

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 4 donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

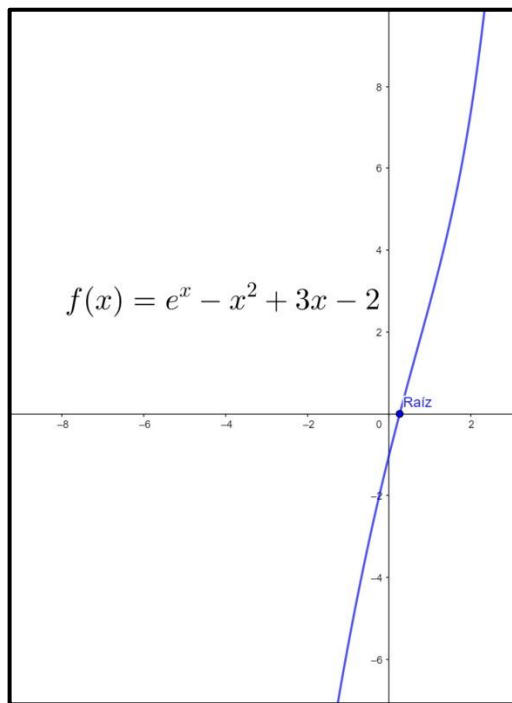


Figura 4. Gráfica $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

Utilizando el algoritmo 1 sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, obteniéndose:

$$f(0) = e^{(0)} - (0)^2 + 3(0) - 2 = -1.000000$$

$$f(1) = e^{(1)} - (1)^2 + 3(1) - 2 = 2.718282$$

Como $f(0)$ y $f(1) < 0$, el intervalo es correcto, ya que encierra una raíz (4); a continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.50000$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.5) = e^{(0.5)} - (0.5)^2 + 3(0.5) - 2 = 0.898721$$

Luego se calcula $f(x_2)$: con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0 + 0.50000}{2} = 0.25000$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.25000) = e^{(0.250000)} - (0.25000)^2 + 3(0.25000) - 2 = -0.028475$$

y se multiplica $f(0) * f(0.25000) = 0.0284751$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0.25000$ y $b = 0.50000$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 19.

Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{19}$: se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 3.

Cuadro 3. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	2.718282	0.500000	0.898721	(+)(-) < 0	-----
2	0.000000	0.500000	-1.000000	0.898721	0.250000	-0.028475	(-)(-) > 0	1.000000
3	0.250000	0.500000	-0.028475	0.898721	0.375000	0.439366	(+)(-) < 0	0.291667
4	0.250000	0.375000	-0.028475	0.439366	0.312500	0.206682	(-)(+) < 0	0.200000
5	0.250000	0.312500	-0.028475	0.206682	0.281250	0.089433	(-)(-) > 0	0.111111
6	0.250000	0.281250	-0.028475	0.089433	0.265625	0.030564	(-)(-) > 0	0.058824
7	0.250000	0.265625	-0.028475	0.030564	0.257813	0.001066	(+)(-) < 0	0.030303

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
8	0.250000	0.257813	-0.028475	0.001066	0.253906	-0.013699	$(-)(-) > 0$	0.015385
9	0.253906	0.257813	-0.013699	0.001066	0.255859	-0.006315	$(+)(-) < 0$	0.007634
10	0.255859	0.257813	-0.006315	0.001066	0.256836	-0.002624	$(-)(-) > 0$	0.003802
11	0.256836	0.257813	-0.002624	0.001066	0.257324	-0.000779	$(-)(-) > 0$	0.001898
12	0.257324	0.257813	-0.000779	0.001066	0.257568	0.000144	$(+)(-) < 0$	0.000948
13	0.257324	0.257568	-0.000779	0.000144	0.257446	-0.000317	$(-)(-) > 0$	0.000474
14	0.257446	0.257568	-0.000317	0.000144	0.257507	-0.000087	$(-)(-) > 0$	0.000237
15	0.257507	0.257568	-0.000087	0.000144	0.257538	0.000029	$(+)(-) < 0$	0.000118
16	0.257507	0.257538	-0.000087	0.000029	0.257523	-0.000029	$(-)(-) > 0$	0.000059
17	0.257523	0.257538	-0.000029	0.000029	0.257530	0.000000	$(+)(-) < 0$	0.000030
18	0.257523	0.257530	0.000000	0.000029	0.257526	-0.000015	$(-)(+) < 0$	0.000015
19	0.257523	0.257526	-0.000015	0.000029	0.257524	-0.000022	$(-)(-) > 0$	0.000007

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.250000 - 0.500000}{0.250000} \right| = 1.000000$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.375000 - 0.250000}{0.375000} \right| = 0.291667$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 3.

Comprobación:

$$f(0.257530) = e^{(0.257530)} - (0.257530)^2 + 3(0.257530) - 2 = 0.000000$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 0.2575302854$. Se puede observar que $x_{17} = 0.257530$ es una mejor aproximación de x que x_{19} , ya que $|f(x_{17})| < |f(x_{19})|$, es decir $f(x_{17})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto, ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 0.257530$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es $x = 0.257524$.

Con el ejemplo 3, se puede observar que el hecho de que el Método de Bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{17} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{19} .

Ejemplo 4: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[-1,0]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar un redondeo de 6 decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

$$f(x) = x^2 - 0.5$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^2 - 0.5$, obteniendo la Figura 5; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-1,0]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

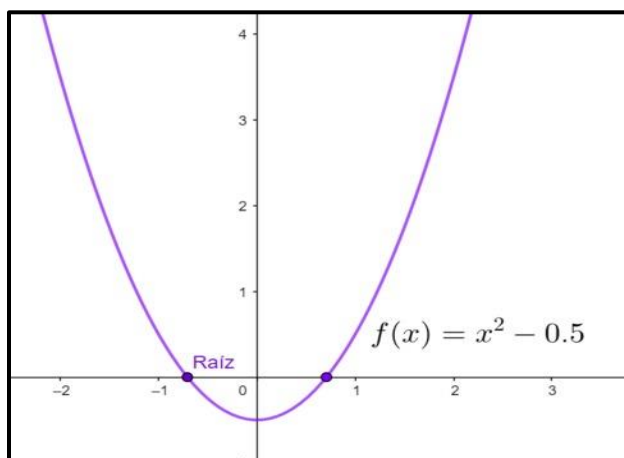


Figura 5. Gráfica $f(x) = x^2 - 0.5$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(-1)$ y $f(0)$, obteniéndose:

$$f(-1) = (-1)^2 - 0.5 = 0.5$$

$$f(0) = (0)^2 - 0.5 = -0.5$$

Como $f(-1) * f(0) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{-1 + 0}{2} = -0.5$$

Después se calcula $f(x_1)$:

$$f(-0.5) = (-0.5)^2 - 0.5 = -0.25$$

y se multiplica $f(-1) * f(-0.5) = -0.125$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = -1$ y $b = -0.5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{-1 + (-0.5)}{2} = -0.75$$

y se multiplica $f(0.5) * f(-0.625) = -0.054688$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = -1$ y $b = -0.625$.

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-0.625) = (-0.625)^2 - 0.5 = -0.109375$$

y se multiplica $f(0.5) * f(-0.625) = -0.109375$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = -1$ y $b = -0.625$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que

$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 18. Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{18}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	-1.000000	0.000000	0.500000	-0.500000	-0.500000	-0.250000	(+)(-) < 0	-----
2	-1.000000	-0.500000	0.500000	-0.250000	-0.750000	0.062500	(-)(-) > 0	0.333333
3	-0.750000	-0.500000	0.062500	-0.250000	-0.625000	-0.109375	(+)(-) < 0	0.200000
4	-0.750000	-0.625000	0.062500	-0.109375	-0.687500	-0.027344	(-)(+) < 0	0.090909
5	-0.750000	-0.687500	0.062500	-0.027344	-0.718750	0.016602	(-)(-) > 0	0.043478
6	-0.718750	-0.687500	0.016602	-0.027344	-0.703125	-0.005615	(-)(-) > 0	0.022222
7	-0.718750	-0.703125	0.016602	-0.005615	-0.710938	0.005432	(+)(-) < 0	0.010989
8	-0.710938	-0.703125	0.005432	-0.005615	-0.707031	-0.000107	(-)(-) > 0	0.005525
9	-0.710938	-0.707031	0.005432	-0.000107	-0.708984	0.002659	(+)(-) < 0	0.002755
10	-0.708984	-0.707031	0.002659	-0.000107	-0.708008	0.001275	(-)(-) > 0	0.001379
11	-0.708008	-0.707031	0.001275	-0.000107	-0.707520	0.000584	(-)(-) > 0	0.000690
12	-0.707520	-0.707031	0.000584	-0.000107	-0.707275	0.000238	(-)(-) > 0	0.000345
13	-0.707275	-0.707031	0.000238	-0.000107	-0.707153	0.000066	(+)(+) > 0	0.000173
14	-0.707153	-0.707031	0.000066	-0.000107	-0.707092	-0.000021	(+)(+) > 0	0.000086
15	-0.707092	-0.707031	-0.000021	-0.000107	-0.707062	-0.000064	(-)(+) < 0	0.000043
16	-0.707062	-0.707031	-0.000064	-0.000107	-0.707047	-0.000085	(-)(+) < 0	0.000022
17	-0.707047	-0.707031	-0.000085	-0.000107	-0.707039	-0.000096	(+)(+) > 0	0.000011
18	-0.707039	-0.707031	-0.000096	-0.000107	-0.707035	-0.000101	(-)(+) < 0	0.000005

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-0.750000 - (-0.500000)}{-0.750000} \right| = 0.333333$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{-0.625000 - (-0.750000)}{-0.625000} \right| = 0.200000$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 4.

Comprobación:

$$f(-0.707035) = (-0.707035)^2 - 0.5 = -0.000101 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{-0.707035 - 0.707039}{-0.707035} \right| = 0.000005 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **-0.707035** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 5: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[2,5]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar un redondeo de 6 decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

$$f(x) = \frac{2}{x-4}$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = \frac{2}{x-4}$, obteniendo la Figura 6; donde se puede observar que la función no es continua en el intervalo $[2,5]$ y que en este intervalo no se encuentra alguna raíz. La línea que intersecta en x es una singularidad⁹.

Supóngase que no se gráfica la función y se empieza a aplicar el método. Utilizando el algoritmo 1, se empieza calculando el valor de N :

⁹ Un punto singular es aquel en el que el valor de la función tiende a infinito.

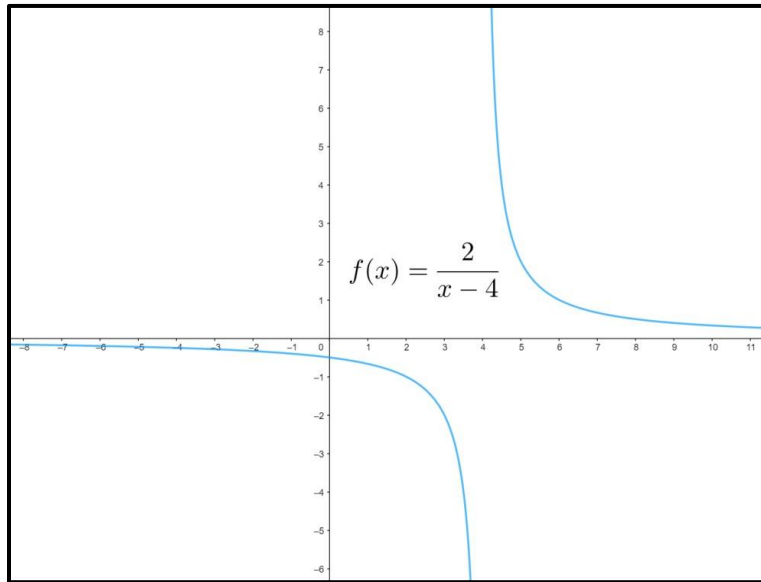


Figura 6. Gráfica $f(x) = \frac{2}{x-4}$

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{5-2}{10^5}\right)}{\log 2} + 10$$

$$N \geq \frac{\log\left(\frac{5-2}{10^5}\right)}{\log 2} + 10(3)$$

$$N \geq \frac{\log(300000)}{0.301029995664} + 10(4)$$

$$N \geq 18.194602975158 + 10(5)$$

$$N \geq 28.1946029775158$$

Redondeando a enteros, se obtiene:

$$N = 28$$

Después se calcula $f(2)$ y $f(5)$, obteniéndose:

$$f(2) = \frac{2}{3-4} = -1$$

$$f(5) = \frac{2}{3-4} = 2$$

Como $f(5) * f(2) < 0$ se supondría que el intervalo es correcto y que encierra una raíz; a continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{2 + 5}{2} = 3.5$$

Después se calcula $f(x_1)$:

$$f(3.5) = \frac{2}{3.5 - 4} = -4$$

y se multiplica $f(2) * f(3.5) = 4$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 3.5$ y $b = 5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{3.5 + 5}{2} = 4.25$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(4.25) = \frac{2}{4.25 - 4} = 8$$

y se multiplica $f(3.5) * f(4.25) = -32$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 3.5$ y $b = 4.25$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; lo cual no se cumple, ya que aunque el error se va haciendo más pequeño, $f(x_n)$ en cada iteración va creciendo. Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$; se repite el proceso anterior. Algunas iteraciones se muestran en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Ejemplo del Método de Bisección cuando no converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	2.000000	5.000000	-1.000000	2.000000	3.500000	-4.000000	4.000000	-----
2	3.500000	5.000000	-4.000000	2.000000	4.250000	8.000000	-32.000000	0.176471
3	3.500000	4.250000	-4.000000	8.000000	3.875000	-16.000000	64.000000	0.096774
4	3.875000	4.250000	-16.000000	8.000000	4.062500	32.000000	-512.000000	0.046154
5	3.875000	4.062500	-16.000000	32.000000	3.968750	-64.000000	1024.000000	0.023622
6	3.968750	4.062500	-64.000000	32.000000	4.015625	128.000000	-8192.000000	0.011673
7	3.968750	4.015625	-64.000000	128.000000	3.992188	-256.000000	16384.000000	0.005871

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
8	3.992188	4.015625	-256.000000	128.000000	4.003906	512.000000	-131072.000000	0.002927
9	3.992188	4.003906	-256.000000	512.000000	3.998047	-1024.000000	262144.000000	0.001466
10	3.998047	4.003906	-1024.000000	512.000000	4.000977	2048.000000	-2097152.000000	0.000732
11	3.998047	4.000977	-1024.000000	2048.000000	3.999512	-4096.000000	4194304.000000	0.000366
12	3.999512	4.000977	-4096.000000	2048.000000	4.000244	8192.000000	-33554432.000000	0.000183
13	3.999512	4.000244	-4096.000000	8192.000000	3.999878	-16384.000000	67108864.000000	0.000092
14	3.999878	4.000244	-16384.000000	8192.000000	4.000061	32768.000000	-536870912.000000	0.000046
15	3.999878	4.000061	-16384.000000	32768.000000	3.999969	-65536.000000	1073741824.000000	0.000023
16	3.999969	4.000061	-65536.000000	32768.000000	4.000015	131072.000000	-8589934592.000000	0.000011
17	3.999969	4.000015	-65536.000000	131072.000000	3.999992	-262144.000000	17179869184.000000	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{4.250000 - 3.500000}{4.250000} \right| = 0.176471$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{3.875000 - 4.250000}{3.875000} \right| = 0.096774$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 5.

El método de bisección no converge a una raíz.

El Método de Bisección puede atrapar una singularidad como si fuera una raíz, debido a que no reconoce la diferencia entre una raíz y una singularidad. Para evitar este problema es necesario

graficar la función; pero si se llegara a aplicar el algoritmo 1, se tiene que verificar que se cumplan simultáneamente los siguientes criterios: $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq Tol$ y $|f(x_n)| \leq Tol$; para asegurar que se ha encontrado una aproximación de la raíz.

Ejemplo 6: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación a la primer raíz positiva de la siguiente ecuación; en $[0,7]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar un redondeo de 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

$$f(x) = -19(x - 0.5)(x - 1) + e^x - e^{-2x}$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 7; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,7]$, pero en este intervalo se encuentran tres raíces; por lo que se tiene que tomar otro intervalo que contenga exactamente una raíz¹⁰. Como se busca la primera raíz positiva se toma el intervalo $[0,1]$, por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

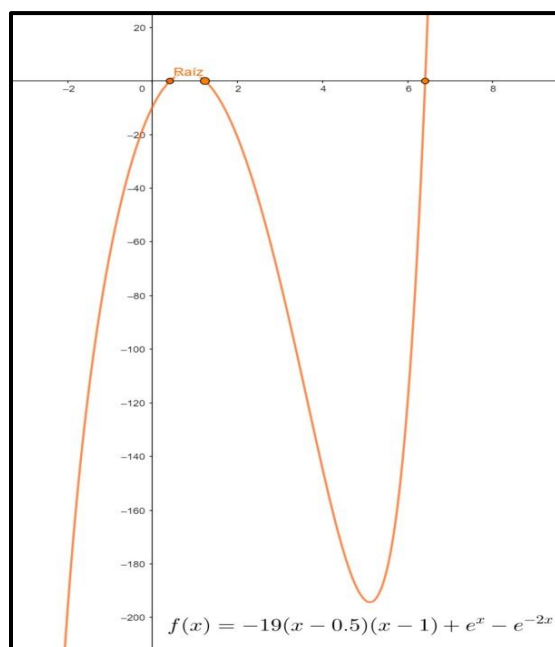


Figura 7. Gráfica $f(x) = -19(x - 0.5)(x - 1) + e^x - e^{-2x}$

¹⁰ Aunque el método también se puede aplicar cuando hay más de una raíz en $[a, b]$; pero cuando esto sucede no se puede garantizar que el método converja a la solución buscada.

Utilizando el algoritmo (1), sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, obteniéndose:

$$f(0) = -19(0 - 0.5)(0 - 1) + e^{(0)} - e^{-2(0)} = -9.5$$

$$f(1) = -19(1 - 0.5)(1 - 1) + e^{(1)} - e^{-2(1)} = 2.5829465$$

como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1). A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.5$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.5) = -19(0.5 - 0.5)(0.5 - 1) + e^{(0.5)} - e^{-2(0.5)} = 1.2808418$$

y se multiplica $f(0) * f(0.5) = -12.167971$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 0$ y $b = 0.5$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0 + 0.5}{2} = 0.25$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.25) = -19(0.25 - 0.5)(0.25 - 1) + e^{(0.25)} - e^{-2(0.25)} = -2.8850052$$

y se multiplica $f(0) * f(0.25) = 27.4075494$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 0.25$ y $b = 0.5$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001 \text{ y que } |f(x_n)| \leq 0.00001; \text{ esto se cumple en la iteración 18.}$$

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{18}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 6.

Cuadro 6. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-9.500000	2.582947	0.500000	1.280842	(+)(-) < 0	-----
2	0.000000	0.500000	-9.500000	1.280842	0.250000	-2.885005	(-)(-) > 0	1.000000
3	0.250000	0.500000	-2.885005	1.280842	0.375000	-0.501750	(-)(-) > 0	0.333333
4	0.375000	0.500000	-0.501750	1.280842	0.437500	0.464000	(+)(-) < 0	0.142857
5	0.375000	0.437500	-0.501750	0.464000	0.406250	-0.000187	(-)(-) > 0	0.076923
6	0.406250	0.437500	-0.000187	0.464000	0.421875	0.236569	(+)(-) < 0	0.037037
7	0.406250	0.421875	-0.000187	0.236569	0.414063	0.119358	(+)(-) < 0	0.018868
8	0.406250	0.414063	-0.000187	0.119358	0.410156	0.059877	(+)(-) < 0	0.009524
9	0.406250	0.410156	-0.000187	0.059877	0.408203	0.029918	(+)(-) < 0	0.004785
10	0.406250	0.408203	-0.000187	0.029918	0.407227	0.014884	(+)(-) < 0	0.002398
11	0.406250	0.407227	-0.000187	0.014884	0.406738	0.007353	(+)(-) < 0	0.001200
12	0.406250	0.406738	-0.000187	0.007353	0.406494	0.003584	(+)(-) < 0	0.000601
13	0.406250	0.406494	-0.000187	0.003584	0.406372	0.001699	(+)(-) < 0	0.000300
14	0.406250	0.406372	-0.000187	0.001699	0.406311	0.000756	(+)(-) < 0	0.000150
15	0.406250	0.406311	-0.000187	0.000756	0.406281	0.000285	(+)(-) < 0	0.000075
16	0.406250	0.406281	-0.000187	0.000285	0.406265	0.000049	(+)(-) < 0	0.000038
17	0.406250	0.406265	-0.000187	0.000049	0.406258	-0.000069	(-)(-) > 0	0.000019
18	0.406250	0.406258	-0.000187	-0.000069	0.406254	-0.000128	(-)(-) > 0	0.000009

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.25 - 0.5}{0.25} \right| = 1$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.375 - 0.25}{0.375} \right| = 0.333333$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 6.

Comprobación:

$$f(0.406265) = -19(0.406265 - 0.5)(0.406265 - 1) + e^{(0.406265)} - e^{-2(0.406265)} = 0.000049$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 0.4062620812$. Se puede observar que $x_{16} = 0.406265$ es una mejor aproximación de x que x_{18} , ya que $|f(x_{16})| < |f(x_{18})|$, es decir $f(x_{16})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto la raíz es $x \approx \mathbf{0.406265}$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 0.406254$.

Con el ejemplo 6, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{16} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{18} .

Ejemplo 7: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación a la raíz negativa de la siguiente ecuación; en $[0,1.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar un redondeo de 6 decimales. Ejercicio tomado de Cheney, F.W. (2011).

$$f(x) = x^{10} - 1$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^{10} - 1$, obteniendo la Figura 8; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1.5]$ y que en

este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el método de bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

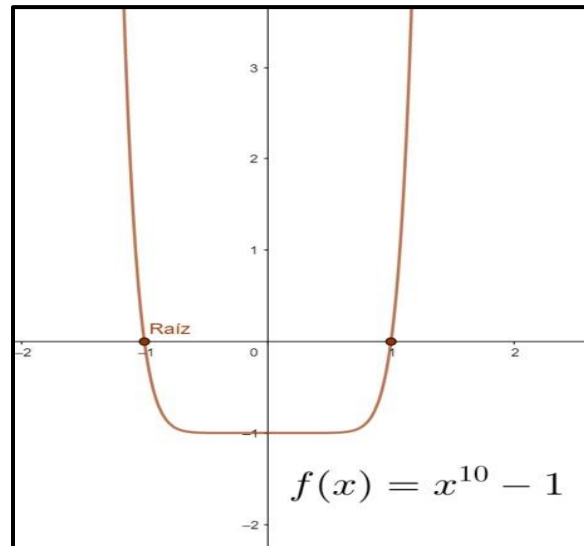


Figura 8. Gráfica de $f(x) = x^{10} - 1$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0)$ y $f(1.5)$, obteniéndose:

$$f(0) = (0)^{10} - 1 = -1$$

$$f(1.5) = (1.5)^{10} - 1 = 56.664039$$

Como $f(0) * f(1.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0 + 1.5}{2} = 0.75$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(0.75) = (0.75)^{10} - 1 = -0.943686$ y se multiplica $f(-1) * f(-0.943686) = 0.943686$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 0.75$ y $b = 1.5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0.75 + 1.5}{2} = 1.125$$

y se multiplica $f(0.75) * f(1.125) = -2.120765$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 0.75$ y $b = 1.125$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 18. Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{18}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 7.

Cuadro 7. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.500000	-1.000000	56.665039	0.750000	-0.943686	$(-)(-) > 0$	-----
2	0.750000	1.500000	-0.943686	56.665039	1.125000	2.247321	$(+)(-) < 0$	0.333333
3	0.750000	1.125000	-0.943686	2.247321	0.937500	-0.475540	$(-)(-) > 0$	0.200000
4	0.937500	1.125000	-0.475540	2.247321	1.031250	0.360315	$(+)(-) < 0$	0.090909
5	0.937500	1.031250	-0.475540	0.360315	0.984375	-0.145709	$(-)(-) > 0$	0.047619
6	0.984375	1.031250	-0.145709	0.360315	1.007813	0.080930	$(+)(-) < 0$	0.023256
7	0.984375	1.007813	-0.145709	0.080930	0.996094	-0.038383	$(-)(-) > 0$	0.011765
8	0.996094	1.007813	-0.038383	0.080930	1.001953	0.019704	$(+)(-) < 0$	0.005848
9	0.996094	1.001953	-0.038383	0.019704	0.999023	-0.009723	$(-)(-) > 0$	0.002933
10	0.999023	1.001953	-0.009723	0.019704	1.000488	0.004894	$(+)(-) < 0$	0.001464
11	0.999023	1.000488	-0.009723	0.004894	0.999756	-0.002439	$(-)(-) > 0$	0.000733
12	0.999756	1.000488	-0.002439	0.004894	1.000122	0.001221	$(+)(-) < 0$	0.000366
13	0.999756	1.000122	-0.002439	0.001221	0.999939	-0.000610	$(-)(-) > 0$	0.000183
14	0.999939	1.000122	-0.000610	0.001221	1.000031	0.000305	$(+)(+) > 0$	0.000092
15	1.000031	1.000122	0.000305	0.001221	1.000076	0.000763	$(+)(+) > 0$	0.000046
16	1.000076	1.000122	0.000763	0.001221	1.000099	0.000992	$(+)(+) > 0$	0.000023
17	1.000099	1.000122	0.000992	0.001221	1.000111	0.001107	$(+)(+) > 0$	0.000011
18	1.000111	1.000122	0.001107	0.001221	1.000116	0.001164	$(+)(+) > 0$	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.125 - 0.75}{1.125} \right| = 0.333333$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.9375 - 1.125}{0.9375} \right| = 0.2$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 7.

Comprobación:

$$f(1.000031) = (1.000031)^{10} - 1 = 0.000305 \approx 0$$

La raíz verdadera es $x = 1$. Se puede observar que $x_{14} = 1.000031$ es una mejor aproximación de x que x_{18} , ya que $|f(x_{14})| < |f(x_{18})|$, es decir $f(x_{14})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 1.000031$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 1.000116$.

Con el ejemplo 7, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{14} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{18} .

Ejemplo 8: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[2,3]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Cheney, F.W. (2011).

$$f(x) = x^3 - 25$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^3 - 25$, obteniendo la Figura 9; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[2,3]$ y que en este

intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

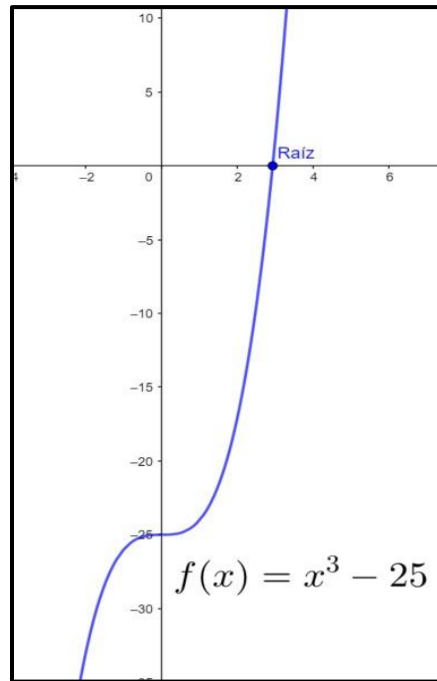


Figura 9. Gráfica $x^3 - 25$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(2)$ y $f(3)$, obteniéndose:

$$f(2) = (2)^3 - 25 = -17$$

$$f(3) = (3)^3 - 25 = 2$$

Como $f(-17) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(2.5) = (2.5)^3 - 25 = -9.375$ y se multiplica $f(-17) * f(-9.375) = 159.375$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 2.5$ y $b = 3$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{2.5 + 3}{2} = 2.75$$

y se multiplica $f(-9.375) * f(2) = -18.75$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 2.75$ y $b = 3$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 16: $0.000005 \leq 0.00001$

Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{16}$; se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 8.

Cuadro 8. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	2.0000000	3.0000000	-17.0000000	2.0000000	2.5000000	-9.3750000	$(-)(-) > 0$	-----
2	2.5000000	3.0000000	-9.3750000	2.0000000	2.7500000	-4.2031250	$(-)(-) > 0$	0.090909
3	2.7500000	3.0000000	-4.2031250	2.0000000	2.8750000	-1.2363281	$(-)(-) > 0$	0.043478
4	2.8750000	3.0000000	-1.2363281	2.0000000	2.9375000	0.3474121	$(+)(-) < 0$	0.021277
5	2.8750000	2.9375000	-1.2363281	0.3474121	2.9062500	-0.4529724	$(-)(-) > 0$	0.010753
6	2.9062500	2.9375000	-0.4529724	0.3474121	2.9218750	-0.0549202	$(-)(-) > 0$	0.005348
7	2.9218750	2.9375000	-0.0549202	0.3474121	2.9296875	0.1457095	$(+)(-) < 0$	0.002667
8	2.9218750	2.9296875	-0.0549202	0.1457095	2.9257813	0.0452607	$(+)(-) < 0$	0.001335
9	2.9218750	2.9257813	-0.0549202	0.0452607	2.9238281	-0.0048632	$(-)(-) > 0$	0.000668
10	2.9238281	2.9257813	-0.0048632	0.0452607	2.9248047	0.0201904	$(+)(-) < 0$	0.000334
11	2.9238281	2.9248047	-0.0048632	0.0201904	2.9243164	0.0076615	$(+)(-) < 0$	0.000167
12	2.9238281	2.9243164	-0.0048632	0.0076615	2.9240723	0.0013986	$(+)(-) < 0$	0.000083
13	2.9238281	2.9240723	-0.0048632	0.0013986	2.9239502	-0.0017324	$(-)(-) > 0$	0.000042
14	2.9239502	2.9240723	-0.0017324	0.0013986	2.9240112	-0.0001669	$(-)(-) > 0$	0.000021
15	2.9240112	2.9240723	-0.0001669	0.0013986	2.9240417	0.0006158	$(+)(-) < 0$	0.000010
16	2.9240417	2.9240723	0.0006158	0.0013986	2.9240570	0.0010072	$(+)(-) < 0$	0.000005

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{2.75 - 2.5}{2.75} \right| = 0.090909$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{2.875 - 2.75}{2.875} \right| = 0.043478$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 8.

Comprobación:

$$f(2.9240112) = (2.9240112)^3 - 25 = -0.0001669 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 2.92401773821$. Se puede observar que $x_{14} = 2.9240112$ es una mejor aproximación de x que x_{16} , ya que $|f(x_{14})| < |f(x_{16})|$, es decir $f(x_{16})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 2.9240112$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 2.9240570$.

Con el ejemplo 8, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{14} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{16} .

Ejemplo 9: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Lial, L.M. (2013).

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^3 - x - 1$, obteniendo la Figura 10; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en

este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

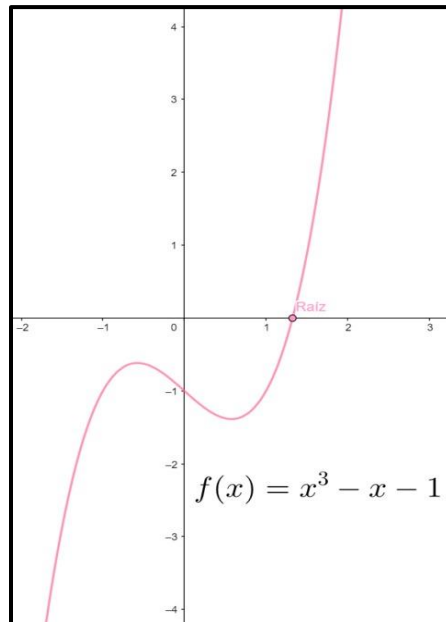


Figura 10. Gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 - (1) - 1 = -1$$

$$f(2) = (2)^3 - (2) - 1 = 5$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(1.5) = (1.5)^3 - (1.5) - 1 = 0.875$ y se multiplica $f(-1) * f(0.875) = -0.875$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 1$ y $b = 1.5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

y se multiplica $f(-1) * f(2) = -0.296875$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = -1$ y $b = 1.25$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 17. Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{17}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 9.

Cuadro 9. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-1.000000	5.000000	1.500000	0.875000	(+)(-) < 0	-----
2	1.000000	1.500000	-1.000000	0.875000	1.250000	-0.296875	(-)(-) < 0	0.200000
3	1.250000	1.500000	-0.296875	0.875000	1.375000	0.224609	(+)(-) < 0	0.090909
4	1.250000	1.375000	-0.296875	0.224609	1.312500	-0.051514	(-)(-) > 0	0.047619
5	1.312500	1.375000	-0.051514	0.224609	1.343750	0.082611	(+)(-) < 0	0.023256
6	1.312500	1.343750	-0.051514	0.082611	1.328125	0.014576	(+)(-) < 0	0.011765
7	1.312500	1.328125	-0.051514	0.014576	1.320313	-0.018711	(-)(-) > 0	0.005917
8	1.320313	1.328125	-0.018711	0.014576	1.324219	-0.002128	(-)(-) > 0	0.002950
9	1.324219	1.328125	-0.002128	0.014576	1.326172	0.006209	(+)(-) < 0	0.001473
10	1.324219	1.326172	-0.002128	0.006209	1.325195	0.002037	(+)(-) < 0	0.000737
11	1.324219	1.325195	-0.002128	0.002037	1.324707	-0.000047	(-)(-) > 0	0.000369
12	1.324707	1.325195	-0.000047	0.002037	1.324951	0.000995	(+)(-) < 0	0.000184
13	1.324951	1.325195	0.000995	0.002037	1.325073	0.001516	(+)(+) > 0	0.000092
14	1.325073	1.325195	0.001516	0.002037	1.325134	0.001776	(+)(+) > 0	0.000046
15	1.325134	1.325195	0.001776	0.002037	1.325165	0.001906	(+)(+) > 0	0.000023
16	1.325165	1.325195	0.001906	0.002037	1.325180	0.001972	(+)(+) > 0	0.000012
17	1.325180	1.325195	0.001972	0.002037	1.325188	0.002004	(+)(+) > 0	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.25 - 1.5}{1.25} \right| = 0.2$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.375 - 1.25}{1.375} \right| = 0.09909$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 9.

Comprobación:

$$f(1.324707) = (1.324707)^3 - (1.324707) - 1 = 0.002004 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 1.3247179572$. Se puede observar que $x_{11} = 1.324707$ es una mejor aproximación de x que x_{17} , ya que $|f(x_{11})| < |f(x_{17})|$, es decir $f(x_{11})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 1.324707$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 1.325188$

Con el ejemplo 9, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{11} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{17} .

Ejemplo 10: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio obtenido de Lial, L.M. (2013).

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$, obteniendo la Figura 11; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo

[1,2] y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

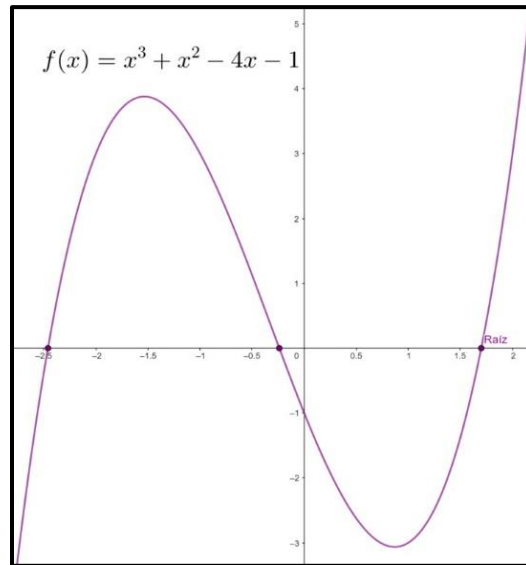


Figura 11. Gráfica de $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 4(1) - 1 = -3$$

$$f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 1 = 3$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(1.5) = (1.5)^3 + (1.5)^2 - 4(1.5) - 1 = -1.375$ y se multiplica $f(-1) * f(1.5) = 4.125$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 1.5$ y $b = 2$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{1.5 + 2}{2} = 1.75$$

y se multiplica $f(1.5) * f(1.75) = -0.580078$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 1.5$ y $b = 1.75$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 16.

Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{16}$; se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 10.

Cuadro 10. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-3.000000	3.000000	1.500000	-1.375000	(+)(-) < 0	-----
2	1.500000	2.000000	-1.375000	3.000000	1.750000	0.421875	(-)(-) > 0	0.142857
3	1.500000	1.750000	-1.375000	0.421875	1.625000	-0.568359	(+)(-) < 0	0.076923
4	1.625000	1.750000	-0.568359	0.421875	1.687500	-0.096924	(+)(-) < 0	0.037037
5	1.687500	1.750000	-0.096924	0.421875	1.718750	0.156464	(-)(-) > 0	0.018182
6	1.687500	1.718750	-0.096924	0.156464	1.703125	0.028278	(-)(-) > 0	0.009174
7	1.687500	1.703125	-0.096924	0.028278	1.695313	-0.034694	(+)(-) < 0	0.004608
8	1.695313	1.703125	-0.034694	0.028278	1.699219	-0.003301	(+)(-) < 0	0.002299
9	1.699219	1.703125	-0.003301	0.028278	1.701172	0.012465	(-)(-) > 0	0.001148
10	1.699219	1.701172	-0.003301	0.012465	1.700195	0.004576	(-)(-) > 0	0.000574
11	1.699219	1.700195	-0.003301	0.004576	1.699707	0.000636	(-)(-) > 0	0.000287
12	1.699219	1.699707	-0.003301	0.000636	1.699463	-0.001333	(+)(-) < 0	0.000144
13	1.699463	1.699707	-0.001333	0.000636	1.699585	-0.000348	(+)(-) < 0	0.000072
14	1.699585	1.699707	-0.000348	0.000636	1.699646	0.000144	(+)(-) < 0	0.000036
15	1.699646	1.699707	0.000144	0.000636	1.699677	0.000390	(+)(+) > 0	0.000018
16	1.699677	1.699707	0.000390	0.000636	1.699692	0.000513	(+)(+) > 0	0.000009

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.75 - 1.5}{1.75} \right| = 0.142857$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.625 - 1.75}{1.625} \right| = 0.076923$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 10.

Comprobación:

$$f(1.699646) = (1.699646)^3 + (1.699646)^2 - 4(1.699646) - 1 = 0.000144 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 1.6996281483$. Se puede observar que $x_{14} = 1.699646$ es una mejor aproximación de x que x_{16} , ya que $|f(x_{14})| < |f(x_{16})|$, es decir $f(x_{14})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 1.699646$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 1.699692$

Con el ejemplo 10, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{14} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{16} .

Ejemplo 11: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

$$f(x) = 4\text{sen}(x) - x^5$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = 4\text{sen}(x) - x^5$, obteniendo la Figura 12; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en

este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

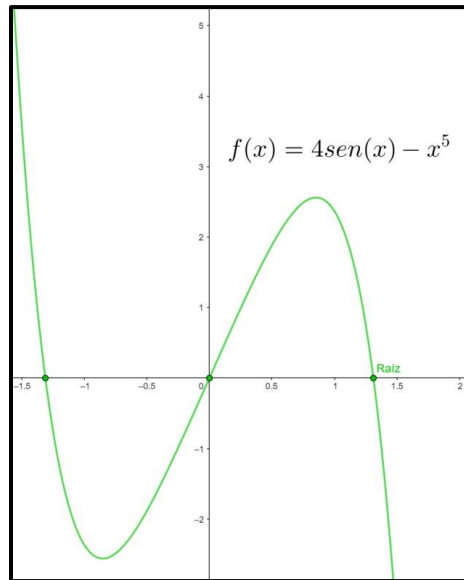


Figura 12. Gráfica de $f(x) = 4 \text{ sen}(x) - x^5$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, obteniéndose:

$$f(1) = 4\text{sen}(1) - (1)^5 = 2.365884$$

$$f(2) = 4\text{sen}(2) - (2)^5 = -28.36281$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(1.5) = 4\text{sen}(1.5) - (1.5)^5 = -3.603770$ y se multiplica $f(-1) * f(1.5) = -8.526102$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 1$ y $b = 1.5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

y se multiplica $f(1) * f(1.25) = 1.760645$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 1$ y $b = 1.5$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 17. Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{17}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 11.

Cuadro 11. Ejemplo del método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	2.365884	-28.362810	1.500000	-3.603770	$(-)(+) > 0$	-----
2	1.000000	1.500000	2.365884	-3.603770	1.250000	0.744181	$(+)(+) > 0$	0.200000
3	1.250000	1.500000	0.744181	-3.603770	1.375000	-0.991314	$(-)(+) < 0$	0.090909
4	1.250000	1.375000	0.744181	-0.991314	1.312500	-0.027596	$(-)(+) < 0$	0.047619
5	1.250000	1.312500	0.744181	-0.027596	1.281250	0.380710	$(+)(+) > 0$	0.024390
6	1.281250	1.312500	0.380710	-0.027596	1.296875	0.182353	$(+)(+) > 0$	0.012048
7	1.296875	1.312500	0.182353	-0.027596	1.304688	0.078852	$(+)(+) > 0$	0.005988
8	1.304688	1.312500	0.078852	-0.027596	1.308594	0.025999	$(+)(+) > 0$	0.002985
9	1.308594	1.312500	0.025999	-0.027596	1.310547	-0.000705	$(-)(+) < 0$	0.001490
10	1.308594	1.310547	0.025999	-0.000705	1.309570	0.012670	$(+)(+) > 0$	0.000746
11	1.309570	1.310547	0.012670	-0.000705	1.310059	0.005988	$(+)(+) > 0$	0.000373
12	1.310059	1.310547	0.005988	-0.000705	1.310303	0.002643	$(+)(+) > 0$	0.000186
13	1.310303	1.310547	0.002643	-0.000705	1.310425	0.000969	$(+)(+) > 0$	0.000093
14	1.310425	1.310547	0.000969	-0.000705	1.310486	0.000132	$(-)(+) < 0$	0.000047
15	1.310486	1.310547	0.000132	-0.000705	1.310516	-0.000286	$(-)(+) < 0$	0.000023
16	1.310486	1.310516	0.000132	-0.000286	1.310501	-0.000077	$(-)(+) < 0$	0.000012
17	1.310486	1.310501	0.000132	-0.000077	1.310493	0.000028	$(+)(+) > 0$	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.25 - 1.5}{1.25} \right| = 0.2$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.375 - 1.25}{1.375} \right| = 0.09909$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 11.

Comprobación:

$$f(x) = 4\text{sen}(1.310493) - (1.310493)^5 = 0.000028 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{(1.310493 - 1.310501)}{1.310493} \right| = 0.000006 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.310493** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 12: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[2, 2.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Cheney, F.W. (2011).

$$f(x) = 4\text{sen}(x) - x$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = 4\text{sen}(x) - x$, obteniendo la Figura 13; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[2, 2.5]$ y que en éste intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

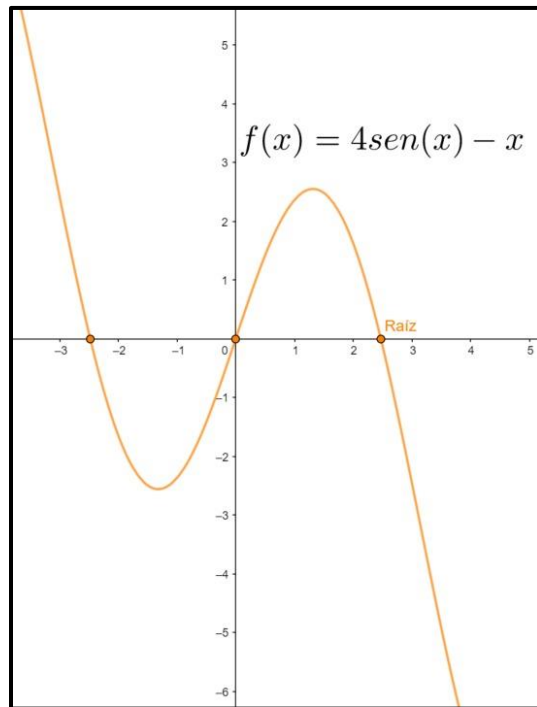


Figura 13. Gráfica $f(x) = 4\text{sen}(x) - x$

Utilizando el algoritmo 1, sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(2)$ y $f(2.5)$, obteniéndose:

$$f(2) = 4\text{sen}(2) - (2) = 1.6371900$$

$$f(2.5) = 4\text{sen}(2.5) - (2.5) = -0.1061110$$

Como $f(2) * f(2.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{2 + 2.5}{2} = 2.25$$

después se calcula $f(x_1)$: $f(2.25) = 4\text{sen}(2.25) - (2.25) = 0.862293$ y se multiplica $f(2) * f(2.25) = 1.411737$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 2.25$ y $b = 2.5$

Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{2.25 + 2.5}{2} = 2.375$$

y se multiplica $f(2.25) * f(2.375) = 0.399740$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 2.375$ y $b = 2.5$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ esto se cumple en la iteración 15. Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{16}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 12.

Cuadro 12. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	2.000000	2.500000	1.637190	-0.106111	2.250000	0.862293	(+)(+) > 0	-----
2	2.250000	2.500000	0.862293	-0.106111	2.375000	0.399740	(+)(+) > 0	0.052632
3	2.375000	2.500000	0.399740	-0.106111	2.437500	0.151870	(+)(+) > 0	0.025641
4	2.437500	2.500000	0.151870	-0.106111	2.468750	0.024096	(+)(+) > 0	0.012658
5	2.468750	2.500000	0.024096	-0.106111	2.484375	-0.040709	(+)(+) < 0	0.006289
6	2.468750	2.484375	0.024096	-0.040709	2.476563	-0.008231	(+)(-) < 0	0.003155
7	2.468750	2.476563	0.024096	-0.008233	2.472656	0.007952	(+)(-) > 0	0.001580
8	2.472656	2.476563	0.007952	-0.008233	2.474609	-0.000135	(+)(-) < 0	0.000789
9	2.472656	2.474609	0.007952	-0.000138	2.473633	0.003909	(+)(-) > 0	0.000395
10	2.473633	2.474609	0.003909	-0.000138	2.474121	0.001888	(+)(-) > 0	0.000197
11	2.474121	2.474609	0.001888	-0.000138	2.474365	0.000876	(+)(-) > 0	0.000099
12	2.474365	2.474609	0.000876	-0.000138	2.474487	0.000371	(+)(-) > 0	0.000049
13	2.474487	2.474609	0.000371	-0.000138	2.474548	0.000118	(+)(-) > 0	0.000025
14	2.474548	2.474609	0.000118	-0.000138	2.474579	-0.000009	(+)(-) > 0	0.000012
15	2.474548	2.474579	0.000118	-0.000013	2.474564	0.000055	(+)(-) > 0	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{2.375 - 2.25}{2.375} \right| = 0.052632$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{2.4375 - 2.375}{2.4375} \right| = 0.025641$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 12. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

Comprobación:

$$f(x) = 4 \sin(2.474579) - (2.474579) = 0.000009 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 2.4745767873699$. Se puede observar que $x_{14} = 2.474579$ es una mejor aproximación de x que x_{15} , ya que $|f(x_{14})| < |f(x_{15})|$, es decir $f(x_{14})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 2.474579$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 2.474564$.

Con el ejemplo 12, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{14} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{15} .

Ejemplo 13: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Cheney, F.W. (2011).

$$f(x) = e^x - 2 + \sin(2x) = 0$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = e^x - 2 + (2x)$, obteniendo la Figura 14; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en

este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

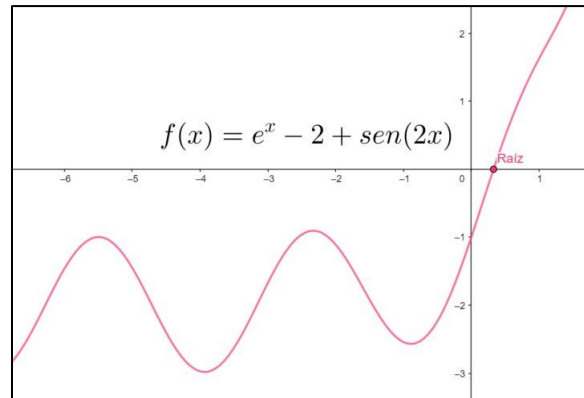


Figura 14. Gráfica $f(x) = e^x - 2 + \text{sen}(2x)$

Utilizando el algoritmo (1), sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, obteniéndose:

$$f(0) = e^{(0)} - 2 + \text{sen}(2(0)) = -1.00000$$

$$f(1) = e^{(1)} - 2 + \text{sen}(2(1)) = 1.627579$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0 + 1}{2} = 0.500000$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.500000) = e^{(0.500000)} - 2 + \text{sen}(2(0.500000)) = 0.490192$$

y se multiplica $f(0) * f(0.500000) = -0.490192$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 0.000000$ y $b = 0.500000$. Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0.000000 + 0.500000}{2} = 0.250000$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.250000) = e^{(0.250000)} - 2 + \text{sen}(2(0.250000)) = -0.236549$$

y se multiplica $f(0.000000) * f(0.250000) = 0.236549$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 0.250000$ y $b = 0.500000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$, esto se cumple en la iteración 19. Para obtener $x_3, \dots, x_{19}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 13.

Cuadro 13. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	1.627579	0.500000	0.490192	(+)(-) < 0	-----
2	0.000000	0.500000	-1.000000	0.490192	0.250000	-0.236549	(-)(-) > 0	1.000000
3	0.250000	0.500000	-0.236549	0.490192	0.375000	0.136630	(+)(+) > 0	0.333333
4	0.250000	0.375000	-0.236549	0.136630	0.312500	-0.048065	(-)(-) > 0	0.200000
5	0.312500	0.375000	-0.048065	0.136630	0.343750	0.044833	(+)(-) < 0	0.090909
6	0.312500	0.343750	-0.048065	0.044833	0.328125	-0.001487	(-)(-) > 0	0.047619
7	0.328125	0.343750	-0.001487	0.044833	0.335938	0.021706	(+)(-) < 0	0.023256
8	0.328125	0.335938	-0.001487	0.021706	0.332031	0.010118	(+)(-) < 0	0.011765
9	0.328125	0.332031	-0.001487	0.010118	0.330078	0.004317	(+)(-) < 0	0.005917
10	0.328125	0.330078	-0.001487	0.004317	0.329102	0.001415	(+)(-) < 0	0.002967
11	0.328125	0.329102	-0.001487	0.001415	0.328613	-0.000036	(-)(-) > 0	0.001486
12	0.328125	0.328613	-0.001487	-0.000036	0.328369	-0.000762	(-)(-) > 0	0.000743
13	0.328369	0.328613	-0.000762	-0.000036	0.328491	-0.000399	(-)(-) > 0	0.000372
14	0.328491	0.328613	-0.000399	-0.000036	0.328552	-0.000217	(-)(-) > 0	0.000186
15	0.328552	0.328613	-0.000217	-0.000036	0.328583	-0.000127	(-)(-) > 0	0.000093
16	0.328583	0.328613	-0.000127	-0.000036	0.328598	-0.000081	(-)(-) > 0	0.000046
17	0.328598	0.328613	-0.000081	-0.000036	0.328606	-0.000059	(-)(-) > 0	0.000023
18	0.328606	0.328613	-0.000059	-0.000036	0.328609	-0.000047	(-)(-) > 0	0.000012
19	0.328609	0.328613	-0.000047	-0.000036	0.328611	-0.000042	(-)(-) > 0	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.250000 - 0.500000}{0.250000} \right| = 1.000000$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.375000 - 0.250000}{0.375000} \right| = 0.333333$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 13.

Comprobación:

$$f(0.328611) = e^{(0.328611)} - 2 + \sin(2(0.328611)) = -0.000042 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{(0.328611 - 0.328609)}{0.328611} \right| = 0.000006 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.328611** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 14: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[-1,0]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

$$f(x) = x^4 - 2x - 1$$

Antes de aplicar el Método de Bisección, se grafica la función $f(x) = x^4 - 2x - 1$, obteniendo la Figura 15 donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-1,0]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

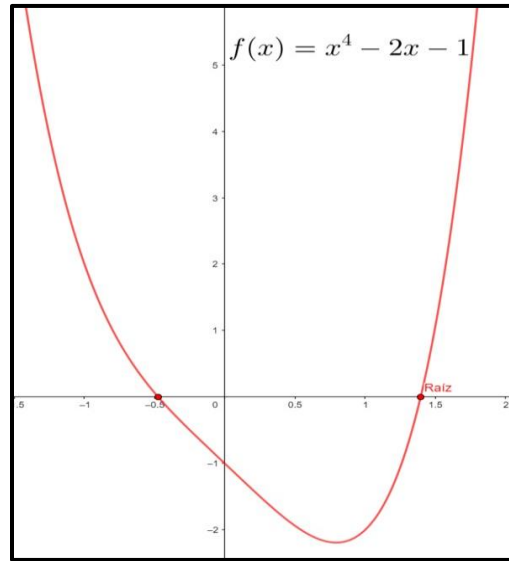


Figura 15. Gráfica $f(x) = x^4 - 2x - 1$

Utilizando el algoritmo (1), sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(-1.000000)$ y $f(0.000000)$, obteniéndose:

$$f(-1.000000) = (-1.000000)^4 - 2(-1.000000) - 1 = 2.000000$$

$$f(0.000000) = (0.000000)^4 - 2(0.000000) - 1 = -1.000000$$

Como $f(-1.000000) * f(0.000000) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{-1.000000 + 0.000000}{2} = -0.500000$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(-0.500000) = (-0.500000)^4 - 2(-0.500000) - 1 = 0.062500$$

y se multiplica $f(-1.000000) * f(-0.500000) = 0.125000$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = -0.500000$ y $b = 0.000000$. Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{-0.500000 + 0.000000}{2} = -0.250000$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-0.250000) = (-0.250000)^4 - 2(-0.250000) - 1 = -0.496094$$

y se multiplica $f(-0.500000) * f(-0.250000) = -0.031006$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = -0.500000$ y $b = -0.250000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 18.

Para obtener $x_3, x_4, x_5, \dots, x_{18}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 14.

Cuadro 14. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	-1.000000	0.000000	2.000000	-1.000000	-0.500000	0.062500	(+)(+) > 0	-----
2	-0.500000	0.000000	0.062500	-1.000000	-0.250000	-0.496094	(-)(+) < 0	1.000000
3	-0.500000	-0.250000	0.062500	-0.496094	-0.375000	-0.230225	(-)(+) < 0	0.333333
4	-0.500000	-0.375000	0.062500	-0.230225	-0.437500	-0.088364	(-)(+) < 0	0.142857
5	-0.500000	-0.437500	0.062500	-0.088364	-0.468750	-0.014220	(-)(+) < 0	0.066667
6	-0.500000	-0.468750	0.062500	-0.014220	-0.484375	0.023796	(+)(+) > 0	0.032258
7	-0.484375	-0.468750	0.023796	-0.014220	-0.476563	0.004705	(+)(+) > 0	0.016393
8	-0.476563	-0.468750	0.004705	-0.014220	-0.472656	-0.004778	(-)(+) < 0	0.008264
9	-0.476563	-0.472656	0.004705	-0.004778	-0.474609	-0.000042	(-)(+) < 0	0.004115
10	-0.476563	-0.474609	0.004705	-0.000042	-0.475586	0.002330	(+)(+) > 0	0.002053
11	-0.475586	-0.474609	0.002330	-0.000042	-0.475098	0.001144	(+)(+) > 0	0.001028
12	-0.475098	-0.474609	0.001144	-0.000042	-0.474854	0.000551	(+)(+) > 0	0.000514
13	-0.474854	-0.474609	0.000551	-0.000042	-0.474731	0.000255	(+)(+) > 0	0.000257
14	-0.474731	-0.474609	0.000255	-0.000042	-0.474670	0.000106	(+)(+) > 0	0.000129

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
15	-0.474670	-0.474609	0.000106	-0.000042	-0.474640	0.000032	(+)(+) > 0	0.000064
16	-0.474640	-0.474609	0.000032	-0.000042	-0.474625	-0.000005	(-)(+) < 0	0.000032
17	-0.474625	-0.474609	-0.000005	-0.000042	-0.474617	-0.000023	(-)(-) > 0	0.000016
18	-0.474617	-0.474609	-0.000023	-0.000042	-0.474613	-0.000033	(-)(-) > 0	0.000008

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-0.250000 - 0.500000}{-0.250000} \right| = 1.000000$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{-0.375000 - 0.250000}{-0.375000} \right| = 0.333333$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 14.

Comprobación:

$$f(-0.474625) = (-0.474625)^4 - 2(-0.474625) - 1 = -0.000033 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = -0.4746266176$. Se puede observar que $x_{16} = -0.474625$ es una mejor aproximación de x que x_{18} , ya que $|f(x_{16})| < |f(x_{18})|$, es decir $f(x_{16})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx -0.474625$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = -0.474613$.

Con el ejemplo 14, se puede observar que el hecho de que el método de bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{16} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{18} .

Ejemplo 15: Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[0.2, 0.6]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

$$f(x) = \cos(3x) + 1 - e^{x^2}$$

Antes de aplicar el Método de Bisección se grafica la función $f(x) = \cos(3x) + 1 - e^{x^2}$, obteniendo la Figura 16; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0.2, 0.6]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz; por lo que se empieza a aplicar el Método de Bisección, ya que se puede garantizar que va a converger.

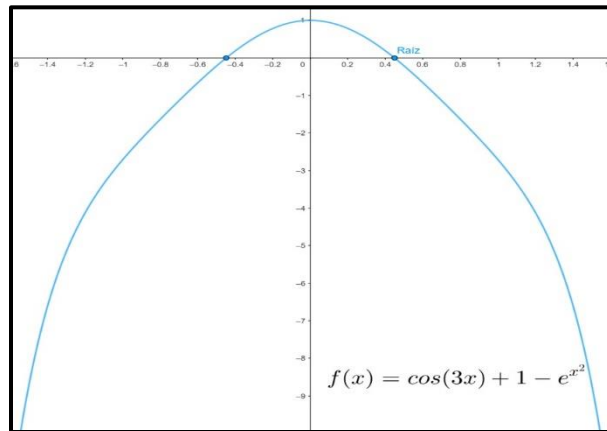


Figura 16. Gráfica de $f(x) = \cos(3x) + 1 - e^{x^2}$

Utilizando el algoritmo (1), sin tomar en cuenta el **Paso 1**; se empieza calculando $f(0.200000)$ y $f(0.600000)$, obteniéndose:

$$f(0.200000) = \cos(3(0.200000)) + 1 - e^{(0.200000)^2} = 0.784525$$

$$f(0.600000) = \cos(3(0.600000)) + 1 - e^{(0.600000)^2} = -0.660532$$

Como $f(0.200000) * f(0.600000) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1).

A continuación se calcula x_1 con la ecuación (4):

$$x_1 = \frac{0.200000 + 0.600000}{2} = 0.400000$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.400000) = \cos(3(0.400000)) + 1 - e^{(0.400000)^2} = 0.188847$$

y se multiplica $f(0.200000) * f(0.400000) = 0.784525$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería $a = 0.400000$ y $b = 0.600000$. Luego se calcula x_2 con la ecuación (4):

$$x_2 = \frac{0.400000 + 0.600000}{2} = 0.500000$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.500000) = \cos(3(0.500000)) + 1 - e^{(0.500000)^2} = -0.213288$$

y se multiplica $f(0.400000) * f(0.500000) = -0.040279$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería $a = 0.400000$ y $b = 0.500000$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 17. Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{17}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 15.

Cuadro 15. Ejemplo del Método de Bisección cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.200000	0.600000	0.784525	-0.660532	0.400000	0.188847	(+)(+) > 0	-----
2	0.400000	0.600000	0.188847	-0.660532	0.500000	-0.213288	(-)(+) < 0	0.200000
3	0.400000	0.500000	0.188847	-0.213288	0.450000	-0.005453	(-)(+) < 0	0.111111
4	0.400000	0.450000	0.188847	-0.005453	0.425000	0.093536	(+)(+) > 0	0.058824
5	0.425000	0.450000	0.093536	-0.005453	0.437500	0.044482	(+)(+) > 0	0.028571
6	0.437500	0.450000	0.044482	-0.005453	0.443750	0.019623	(+)(+) > 0	0.014085
7	0.443750	0.450000	0.019623	-0.005453	0.446875	0.007111	(+)(+) > 0	0.006993
8	0.446875	0.450000	0.007111	-0.005453	0.448438	0.000836	(+)(+) > 0	0.003484

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
9	0.448438	0.450000	0.000836	-0.005453	0.449219	-0.002307	$(-)(+) < 0$	0.001739
10	0.448438	0.449219	0.000836	-0.002307	0.448828	-0.000735	$(-)(+) < 0$	0.000870
11	0.448438	0.448828	0.000836	-0.000735	0.448633	0.000050	$(+)(+) > 0$	0.000435
12	0.448438	0.448633	0.000836	0.000050	0.448535	0.000443	$(+)(+) > 0$	0.000218
13	0.448438	0.448535	0.000836	0.000443	0.448486	0.000639	$(+)(+) > 0$	0.000109
14	0.448486	0.448535	0.000639	0.000443	0.448511	0.000541	$(+)(+) > 0$	0.000054
15	0.448511	0.448535	0.000541	0.000443	0.448523	0.000492	$(+)(+) > 0$	0.000027
16	0.448523	0.448535	0.000492	0.000443	0.448529	0.000467	$(+)(+) > 0$	0.000014
17	0.448529	0.448535	0.000467	0.000443	0.448532	0.000455	$(+)(+) > 0$	0.000007

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.500000 - 0.400000}{0.500000} \right| = 0.200000$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.450000 - 0.500000}{0.450000} \right| = 0.111111$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 15.

Comprobación:

$$f(0.448633) = \cos(3(0.448633)) + 1 - e^{(0.448633)^2} = 0.000050 \approx 0$$

La raíz verdadera de x , con diez cifras decimales, es $x = 0.4486452874474$. Se puede observar que $x_{11} = 0.448633$ es una mejor aproximación de x que x_{17} , ya que $|f(x_{11})| < |f(x_{17})|$, es

decir $f(x_{11})$ se aproxima más a 0 (cero); se puede verificar que esto es cierto ya que se conoce la raíz verdadera. Por lo tanto $x \approx 0.448633$. Cabe aclarar que aplicando el algoritmo 1 el resultado que se obtiene es, $x = 0.448532$.

Con el ejemplo 15, se puede observar que el hecho de que el Método de Bisección no tome en cuenta la magnitud de los valores de la función en las aproximaciones calculadas x_n , y que sólo tome en cuenta el signo de $f(x_n)$, puede resultar que una aproximación intermedia x_{11} , se aproxime más a la raíz que la respuesta final x_{17} .

2 Método de Falsa Posición

El método de la Falsa Posición pretende conjugar la seguridad del Método de Bisección para converger, con la rapidez del Método de la Secante (ver sección 2.4); también es denominado como: Regla Falsa, Posición Falsa o Interpolación Lineal. Comienza con un intervalo $[a, b]$ que encierra a la raíz, es decir $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, (teorema 1).

Es similar al Método de Bisección ya que consiste en generar subintervalos que encierren a la raíz; pero la aproximación de la raíz x_n no se obtiene con el punto medio, sino con la intersección de la recta secante a la curva que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ con el eje x ; proporcionando una mejor estimación de la raíz. El reemplazamiento de la curva por una línea recta da una “Posición Falsa” de la raíz, de aquí el nombre del método.

En la se muestra la Representación Gráfica del método de Falsa Posición; donde se puede observar que, una vez iniciado el proceso iterativo, uno de los extremos del intervalo puede quedarse fijo. Con el uso de triángulos semejantes, la intersección de la recta secante con el eje x se puede calcular de la siguiente manera (Ver Figura 17):

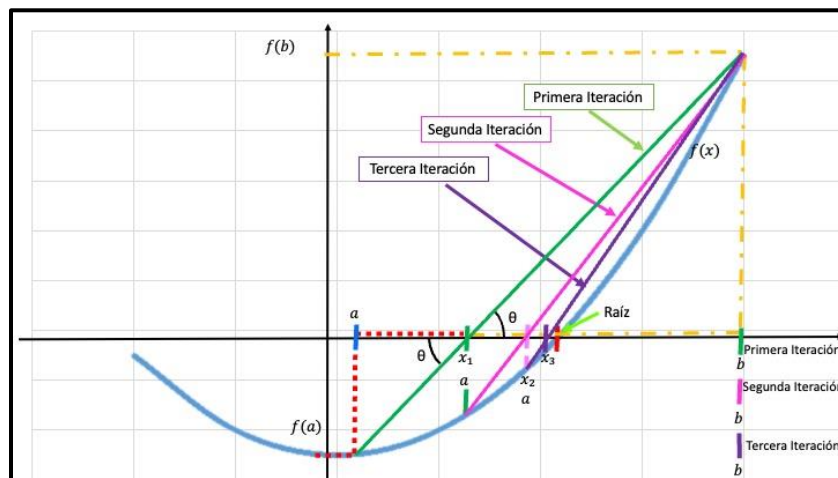


Figura 17. Representación Gráfica del Método de Falsa Posición

$$\cot(\theta) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$

$$\cot(\theta) = \frac{x_1 - a}{-f(a)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{b - x_1}{f(b)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x_1 - a}{-f(a)} &= \frac{b - x_1}{f(b)} \\ f(b)(x_1 - a) &= -f(a)(b - x_1) \\ x_1 f(b) - x_1 f(a) &= -bf(a) + af(b) \\ x_1(f(b) - x_1 f(a)) &= af(b) - bf(a) \\ x_1 &= \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}\end{aligned}$$

El primer paso para aplicar el Método de Falsa Posición y garantizar que converja a la solución es comprobar que f es continua en el intervalo $[a, b]$ y que en este intervalo se encuentre una raíz $f(a) * f(b) < 0$, si se cumplen estos dos requisitos se garantiza la convergencia del método; pero no significa que si no se cumple cualquiera de estos, el método vaya a diverger.

A continuación, se calcula la intersección con el eje x de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, será la primera aproximación de la raíz. Este valor esta dado por:

$$x_1 = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Para obtener la n -ésima intersección con el eje x de la recta secante a la curva, se usará:

Fórmula de iteración para el Método de Falsa Posición

$$x_n = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (10)$$

A continuación se verifican los signos de $f(a) * f(x_n)$ y $f(x_n) * f(b)$, para saber en que subintervalo se encuentra la raíz (como en el método de Bisección):

1. Si $f(a) * f(x_n) < 0$, entonces en el subintervalo $[a, x_n]$ se encuentra la raíz, renombrando $a = a$ y $b = x_n$.
2. Si $f(a) * f(x_n) > 0$, entonces en el subintervalo $[x_n, b]$ se encuentra la raíz, renombrando $a = x_n$ y $b = b$.
3. Si $f(a) * f(x_n) = 0$, entonces x_n es la raíz.

Si ocurre uno de los dos primeros casos se calcula la intersección con el eje x de la recta secante a la curva con la ecuación (10), siendo la aproximación más actualizada de la raíz. Al igual que

en el Método de Bisección se repite el proceso hasta que se cumplan los criterios de convergencia (revisar Método de Bisección).

2.1 Algoritmo del Método de Falsa Posición

Algoritmo 2

Método de Falsa Posición.¹¹

Para encontrar una aproximación de la raíz de una ecuación $f(x) = 0$ donde f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) * f(b) < 0$. (Para garantizar la convergencia del método).

Datos: $f(x)$, el intervalo $[a, b]$, un tolerancia Tol y un número máximo de iteraciones N .

Resultados: Una raíz aproximada o un mensaje de falla.

- **Paso 1:** Hacer $n = 1$
- **Paso 2:** Mientras $n \leq N$, repetir los pasos 3 al 14.
 - **Paso 3:** Calcular $f(a)$ y $f(b)$.
 - **Paso 4:** Si $n = 1$ entonces realizar las siguientes comparaciones. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 5:** Si $f(a) * f(b) = 0$ entonces IMPRIMIR "Una raíz de la ecuación dada es uno de los extremos del intervalo" y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 6:** Si $f(a) * f(b) > 0$, entonces IMPRIMIR "Intervalo incorrecto, no hay raíz o hay varias raíces" y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 7:** Si $f(a) * f(b) < 0$, entonces IMPRIMIR "Intervalo correcto" y CONTINUAR. De lo contrario TERMINAR.
 - **Paso 8:** Calcular $x_n = \frac{a f(b) - b f(a)}{f(b) - f(a)}$.
 - **Paso 9:** Calcular $f(x_n)$.

¹¹ Burden, 2002, como se citó en Sánchez, 2007.

- **Paso 10:** Si $f(a) * f(x_n) = 0$ entonces IMPRIMIR "Una raíz de la ecuación dada es x_n " y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 11:** Si $f(a) * f(b) < 0$, entonces hacer $a = a$ y $b = x_n$, de lo contrario hacer $a = x_n$ y $b = b$.
- **Paso 12:** Si $n > 1$ entonces calcular $\varepsilon = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$ y realizar la siguiente comparación. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 13:** Si $\varepsilon \leq Tol$ y $|f(x_n)| \leq Tol$ entonces IMPRIMIR "Una raíz aproximada de la ecuación es x_n " y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 14:** Hacer $n = n + 1$.
- **Paso 15:** IMPRIMIR mensaje de falla "Método no converge a una raíz" y TERMINAR.

Se puede verificar que el algoritmo del Método de Falsa Posición es idéntico al del Método de Bisección (Algoritmo 1), con la excepción del **Paso 1** y de que en el primero se utiliza la ecuación 10.

2.2 Ventajas y Desventajas del Método

Ventajas

1. Siempre encuentra una raíz de la función si se sabe que la raíz existe en un intervalo dado; es decir siempre converge.
2. Casi siempre converge más rápido que el Método de Bisección.

Desventajas

1. La longitud del subintervalo que contiene a la raíz en general no tiende a cero, debido a que uno de los extremos de los subintervalos se aproxima a la raíz, mientras el otro puede permanecer fijo; es decir la longitud del subintervalo $[a, b]$ no puede tomarse como un criterio de aproximación a la raíz.
2. Una tarea importante que se debe de realizar antes de aplicar el método es encontrar un intervalo que contenga la raíz buscada, así como verificar que la función sea continua en él. Lo anterior no significa que si no se cumple cualquiera de estos requisitos el método vaya a diverger.

2.3 Ejemplos

Ejemplo 1: Localizar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ mediante el Método de Falsa Posición, en el intervalo $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-5} y usar un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$ (Figura 18), donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente la raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

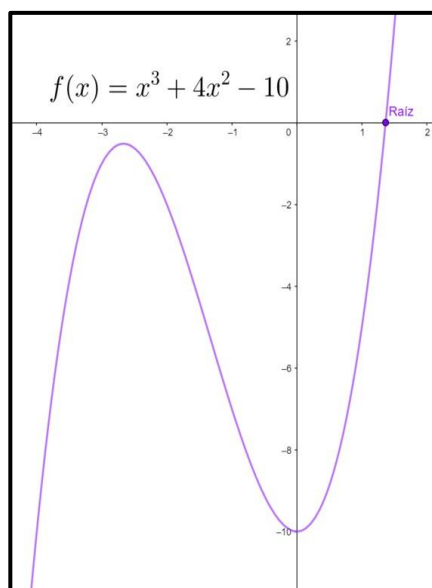


Figura 18. Gráfica $x^3 + 4x^2 - 10$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = -5.000000$$

$$f(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14.000000$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz. A continuación se calcula x_1 (con la ecuación 10):

$$x_1 = \frac{(1)(14.000000) - (2)(-5.000000)}{(14.000000) - (-5.000000)} = 1.263158$$

Después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.263158) = (1.263458)^3 + 4(1.263458)^2 - 10 = -1.602274$$

y se multiplica $f(1) * f(1.263458) = 8.011372$; como esto es > 0 , el intervalo de nuestra segunda iteración sería $a = 1.263158$ y $b = 2$.

Luego se calcula x_2 con la fórmula de iteración(10):

$$x_2 = \frac{(1.263158)(14.000000) - (2)(-1.602274)}{(14.000000) - (-1.602274)} = 1.338828$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.338828) = (1.338828)^3 + 4(1.338828)^2 - 10 = -0.430365$$

Se multiplica $f(1.263158) * f(1.338828) = 0.689562$; como esto es > 0 , el intervalo de nuestra segunda iteración sería $a = 1.338828$ y $b = 2$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración

9. Para poder obtener $x_3, \dots, x_9$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el siguiente Cuadro 16:

Cuadro 16. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-5.000000	14.000000	1.263158	-1.602274	8.011372	-----
2	1.263158	2.000000	-1.602274	14.000000	1.338828	-0.430365	0.689562	0.056520
3	1.338828	2.000000	-0.430365	14.000000	1.358546	-0.110009	0.047344	0.014514
4	1.358546	2.000000	-0.110009	14.000000	1.363547	-0.027762	0.003054	0.003668
5	1.363547	2.000000	-0.027762	14.000000	1.364807	-0.006983	0.000194	0.000923
6	1.364807	2.000000	-0.006983	14.000000	1.365124	-0.001755	0.000012	0.000232
7	1.365124	2.000000	-0.001755	14.000000	1.365203	-0.000441	0.000001	0.000058
8	1.365203	2.000000	-0.000441	14.000000	1.365223	-0.000111	0.000000	0.000015
9	1.365223	2.000000	-0.000111	14.000000	1.365228	-0.000028	0.000000	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.338828 - 1.263158}{1.338828} \right| = 0.056520$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.358546 - 1.338828}{1.358546} \right| = 0.014514$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 16.

Comprobación:

$$f(1.365228) = (1.365228)^3 + 4(1.365228)^2 - 10 = -0.000028 \approx 0$$

Podemos observar que se cumplen el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{1.365228 - 1.365223}{1.365228} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.365228** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 2: Localice la raíz de $f(x) = 3x^2 - e^x$ mediante el Método de Falsa Posición, en el intervalo $[0,1]$ con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio obtenido de Manterola, M. (2009).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$ (Figura 19), donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente la raíz (Teorema 1); por lo que se empieza aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que este va a converger.

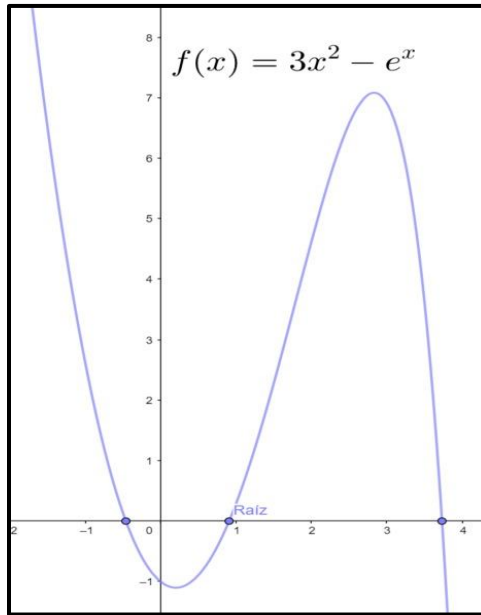


Figura 19. Gráfica $3x^2 - e^x$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra la raíz.

$$f(0) = 3(0)^2 - e^0 = -1.000000$$

$$f(1) = 3(1)^2 - e^1 = 0.281718$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz. A continuación se calcula x_1 :

$$x_1 = \frac{(0)(0.281718) - (1.000000)(-1.000000)}{(0.281718) - (-1.000000)} = 0.780203$$

Después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.780203) = 3(0.780203)^2 - e^{0.780203} = -0.355766$$

y se multiplica $f(0) * f(0.780203) = 0.355766$; como esto es > 0 , el intervalo de nuestra segunda iteración sería $a = 0.780202$ y $b = 1$.

Luego se calcula x_2 con la fórmula de iteración:

$$x_2 = \frac{(0.780203)(0.281718) - (1)(-0.355766)}{(0.281718 - (-0.355766))} = 0.902867$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.902867) = 3(0.903867)^2 - e^{0.903867} = -0.021159$$

y se multiplica $f(0.780203) * f(0.902867) = 0.007528$; como esto es > 0 , el intervalo de nuestra segunda iteración sería $a = 0.902867$ y $b = 1$. Para saber cuando dejar de iterar se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración

6. Para poder obtener x_3, x_4, x_5 y x_6 ; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en la siguiente Cuadro 17:

Cuadro 17. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	0.281718	0.780203	-0.355766	0.355766	-----
2	0.780203	1.000000	-0.355766	0.281718	0.902867	-0.021159	0.007528	0.135861
3	0.902867	1.000000	-0.021159	0.281718	0.909653	-0.001056	0.000022	0.007460
4	0.909653	1.000000	-0.001056	0.281718	0.909990	-0.000052	0.000000	0.000371
5	0.909990	1.000000	-0.000052	0.281718	0.910007	-0.000003	0.000000	0.000018
6	0.910007	1.000000	-0.000003	0.281718	0.910008	0.000000	0.000000	0.000001

A continuación se hace el calculo de los errores relativos.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.902867 - 0.780203}{0.902867} \right| = 0.135861$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.909653 - 0.902867}{0.909653} \right| = 0.007460$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 17.

Comprobación:

$$f(0.910008) = 3(0.910008)^2 - e^{0.910008} = 0.000000$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{0.910008 - 0.910007}{0.910008} \right| = 0.000001 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **0.910008** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 3: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$; en $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo Figura 20; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

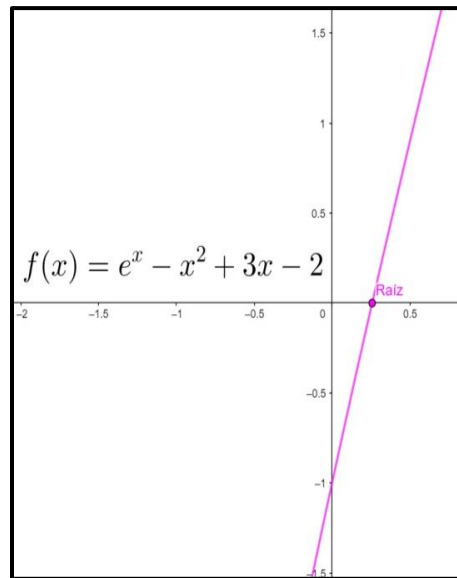


Figura 20. Gráfica $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 2 = -1.000000$$

$$f(1) = e^1 - 1^2 + 3(1) - 2 = 2.718282$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz; a continuación se calcula x_1 con la ecuación(10):

$$x_1 = \frac{(0)(2.718282) - (1.000000)(-1.000000)}{(2.718282) - (-1.000000)}$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.268941) = e^{(0.268941)} - (0.268941)^2 + 3(0.268941) - 2 = 0.043073$$

y se multiplica $f(0) * f(0.268941) = -0.043073$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 0$ y $b = 0.268941$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación (10):

$$x_2 = \frac{(0)(0.043073) - (0.268941)(-1.000000)}{(0.043073) - (-1.000000)} = 0.257836$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.257836) = e^{(0.257836)} - (0.257836)^2 + 3(0.257836) - 2 = 0.001154$$

y se multiplica $f(0) * f(0.257836) = -0.001154$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0$ y $b = 0.257836$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5; ver Cuadro 18.

Cuadro 18. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	2.718282	0.268941	0.043073	-0.043073	-----
2	0.000000	0.268941	-1.000000	0.043073	0.257836	0.001154	-0.001154	0.043073
3	0.000000	0.257836	-1.000000	0.001154	0.257538	0.000031	-0.000031	0.001154
4	0.000000	0.257538	-1.000000	0.000031	0.257531	0.000001	-0.000001	0.000031
5	0.000000	0.257531	-1.000000	0.000001	0.257530	0.000000	0.000000	0.000001

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.257836 - 0.268941}{0.257836} \right| = 0.043073$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.257538 - 0.257836}{0.257538} \right| = 0.001154$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 18.

Comprobación:

$$f(0.257530) = e^{(0.257530)} - (0.257530)^2 + 3(0.257530) - 2 = 0.000000$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.257530 - 0.257531}{0.257530} \right| = 0.000001 \leq 0.00001.$$

En éste ejemplo se puede observar que al aplicar el Método de Falsa Posición uno de los extremos del intervalo se puede quedar fijo; (ver Figura 20). Se puede verificar que para la ecuación $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ el Método de Falsa Posición converge más rápido que el Método de Bisección; aunque hay casos en donde este último converge más rápido.

∴ La raíz es: **0.257530** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 4: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[0, 1.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 7 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

$$f(x) = x^{10} - 1$$

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 21; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0, 1.5]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

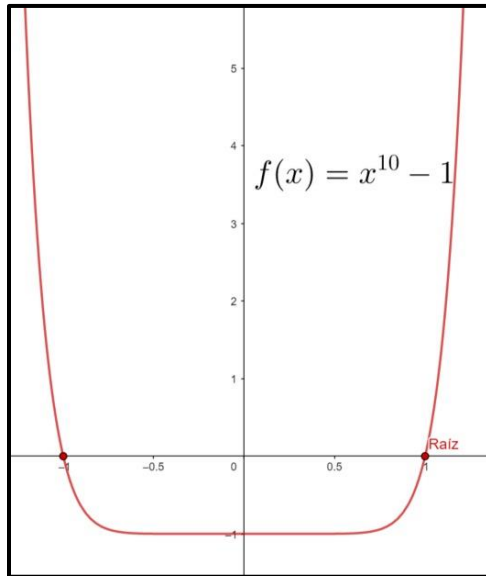


Figura 21. Gráfica $f(x) = x^{10} - 1$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(1.5)$, para verificar que en el intervalo $[0, 1.5]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(0) = (0)^{10} - 1 = -1.000000$$

$$f(1.5) = (1.5)^{10} - 1 = 56.665039$$

Como $f(0) * f(1.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación (10):

$$x_1 = \frac{(0.000000)(56.665039) - (1.500000)(-1.000000)}{(56.665039) - (-1.000000)} = 0.026012$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.026012) = (0.026012)^{10} - 1 = -1.000000$$

y se multiplica $f(0) * f(0.026012) = 1.000000$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 0.026012$ y $b = 1.500000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación (10):

$$x_2 = \frac{(0.026012)(56.665039) - (1.500000)(-1.000000)}{(56.665039) - (-1.000000)} = 0.051573$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.051573) = (0.051573)^{10} - 1 = -1.000000$$

y se multiplica $f(0.026012) * f(0.051573) = 1.000000$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0.051573$ y $b = 1.500000$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 134: $0.000009 \leq 0.00001$. Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{134}$; se repite el proceso anterior. Algunas iteraciones se muestran en el Cuadro 19.

Cuadro 19: Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.500000	-1.000000	56.665039	0.026012	-1.000000	1.000000	-----
2	0.026012	1.500000	-1.000000	56.665039	0.051573	-1.000000	1.000000	0.495627
3	0.051573	1.500000	-1.000000	56.665039	0.076691	-1.000000	1.000000	0.327519
4	0.076691	1.500000	-1.000000	56.665039	0.101374	-1.000000	1.000000	0.243479
5	0.101374	1.500000	-1.000000	56.665039	0.125628	-1.000000	1.000000	0.193064
6	0.125628	1.500000	-1.000000	56.665039	0.149462	-1.000000	1.000000	0.159464
7	0.149462	1.500000	-1.000000	56.665039	0.172882	-1.000000	1.000000	0.135470
8	0.172882	1.500000	-1.000000	56.665039	0.195896	-1.000000	1.000000	0.117482
9	0.195896	1.500000	-1.000000	56.665039	0.218512	-1.000000	1.000000	0.103496
10	0.218512	1.500000	-1.000000	56.665039	0.240735	-0.999999	0.999999	0.092313
11	0.240735	1.500000	-0.999999	56.665039	0.262572	-0.999998	0.999998	0.083168
12	0.262572	1.500000	-0.999998	56.665039	0.284031	-0.999997	0.999995	0.075551
13	0.284031	1.500000	-0.999997	56.665039	0.305118	-0.999993	0.999990	0.069110
14	0.305118	1.500000	-0.999993	56.665039	0.325839	-0.999987	0.999980	0.063593
15	0.325839	1.500000	-0.999987	56.665039	0.346200	-0.999975	0.999962	0.058814

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
16	0.346200	1.500000	-0.999975	56.665039	0.366208	-0.999957	0.999932	0.054636
17	0.366208	1.500000	-0.999957	56.665039	0.385869	-0.999927	0.999883	0.050952
18	0.385869	1.500000	-0.999927	56.665039	0.405188	-0.999881	0.999808	0.047680
19	0.405188	1.500000	-0.999881	56.665039	0.424172	-0.999811	0.999692	0.044754
20	0.424172	1.500000	-0.999811	56.665039	0.442825	-0.999710	0.999522	0.042123
...	...	...	...	...	...	...	...	...
133	0.999887	1.500000	-0.001127	56.665039	0.999897	-0.001028	0.000001	0.000010
134	0.999897	1.500000	-0.001028	56.665039	0.999906	-0.000937	0.000001	0.000009

A continuación se indica como calcular el error relativo.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.051574 - 0.026012}{0.051574} \right| = 0.495627$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.076691 - 0.051574}{0.076691} \right| = 0.327519$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 19.

Comprobación:

$$f(0.999906) = (0.999906)^{10} - 1 = -0.000937 \approx 0$$

∴ La raíz es: **0.999906** con $Tol = 0.00001$

Con el ejemplo 4 se puede comprobar que el aplicar el Método de Falsa Posición uno de los extremos del intervalo se puede quedar fijo; (ver Figura 21); así mismo se puede observar que para la ecuación $x^{10} - 1$ el Método de Falsa Posición funciona de manera deficiente, ya que

converge muy lentamente. El método de bisección ofrece mejores resultados para esta ecuación; ya que converge en 20 iteraciones.

Ejemplo 5: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la primera raíz negativa de la siguiente ecuación; en $[-4,4]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Lial, L.M. (2013).

$$f(x) = \tan(x)$$

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 22; donde se puede observar que la función no es continua en el intervalo $[-4,4]$, y que en este intervalo se encuentran tres raíces; por lo que se tiene que tomar otro intervalo que contenga exactamente una raíz y que la función sea continua en él. Como se busca la primera raíz negativa se toma el intervalo $[-3.5, -2.5]$, empezando a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va ha converger, a la solución buscada.

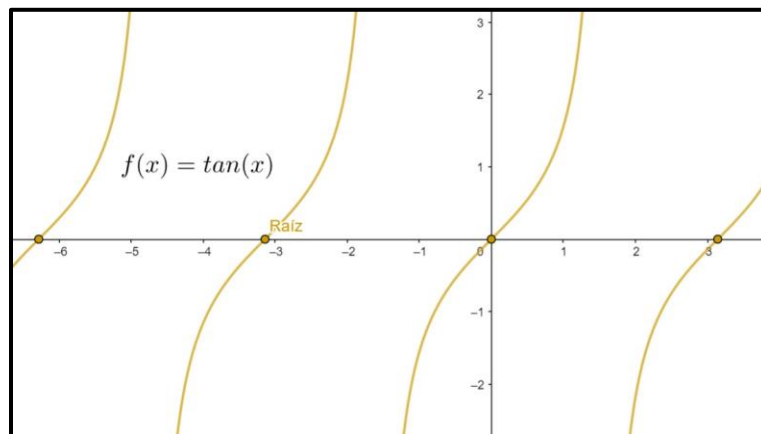


Figura 22. Gráfica $f(x) = \tan(x)$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando

$f(-3.5)$ y $f(-2.5)$, para verificar que en el intervalo $[-3.5, -2.5]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(-3.5) = \tan(-3.5) = -0.374586$$

$$f(-2.5) = \tan(-2.5) = 0.747022$$

Como $f(-3.5) * f(-2.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(-3.500000)(0.747022) - (-2.500000)(-0.374586)}{(0.747022) - (-0.374586)} = -3.166028$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(-3.166028) = \tan(-3.166028) = -0.024440$$

y se multiplica $f(-3.500000) * f(-3.166028) = 0.009155$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = -3.166028$ y $b = -2.500000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(-3.166028)(0.747022) - (-2.500000)(-0.024440)}{(0.747022) - (-0.024440)} = -3.144928$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-3.144928) = \tan(-3.144928) = -0.003335$$

y se multiplica $f(-3.166028) * f(-3.144928) = 0.000082$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = -3.144928$ y $b = -2.500000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6: $0.000003 \leq 0.00001$. Para obtener x_3, x_4, x_5 y x_6 ; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 20.

Cuadro 20. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	-3.500000	-2.500000	-0.374586	0.747022	-3.166028	-0.024440	0.009155	-----
2	-3.166028	-2.500000	-0.024440	0.747022	-3.144928	-0.003335	0.000082	0.006709
3	-3.144928	-2.500000	-0.003335	0.747022	-3.142061	-0.000469	0.000002	0.000912
4	-3.142061	-2.500000	-0.000469	0.747022	-3.141659	-0.000066	0.000000	0.000128
5	-3.141659	-2.500000	-0.000066	0.747022	-3.141602	-0.000009	0.000000	0.000018
6	-3.141602	-2.500000	-0.000009	0.747022	-3.141594	-0.000001	0.000000	0.000003

Para la primera iteración el error relativo no se calcula, porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-3.144928 - (-3.166028)}{-3.144928} \right| = 0.0006709$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{-3.142062 - (-3.144928)}{-3.142062} \right| = 0.000912$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 20.

Comprobación:

$$f(-3.141594) = \tan(-3.141594) = -0.000001 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{(-3.141594) - (-3.141602)}{-3.141594} \right| = 0.000003 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **-3.141594** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 6: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x \log_{10}(x) - 1.2$; en $[2,3]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 23; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[2,3]$ y que en éste intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

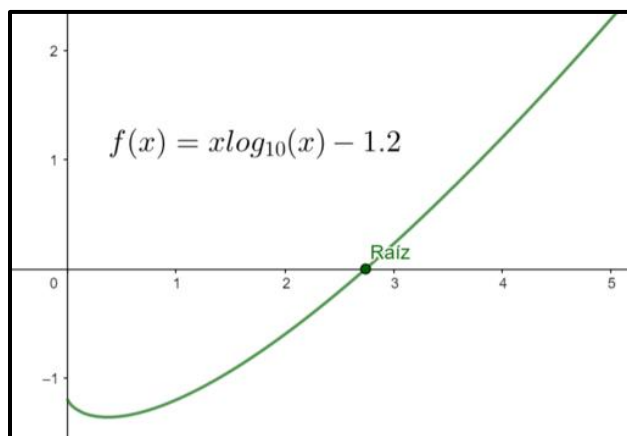


Figura 23. Gráfica $f(x) = x \log_{10}(x) - 1.2$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(2)$ y $f(3)$, para verificar que en el intervalo $[2,3]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(2) = 2\log_{10}(2) - 1.2 = -0.597940$$

$$f(3) = 3\log_{10}(3) - 1.2 = 0.231364$$

Como $f(2) * f(3) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(2.000000)(0.231364) - (3.000000)(-0.597940)}{(0.231364) - (-0.597940)} = 2.721014$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(2.721014) = 2.721014\log_{10}(2.721014) - 1.2 = -0.017091$$

y se multiplica $f(2.721014) * f(2.000000) = 0.010219$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 2.721014$ y $b = 3.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(2.721014)(0.231364) - (3.000000)(-0.017091)}{(0.231364) - (-0.017091)} = 2.740206$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(2.740206) = 2.740206\log_{10}(2.740206) - 1.2 = -0.000384$$

y se multiplica $f(2.740206) * f(2.721014) = 0.000007$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 2.740206$ y $b = 3.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 4 : $0.000004 \leq 0.00001$.

Para obtener x_3, x_4 ; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 21.

Cuadro 21. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	2.000000	3.000000	-0.597940	0.231364	2.721014	-0.017091	0.010219	-----
2	2.721014	3.000000	-0.017091	0.231364	2.740206	-0.000384	0.000007	0.007004
3	2.740206	3.000000	-0.000384	0.231364	2.740636	-0.000009	0.000000	0.000157
4	2.740636	3.000000	-0.000009	0.231364	2.740646	0.000000	0.000000	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\varepsilon = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{2.740206 - 2.721014}{2.740206} \right| = 0.007004$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{2.740636 - 2.740206}{2.740636} \right| = 0.000157$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 21.

Comprobación:

$$f(2.740646) = (2.740646)\log_{10}(2.740646) - 1.2 = 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{2.740646 - 2.740636}{2.740646} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **2.740646** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 7: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = xe^x - 3$; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 24; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

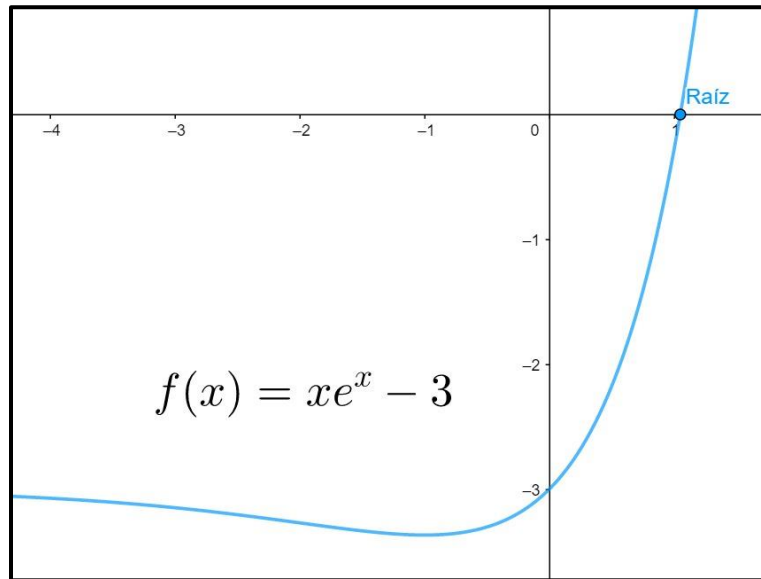


Figura 24. Gráfica $f(x) = xe^x - 3$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(1) = (1)e^{(1)} - 3 = -0.281718$$

$$f(2) = (2)e^{(2)} - 3 = 11.778112$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(1.000000)(11.778112) - (2.000000)(-0.281718)}{(11.778112) - (-0.281718)} = 1.023360$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.023360) = (1.023360)e^{(1.023360)} - 3 = -0.152472$$

y se multiplica $f(1.000000) * f(1.023360) = 0.042954$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 1.023360$ y $b = 2.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(1.023360)(11.778112) - (2.000000)(-0.152472)}{(11.778112) - (-0.152472)} = 1.035841$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.035841) = (1.035841)e^{(1.035841)} - 3 = -0.081542$$

y se multiplica $f(1.023360) * f(1.035841) = 0.012433$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 1.035841$ y $b = 2.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 14: $0.000006 \leq 0.00001$.

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{14}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 22.

Cuadro 22. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-0.281718	11.778112	1.023360	-0.152472	0.042954	-----
2	1.023360	2.000000	-0.152472	11.778112	1.035841	-0.081542	0.012433	0.012049
3	1.035841	2.000000	-0.081542	11.778112	1.042471	-0.043329	0.003533	0.006359
4	1.042471	2.000000	-0.043329	11.778112	1.045980	-0.022945	0.000994	0.003355
5	1.045980	2.000000	-0.022945	11.778112	1.047835	-0.012128	0.000278	0.001770
6	1.047835	2.000000	-0.012128	11.778112	1.048815	-0.006405	0.000078	0.000934
7	1.048815	2.000000	-0.006405	11.778112	1.049332	-0.003380	0.000022	0.000493
8	1.049332	2.000000	-0.003380	11.778112	1.049604	-0.001784	0.000006	0.000260
9	1.049604	2.000000	-0.001784	11.778112	1.049748	-0.000941	0.000002	0.000137
10	1.049748	2.000000	-0.000941	11.778112	1.049824	-0.000496	0.000000	0.000072

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
11	1.049824	2.000000	-0.000496	11.778112	1.049864	-0.000262	0.000000	0.000038
12	1.049864	2.000000	-0.000262	11.778112	1.049885	-0.000138	0.000000	0.000020
13	1.049885	2.000000	-0.000138	11.778112	1.049896	-0.000073	0.000000	0.000011
14	1.049896	2.000000	-0.000073	11.778112	1.049902	-0.000038	0.000000	0.000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$ Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.035841 - 1.023360}{1.035841} \right| = 0.012049$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.042471 - 1.035841}{1.042471} \right| = 0.006359$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 22.

Comprobación:

$$f(1.049902) = (1.049902)e^{(1.049902)} - 3 = -0.000038 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.049902 - 1.049896}{1.049902} \right| = 0.000006 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.049902** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 8: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x^3 + 2x - 5$; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 25; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en éste

intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

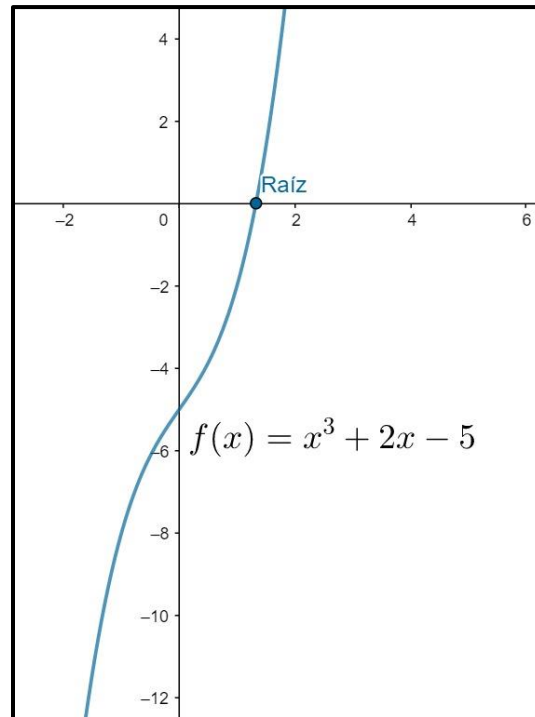


Figura 25. Gráfica $f(x) = x^3 + 2x - 5$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 2(1) - 5 = -2.000000$$

$$f(2) = (2)^3 + 2(2) - 5 = 7.000000$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(1.000000)(7.000000) - (2.000000)(-2.000000)}{(7.000000) - (-2.000000)} = 1.222222$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.222222) = (1.222222)^3 + 2(1.222222) - 5 = -0.0729767$$

y se multiplica $f(1.000000) * f(1.222222) = 1.459534$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 1.222222$ y $b = 2.000000$. Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(1.222222)(7.000000) - (2.000000)(-0.729767)}{(7.000000) - (-0.729767)} = 1.295652$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.295652) = (1.295652)^3 + 2(1.295652) - 5 = -1.110112$$

y se multiplica $f(1.295652) * f(1.222222) = 0.810123$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 1.295652$ y $b = 2.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 10: $0.000004 \leq 0.00001$.

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_{10}$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 23.

Cuadro 23. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-2.000000	7.000000	1.222222	-0.729767	1.459534	-----
2	1.222222	2.000000	-0.729767	7.000000	1.295652	-0.233665	0.170521	0.056674
3	1.295652	2.000000	-0.233665	7.000000	1.318404	-0.071554	0.016720	0.017257
4	1.318404	2.000000	-0.071554	7.000000	1.325301	-0.021608	0.001546	0.005204
5	1.325301	2.000000	-0.021608	7.000000	1.327377	-0.006498	0.000140	0.001564
6	1.327377	2.000000	-0.006498	7.000000	1.328001	-0.001951	0.000013	0.000470
7	1.328001	2.000000	-0.001951	7.000000	1.328189	-0.000586	0.000001	0.000141
8	1.328189	2.000000	-0.000586	7.000000	1.328245	-0.000176	0.000000	0.000042
9	1.328245	2.000000	-0.000176	7.000000	1.328262	-0.000053	0.000000	0.000013
10	1.328262	2.000000	-0.000053	7.000000	1.328267	-0.000016	0.000000	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.295652 - 1.222222}{1.295652} \right| = 0.056674$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.318404 - 1.295652}{1.318404} \right| = 0.017257$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 23.

Comprobación:

$$f(1.328267) = (1.328267)^3 + 2(1.328267) - 5 = -0.000016 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.328267 - 1.328262}{1.328267} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.328267** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 9: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Lial, L.M. (2013).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 26; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

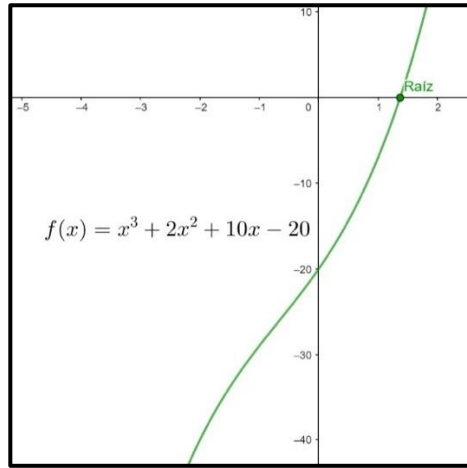


Figura 26. Gráfica $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20 = -7.000000$$

$$f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16.000000$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(1.000000)(16.000000) - (2.000000)(-7.000000)}{(16.000000) - (-7.000000)} = 1.304348$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.304348) = (1.304348)^3 + 2(1.304348)^2 + 10(1.304348) - 20 = 1.334348$$

y se multiplica $f(1.304348) * f(1.000000) = 9.343306$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 1.304348$ y $b = 2.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(1.304348)(16.000000) - (2.000000)(-1.334758)}{(16.000000) - (-1.334758)} = 1.357912$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.357912) = (1.357912)^3 + 2(1.357912)^2 + 10(1.357912) - 20 = -0.229136$$

y se multiplica $f(1.357912) * f(1.304348) = 0.305841$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 1.357912$ y $b = 2.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 7: $0.000005 \leq 0.00001$.

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_7$; se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 24.

Cuadro 24. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-7.000000	16.000000	1.304348	-1.334758	9.343306	-----
2	1.304348	2.000000	-1.334758	16.000000	1.357912	-0.229136	0.305841	0.039446
3	1.357912	2.000000	-0.229136	16.000000	1.366978	-0.038592	0.008843	0.006632
4	1.366978	2.000000	-0.038592	16.000000	1.368501	-0.006479	0.000250	0.001113
5	1.368501	2.000000	-0.006479	16.000000	1.368757	-0.001087	0.000007	0.000187
6	1.368757	2.000000	-0.001087	16.000000	1.368799	-0.000182	0.000000	0.000031
7	1.368799	2.000000	-0.000182	16.000000	1.368807	-0.000031	0.000000	0.000005

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.357912 - 1.304348}{1.357912} \right| = 0.039446$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.366978 - 1.357912}{1.366978} \right| = 0.006632$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 24.

Comprobación:

$$f(1.368807) = (1.368807)^3 + 2(1.368807)^2 + 10(1.368807) - 20 = -0.000031 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.368807 - 1.368799}{1.368807} \right| = 0.000005 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.368807** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 10: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x^3 + 9x + 1$; en $[-0.5, 0]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se gráfica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 27; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-0.5, 0]$ y que en éste intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

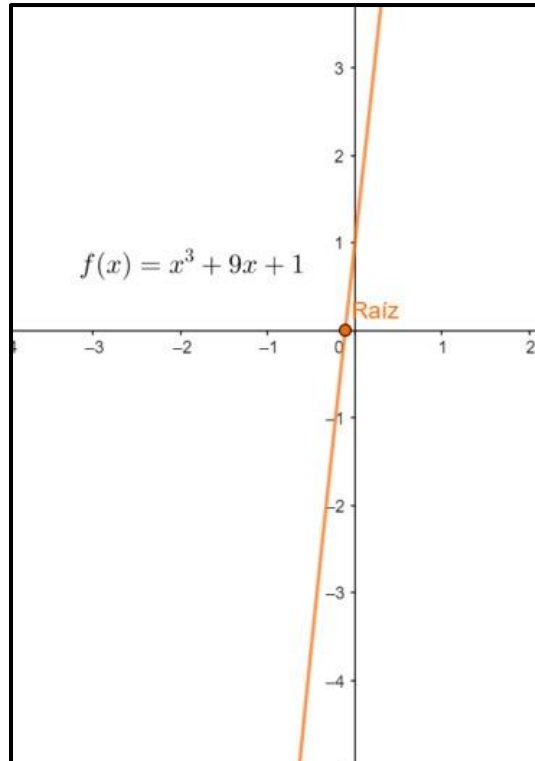


Figura 27. Gráfica $f(x) = x^3 + 9x + 1$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando

$f(-0.5)$ y $f(0)$, para verificar que en el intervalo $[-0.5,0]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(-0.5) = (-0.5)^3 + 9(-0.5) + 1 = -3.625000$$

$$f(0) = (0)^3 + 9(0) + 1 = 1.000000$$

Como $f(-0.5) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(-0.500000)(1.000000) - (0.000000)(-3.625000)}{(1.000000) - (-3.625000)} = -0.108108$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(-0.108108) = (-0.108108)^3 + 9(-0.108108) + 1 = 0.025764$$

y se multiplica $f(-0.108108) * f(-0.500000) = -0.093393$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = -0.500000$ y $b = -0.108108$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(-0.500000)(0.025764) - (-0.108108)(-3.625000)}{(0.025764) - (-3.625000)} = -0.110874$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-0.110874) = (-0.110874)^3 + 9(-0.110874) + 1 = 0.000774$$

y se multiplica $f(-0.110874) * f(-0.500000) = -0.002805$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = -0.500000$ y $b = -0.110874$. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5: $0.000001 \leq 0.00001$.

Para obtener $x_3, \dots, x_5$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 25.

Cuadro 25. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	-0.500000	0.000000	-3.625000	1.000000	-0.108108	0.025764	-0.093393	-----
2	-0.500000	-0.108108	-3.625000	0.025764	-0.110874	0.000774	-0.002805	0.024944
3	-0.500000	-0.110874	-3.625000	0.000774	-0.110957	0.000023	-0.000085	0.000748
4	-0.500000	-0.110957	-3.625000	0.000023	-0.110959	0.000001	-0.000003	0.000023
5	-0.500000	-0.110959	-3.625000	0.000001	-0.110959	0.000000	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{(-0.110874) - (-0.108108)}{-0.110874} \right| = 0.024944$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{(-0.110957) - (-0.110874)}{-0.110957} \right| = 0.000748$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 25.

Comprobación:

$$f(-0.110959) = (-0.110959)^3 + 9(-0.110959) + 1 = 0.000000$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{(-0.110959) - (-0.110959)}{-0.110959} \right| = 0 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **-0.110959** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 11: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$; con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición, se observa que el ejercicio no indica un intervalo para aplicar el método, por ello se tabula $f(x)$, donde se obtiene el Cuadro 26 y se observa que en el intervalo $[1,1.5]$ se encuentra un cambio de signo, por lo que en este intervalo se encuentra exactamente la raíz (Teorema 1).

Cuadro 26. Tabulación $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$

x	f(x)
1	-0.540302
1.5	0.334728
2	1.109294
2.5	1.717434
x	f(x)
3	2.088605
3.5	2.189220

Después se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 28; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,1.5]$; por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

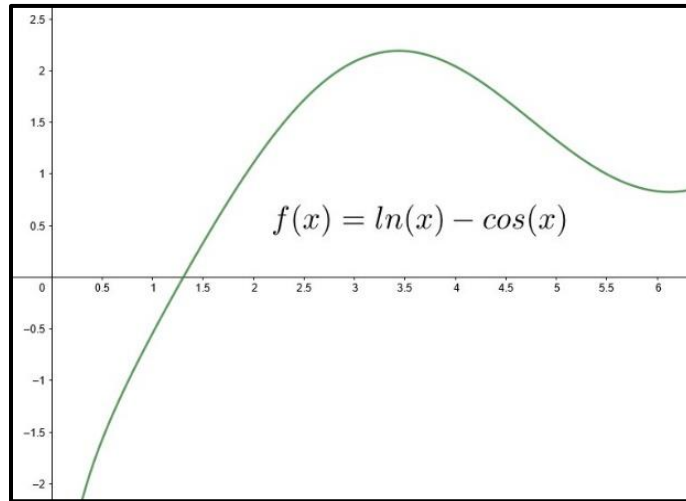


Figura 28. Gráfica $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$

Como $f(1) * f(1.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10, aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando x_1 :

$$x_1 = \frac{(1.000000)(0.334728) - (1.500000)(-0.540302)}{(0.334728) - (-0.540302)} = 1.308734$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.308734) = \ln(1.308734) - \cos(1.308734) = 0.009986$$

y se multiplica $f(1.308734) * f(1.000000) = -0.005396$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 1.000000$ y $b = 1.308734$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(1.000000)(0.009986) - (1.500000)(-0.540302)}{(0.009986) - (-0.540302)} = 1.303131$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.303131) = \ln(1.303131) - \cos(1.303131) = 0.000289$$

y se multiplica $f(1.303131) * f(1.000000) = -0.000156$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 1.000000$ y $b = 1.303131$.

$$x_3 = \frac{(1.000000)(0.000289) - (1.303131)(-0.540302)}{(0.000289) - (-0.540302)} = 1.302969$$

después se calcula $f(x_3)$:

$$f(1.302969) = \ln(1.302969) - \cos(1.302969) = 0.000008$$

y se multiplica $f(1.000000) * f(1.302969) = -0.000005$; como es < 0 , el intervalo para la cuarta iteración sería: $a = 1.000000$ y $b = 1.302369$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 4: $0.000004 \leq 0.00001$.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 27.

Cuadro 27. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	1.500000	-0.540302	0.334728	1.308734	0.009986	-0.005396	-----
2	1.000000	1.308734	-0.540302	0.009986	1.303131	0.000289	-0.000156	0.004299
3	1.000000	1.303131	-0.540302	0.000289	1.302969	0.000008	-0.000005	0.000124
4	1.000000	1.302969	-0.540302	0.000008	1.302964	0.000000	0.000000	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.303131 - 1.308734}{1.303131} \right| = 0.004299$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.308969 - 1.303131}{1.308969} \right| = 0.000124$$

Los errores se muestran en el Cuadro 27.

Comprobación:

$$f(1.302964) = \ln(1.302964) - \cos(1.302964) = 0.000000$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{1.302664 - 1.302969}{1.302664} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.302964** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 12: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x^{2.2} - 3$; en $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 29; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en éste intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

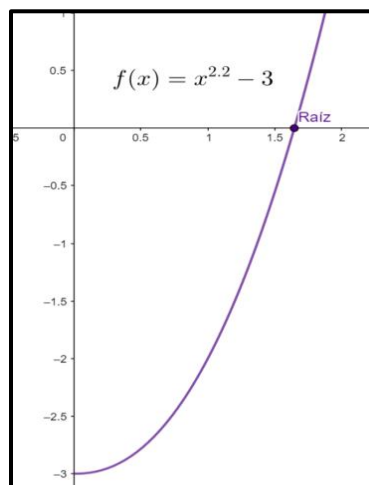


Figura 29. Gráfica $f(x) = x^{2.2} - 3$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(1) = (1)^{2.2} - 3 = -2.000000$$

$$f(2) = (2)^{2.2} - 3 = 1.594793$$

Como $f(1) * f(2) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(1.000000)(1.594793) - (2.000000)(-2.000000)}{(1.594793) - (-2.000000)} = 1.556360$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(1.556360) = (1.556360)^{2.2} - 3 = -0.353681$$

y se multiplica $f(-0.353681) * f(1.000000) = 0.707361$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 1.556360$ y $b = 2.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(1.556360)(1.594793) - (2.000000)(-0.353681)}{(1.594793) - (-0.353681)} = 1.636888$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.636888) = (1.636888)^{2.2} - 3 = -0.043064$$

y se multiplica $f(1.636888) * f(1.556360) = 0.05231$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 1.636888$ y $b = 2.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6: $0.000009 \leq 0.00001$.

Para obtener x_3, x_4, x_5, x_6 ; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 28.

Cuadro 28. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	1.000000	2.000000	-2.000000	1.594793	1.556360	-0.353681	0.707361	-----
2	1.556360	2.000000	-0.353681	1.594793	1.636888	-0.043064	0.015231	0.049196
3	1.636888	2.000000	-0.043064	1.594793	1.646436	-0.004989	0.000215	0.005799
4	1.646436	2.000000	-0.004989	1.594793	1.647538	-0.000575	0.000003	0.000669
5	1.647538	2.000000	-0.000575	1.594793	1.647665	-0.000066	0.000000	0.000077
6	1.647665	2.000000	-0.000066	1.594793	1.647680	-0.000008	0.000000	0.000009

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.636888 - 1.556360}{1.636888} \right| = 0.049196$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.646436 - 1.636888}{1.646436} \right| = 0.005799$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 28.

Comprobación:

$$f(1.647680) = (1.647680)^{2.2} - 3 = -0.000008 \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.647680 - 1.647665}{1.647665} \right| = 0.000009 \leq 0.000001$$

∴ La raíz es: **1.647680** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 13: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = e^{-x} - x$; en $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

Antes de aplicar el Método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 30; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

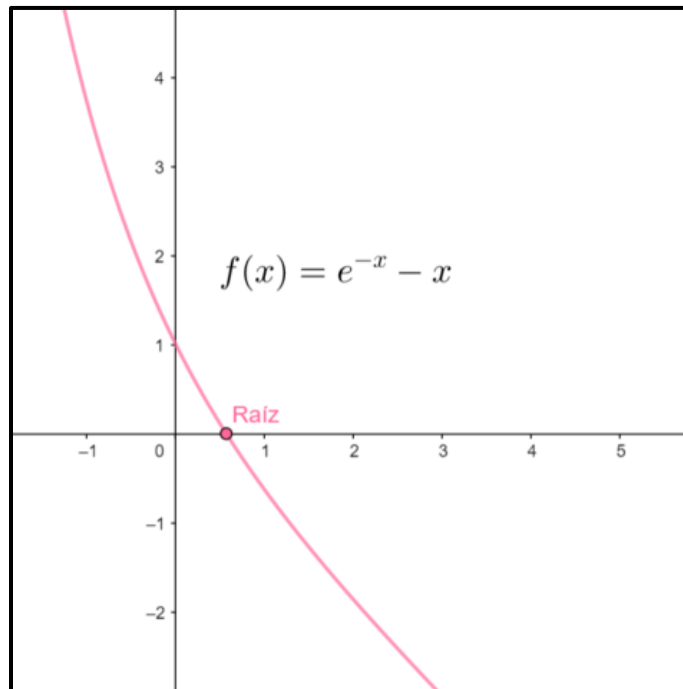


Figura 30. Gráfica $f(x) = e^{-x} - x$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando

$f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra una raíz,

obteniéndose:

$$f(0) = e^{(-0)} - 0 = 1.000000$$

$$f(1) = e^{(-1)} - 1 = -0.632121$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(0.000000)(-0.632121) - (1.000000)(1.000000)}{(-0.632121) - (1.000000)} = 0.612700$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.612700) = e^{(-0.612700)} - 0.612700 = -0.070814$$

y se multiplica $f(0.000000) * f(0.612700) = -0.070814$; como es 0, el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 0.612700$ y $b = 1.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(0.612700)(-0.632121) - (1.000000)(-0.070814)}{(-0.632121) - (-0.070814)} = 0.563838$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.563838) = e^{(-0.563838)} - 0.563838 = 0.005182$$

y se multiplica $f(0.563838) * f(0.612700) = -0.000367$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0.563838$ y $b = 1.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6: $0.000002 \leq 0.00001$.

Para obtener x_3, x_4, x_5, x_6 ; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 29.

Cuadro 29. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	1.000000	-0.632121	0.612700	-0.070814	-0.070814	-----
2	0.612700	1.000000	-0.070814	-0.632121	0.563838	0.005182	-0.000367	0.086659
3	0.563838	1.000000	0.005182	-0.632121	0.567385	-0.000379	-0.000002	0.006251
4	0.567385	1.000000	-0.000379	-0.632121	0.567126	0.000028	0.000000	0.000458
5	0.567126	1.000000	0.000028	-0.632121	0.567145	-0.000002	0.000000	0.000033
6	0.567145	1.000000	-0.000002	-0.632121	0.567143	0.000000	0.000000	0.000002

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.563838 - 0.612700}{0.563838} \right| = 0.086659$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.567385 - 0.563838}{0.567385} \right| = 0.006251$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 29.

Comprobación:

$$f(0.567143) = e^{(-0.567143)} - 0.567143 = 0.000000$$

Podemos observar que se cumplen el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{0.567143 - 0.567145}{0.567143} \right| = 0.000002 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.567143** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 14: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{\frac{x}{2}} \cos(\pi x)$; en $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el método de Falsa Posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 31; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

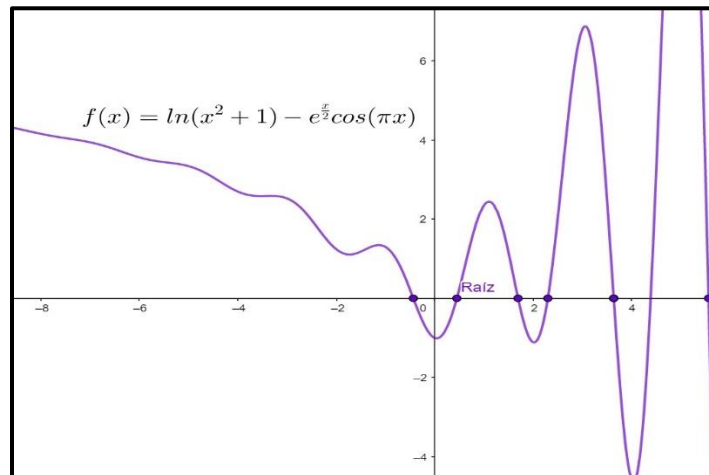


Figura 31. Gráfica $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{\frac{x}{2}} \cos(\pi x)$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando

$f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(0) = \ln((0)^2 + 1) - e^{(0)} \cos(\pi(0)) = -1.000000$$

$$f(1) = \ln((1)^2 + 1) - e^{(\frac{1}{2})} \cos(\pi(1)) = 2.341868$$

Como $f(0) * f(1) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(0.000000)(2.341868) - (1.000000)(-1.000000)}{(2.341868) - (-1.000000)} = 0.299234$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.299234) = \ln((0.299234)^2 + 1) - e^{(\frac{0.299234}{2})} \cos(\pi(0.299234)) = -0.599151$$

y se multiplica $f(0.299234) * f(0.000000) = 0.599151$; como es > 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 0.299234$ y $b = 1.000000$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(0.299234)(2.341868) - (1.000000)(-0.599151)}{(2.341868) - (-0.599151)} = 0.441995$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.441995) = \ln((0.441995)^2 + 1) - e^{(\frac{0.441995}{2})} \cos(\pi(0.441995)) = -0.047592$$

y se multiplica $f(0.441995) * f(0.299234) = 0.028515$; como es > 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0.441995$ y $b = 1.000000$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6: $0.000001 \leq 0.00001$.

Para obtener x_3, x_4, x_5, x_6 ; se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 30.

Cuadro 30. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	2.341868	0.299234	-0.599151	0.599151	-----
2	0.299234	1.000000	-0.599151	2.341868	0.441995	-0.047592	0.028515	0.322993
3	0.441995	1.000000	-0.047592	2.341868	0.453109	0.002635	-0.000125	0.024528
4	0.441995	0.453109	-0.047592	0.002635	0.452526	-0.000021	0.000001	0.001288
5	0.452526	1.000000	-0.000021	2.341868	0.452531	0.000001	0.000000	0.000011
6	0.452531	1.000000	0.000001	2.341868	0.452531	0.000000	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.441995 - 0.299234}{0.441995} \right| = 0.322993$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.453109 - 0.441995}{0.453109} \right| = 0.024528$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 30.

Comprobación:

$$f(0.452531) = \ln((0.452531)^2 + 1) - e^{\left(\frac{0.452531}{z}\right)} \cos(\pi(0.452531)) = 0.000000$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.452531 - 0.452531}{0.452531} \right| = 0 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **0.452531** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 15: Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = x + 1 - 2\text{sen}(\pi x)$; en $[0,0.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

Antes de aplicar el método de falsa posición se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 32; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,0.5]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz (Teorema 1); por lo que se empieza a aplicar el Método de Falsa Posición, ya que se puede garantizar que va a converger.

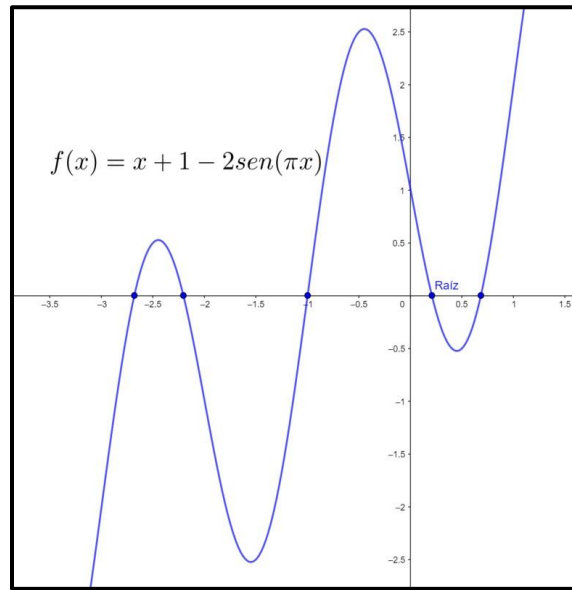


Figura 32. Gráfica $f(x) = x + 1 - 2\text{sen}(\pi x)$

Aplicando el algoritmo 2 del Método de Falsa Posición, se empieza calculando $f(0)$ y $f(0.5)$, para verificar que en el intervalo $[0,0.5]$ se encuentra una raíz, obteniéndose:

$$f(0) = (0) + 1 - 2\text{sen}(\pi(0)) = 1.000000$$

$$f(0.5) = (0.5) + 1 - 2\text{sen}(\pi(0.5)) = -0.500000$$

Como $f(0) * f(0.5) < 0$, el intervalo es correcto ya que encierra una raíz (Teorema 1); a continuación se calcula x_1 con la ecuación 10:

$$x_1 = \frac{(0.000000)(-0.500000) - (0.500000)(1.000000)}{(-0.500000) - (1.000000)} = 0.333333$$

después se calcula $f(x_1)$:

$$f(0.333333) = (0.333333) + 1 - 2\text{sen}(\pi(0.333333)) = -0.398717$$

y se multiplica $f(0.333333) * f(0.000000) =$; como es < 0 , el intervalo para la segunda iteración sería: $a = 0.000000$ y $b = 0.333333$.

Luego se calcula x_2 con la ecuación 10:

$$x_2 = \frac{(0.000000)(-0.398717) - (0.333333)(1.000000)}{(-0.398717) - (1.000000)}$$

$$x_2 = 0.238314$$

después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.238314) = (0.238314) + 1 - 2\text{sen}(\pi(0.238314))$$

y se multiplica $f(0.238314) * f(0.000000) = -0.123037$; como es < 0 , el intervalo para la tercera iteración sería: $a = 0.000000$ y $b = 0.238314$.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 9: $0.000004 \leq 0.00001$.

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_9$; se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 31.

Cuadro 31. Ejemplo del Método de Falsa Posición cuando converge.

n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(x_n)$	$f(x_n) * f(a)$	ε
1	0.000000	0.500000	1.000000	-0.500000	0.333333	-0.398717	-0.398717	-----
2	0.000000	0.333333	1.000000	-0.398717	0.238314	-0.123035	-0.123035	0.398719
3	0.000000	0.238314	1.000000	-0.123037	0.212205	-0.024525	-0.024525	0.123037
4	0.000000	0.212205	1.000000	-0.024525	0.207125	-0.004365	-0.004365	0.024525
5	0.000000	0.207125	1.000000	-0.004365	0.206225	-0.000760	-0.000760	0.004365
6	0.000000	0.206225	1.000000	-0.000760	0.206068	-0.000132	-0.000132	0.000760
7	0.000000	0.206068	1.000000	-0.000132	0.206041	-0.000023	-0.000023	0.000132
8	0.000000	0.206041	1.000000	-0.000023	0.206036	-0.000004	-0.000004	0.000023
9	0.000000	0.206036	1.000000	-0.000004	0.206035	-0.000001	-0.000001	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.238314 - 0.333333}{0.238314} \right| = 0.398717$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.212205 - 0.238314}{0.212205} \right| = 0.123037$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 31.

Comprobación:

$$f(0.206035) = (0.206035) + 1 - 2\text{sen}(\pi(0.206035)) = -0.000001 \approx 0$$

Podemos observar que se cumplen el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{0.206035 - 0.206036}{0.206035} \right| = 0.000004 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **0.206035** con $Tol = 0.00001$

3 Método de Newton

El Método de Newton es una de las técnicas numéricas más poderosas y conocidas, para determinar las raíces de una ecuación. Comienza con una aproximación inicial x_0 ¹² a la raíz, después se traza una recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$. La intersección de la recta tangente con el eje x , se denota como x_1 y se considera una mejor aproximación de la raíz; después se traza otra recta tangente a la curva en el punto $(x_1, f(x_1))$. La nueva intersección de la recta tangente con el eje x , se denota como x_2 y se considera una mejor aproximación de la raíz. El proceso se repite hasta que se cumplan los criterios de las ecuaciones de convergencia previamente vistas en el Método de Bisección. El método de Newton, se puede aplicar para hallar raíces complejas, siempre y cuando el valor inicial x_0 sea un número complejo.

En la Figura 33 se muestra la representación gráfica del Método de Newton.

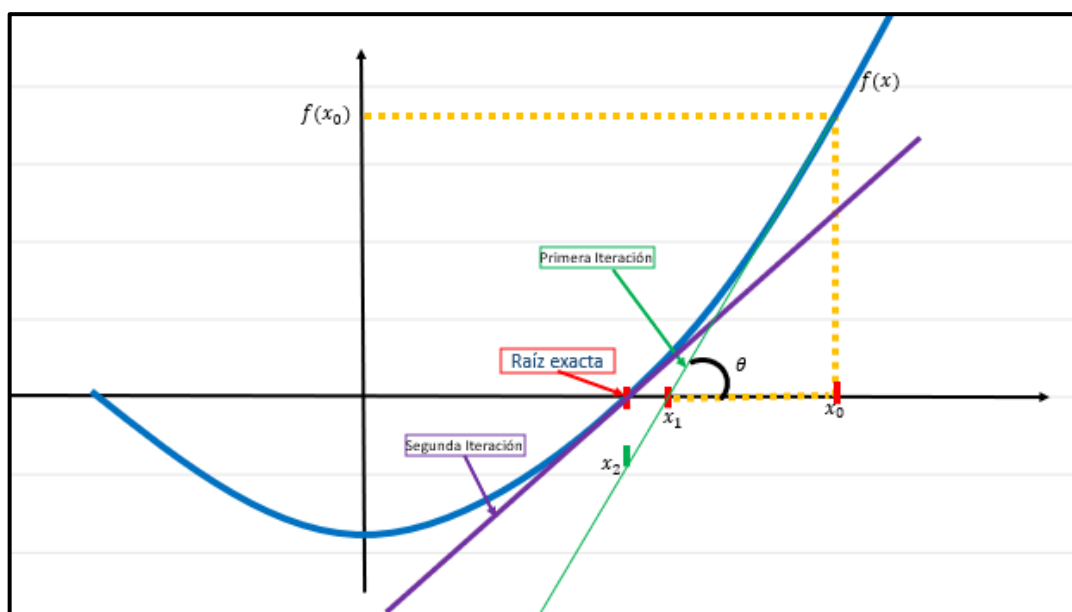


Figura 33. Representación Gráfica del Método de Newton.

¹² El método casi siempre converge muy rápidamente si x_0 está "suficientemente cerca" de la raíz. En la práctica es un tema difícil determinar lo que es "suficientemente cerca", por lo que muchas veces se utiliza el Método de bisección para encontrar una aproximación inicial x_0 . Así mismo si x_0 "no está lo suficientemente cerca" de la raíz, el método quizá no converja a la raíz; pero esto no siempre es así.

La intersección de la recta tangente con el eje x se puede calcular de la siguiente manera, (ver Figura 33):

$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

Se iguala a la primera derivada de x_0 , ya que esta es equivalente a la pendiente:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1}$$

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$(x_0 - x_1)f'(x_0) = f(x_0)$$

$$f(x_0) = (x_0 - x_1)f'(x_0)$$

$$f(x_0) = x_0f'(x_0) - x_1f'(x_0)$$

$$x_1f'(x_0) = x_0f'(x_0) - f(x_0)$$

$$x_1 = \frac{x_0f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Para obtener la n -ésima intersección con el eje x de la recta tangente a la curva, la ecuación sería:

Fórmula de iteración para el Método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (11)$$

Un método alternativo para deducir el Método de Newton, es a partir de la serie de Taylor. Al utilizar la serie de Taylor de $f(x_{n+1})$ en torno a una aproximación x_n de la raíz, la ecuación se puede escribir como:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} + \dots \quad (12)$$

Truncando la serie de Taylor después del término de la primera derivada, se obtiene:

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

En la intersección con el eje x , $f(x_{n+1})$ debe ser igual o muy próximo a cero, entonces:

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

de donde se despeja a x_{n+1} :

$$\begin{aligned} 0 &\approx f(x_n) + x_{n+1}f'(x_n) - x_nf'(x_n) \\ x_{n+1}f'(x_n) &\approx x_nf'(x_n) - f(x_n) \\ x_{n+1} &\approx \frac{x_nf'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &\approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned}$$

Obteniendo la fórmula de iteración para el Método de Newton.

3.1 Algoritmo del Método de Newton

Algoritmo 3

Método de Newton.¹³

Para encontrar una aproximación de la raíz, de una ecuación $f(x) = 0$.

Datos: $f(x)$, $f'(x)$, una aproximación inicial x_0 , una tolerancia Tol y un número máximo de iteraciones N .

Resultados: Una raíz aproximada o un mensaje de falla.

- **Paso 1:** Hacer $n = 0$
- **Paso 2:** Mientras $n \leq N$ repetir los pasos 3 al 11.
 - **Paso 3:** Si $n = 0$ entonces hacer lo siguiente. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 4:** Calcular $f(x_n)$.
 - **Paso 5:** Si $f(x_n) = 0$, entonces IMPRIMIR "Una raíz de la ecuación dada es x_n " y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 6:** Calcular $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

¹³ Burden, 2002, como se citó en Sánchez, 2007.

- **Paso 7:** Calcular $f(x_{n+1})$.
- **Paso 8:** Si $f(x_{n+1}) = 0$ entonces IMPRIMIR “Una raíz de la ecuación dada es x_{n+1} ” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 9:** Si $n > 0$ entonces calcular $\varepsilon = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$ y realizar la siguiente comparación. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 10:** Si $\varepsilon \leq Tol$ y $|f(x_n)| \leq Tol$ entonces IMPRIMIR “Una raíz aproximada de la ecuación dada es x_n ” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 11:** Hacer $n = n + 1$.
- **Paso 12:** IMPRIMIR mensaje de falla “El método no converge a una raíz” y TERMINAR.

En algunos casos lo más difícil al aplicar el método de Newton consiste en el cálculo de la derivada de la función $f(x)$ y la obtención del valor inicial x_0 .

Se tiene que tener en cuenta que la naturaleza de la función puede originar dificultades, llegando incluso hacer que el método no converja; algunos casos son:

- **Caso 1:** Si la aproximación inicial x_0 , es un punto de inflexión (es decir $f''(x) = 0$), las iteraciones divergen progresivamente de la raíz (Ver Figura 34).
- **Caso 2:** Si el método oscila en los alrededores de un máximo o un mínimo local. Tales oscilaciones pueden alcanzar una pendiente cercana a cero, en cuyo caso la solución se aleja del área de interés (Ver Figura 35).
- **Caso 3:** Si el valor inicial cercano a la raíz, salta a otra raíz muy distante de la anterior. Ésta tendencia a alejarse del área de interés se debe a que se encuentran pendientes cercanas a cero (Ver Figura 36).
- **Caso 4:** Una pendiente nula provoca una división entre cero (lo cual geométricamente representa a una tangente horizontal que jamás corta al eje x) (Ver figura 37).

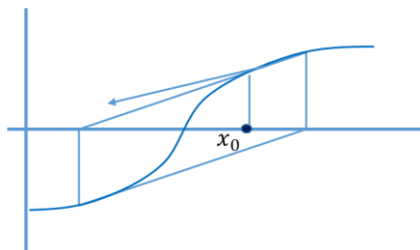


Figura 34. Caso 1

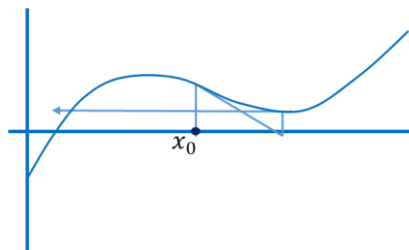


Figura 35. Caso 2

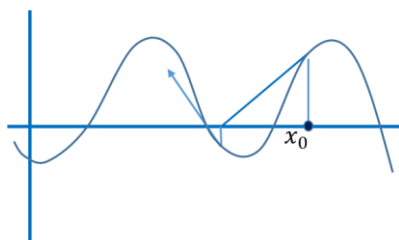


Figura 36. Caso 3

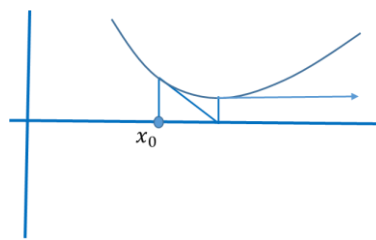


Figura 37. Caso 4

Las figuras 34, 35, 36 y 37 fueron tomadas y adaptadas de Burden (2002), como se citó en Sánchez, 2007.

Análisis de convergencia para el Método de Newton.

Para analizar la convergencia del método de Newton, se utiliza la serie de Taylor, tomando en cuenta que el error en la n -ésima iteración sería: $\varepsilon_n = x - x_n$.

$$\varepsilon_{n+1} = x - x_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n-1} = x - x_{n-1}$$

Se sustituye la ecuación (11), en ε_{n+1} , obteniéndose:

$$\varepsilon_{n+1} = x - \left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]$$

$$\varepsilon_{n+1} = x - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

como $\varepsilon_n = x - x_n$, entonces:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n f'(x_n) + f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (13)$$

Al utilizar la serie de Taylor de $f(x)$ en torno a una aproximación x_n de la raíz, la ecuación se puede escribir como:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2!} + \dots$$

Truncando la serie de Taylor después del término de la segunda derivada, se obtiene:

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2}$$

En la intersección con el eje x , $f(x)$ debe ser igual a cero, entonces:

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)(x - x_n)^2}{2}$$

como $\varepsilon_n = x - x_n$, entonces:

$$0 \approx f(x_n) + f'(x_n)(\varepsilon_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(\varepsilon_n)^2$$

$$f(x_n) + f'(x_n)(\varepsilon_n) \approx -\frac{f''(x_n)}{2}(\varepsilon_n)^2$$

Se multiplica la ecuación anterior por $\frac{1}{f'(x_n)}$

$$\frac{f(x_n) + f'(x_n)(\varepsilon_n)}{f'(x_n)} \approx -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(\varepsilon_n)^2$$

obteniendo del lado derecho de la ecuación anterior ε_{n+1} , (Ver ecuación 13):

$$\therefore \varepsilon_{n+1} \approx -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(\varepsilon_n)^2$$

es decir, el error en una determinada iteración es proporcional al cuadrado del error anterior. Esto significa que si en una determinada iteración se tienen n cifras decimales exactas, en la siguiente iteración se tendrán $2n$ cifras decimales exactas. A este comportamiento se le llama convergencia cuadrática.

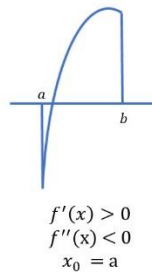
Teorema 3

Sea f una función continua y dos veces derivable en el intervalo $[a, b]$. Si $f(a) * f(b) < 0$ y sus dos primeras derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ no se anulan en $[a, b]$, existe una única raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en dicho intervalo y se puede garantizar la convergencia del Método de Newton tomando como valor inicial x_0 el extremo del intervalo en el que la función y su derivada tienen el mismo signo.

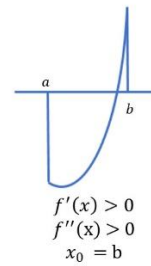
Aplicando el Teorema 3 se tiene que: el método de Newton converge a la única raíz x de la ecuación $f(x)$, si f es continua y dos veces derivable en el intervalo $[a, b]$, y si $f(a) * f(b) < 0$ y sus dos primeras derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$ no se anulan en $[a, b]$, tomando como valor inicial:

$$x_0 = \begin{cases} a & \text{si } f(a) * f''(a) > 0 \\ b & \text{si } f(b) * f''(b) > 0 \end{cases} \quad (14)$$

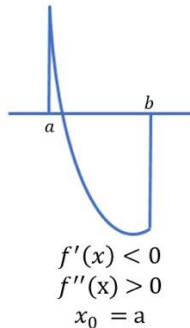
es decir el extremo en que la función tiene el mismo signo que su segunda derivada. En las figuras a), b), c) y d) se visualiza como escoger x_0 cuando se tiene un intervalo $[a, b]$, de acuerdo con el Teorema 3.



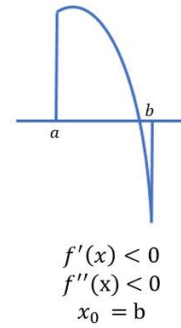
a)



b)



c)



d)

3.2 Ventajas y Desventajas del Método

Ventajas

1. La razón de convergencia iterativa del método de Newton es alta.
2. Sirve para encontrar raíces complejas, para lo cual requiere que x_0 sea un número complejo $x_0 = a + bi$.

Desventajas

1. El método requiere una buena estimación inicial. De otro modo, la solución iterativa puede diverger o converger a una solución irrelevante.
2. La derivada $f'(x)$ no siempre es fácil de calcular.

3.3 Ejemplos

Ejemplo 1: Localizar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ mediante el Método de Newton, con $x_0 = 1.2$, en el intervalo $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-5} y utilizar un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el método de Newton se grafica la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, obteniendo la Figura 38, donde se puede observar que la función es continua y que el punto inicial se encuentra cerca de la raíz; por lo que se empieza a aplicar el método.

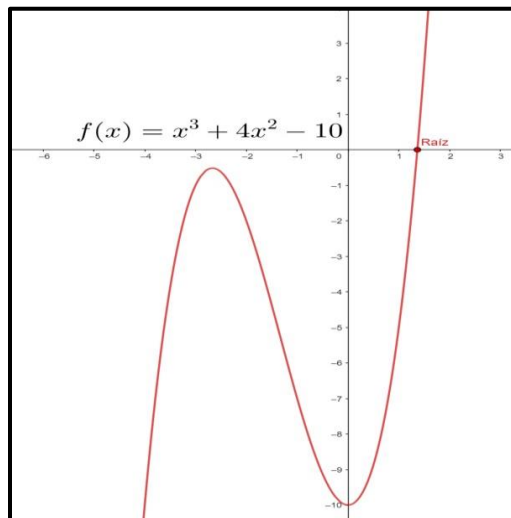


Figura 38. Gráfica de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Aplicando el Método de Newton primero es indispensable obtener la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

Se empieza calculando $f(1.2)$ y $f'(1.2)$ obteniendo:

$$f(1.2) = (1.2)^3 + 4(1.2)^2 - 10 = -2.512$$

$$f'(1.2) = 3(1.2)^2 + 8(1.2) = 13.92$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 1.2 - \frac{-2.512}{13.92} = 1.380460$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(1.380460) = (1.380460)^3 + 4(1.380460)^2 - 10 = 0.253377$$

$$f'(1.380460) = 3(1.380460)^2 + 8(1.380460) = 16.760689$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 1.380460 - \frac{0.253377}{16.760689} = 1.365343$$

Para obtener x_3 y x_4 se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 32:

Cuadro 32. Ejemplo del método de Newton cuando converge

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	1.2	-2.512	13.92	-----
1	1.380460	0.253377	16.760689	0.130725
2	1.365343	0.001866	16.515229	0.011072
3	1.365230	0.000000	16.513399	0.000083
4	1.36523	0.000000	16.513399	0.0000000

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{1.380460 - 1.2}{1.380460} \right| = 0.130725$$

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{1.365343 - 1.380460}{1.365343} \right| = 0.011072$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 32.

Comprobación:

$$f(1.365230) = (1.365230)^3 + 4(1.365230)^2 - 10 \approx 0$$

∴ La raíz es: **1.365230** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 2: Localizar la raíz de $f(x) = 3x^2 - e^x$ mediante el Método de Newton, con $x_0 = 0.8$, en el intervalo $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y utilizar un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Puig, E.L. (1996).

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = 3x^2 - e^x$, obteniendo la Figura 39, donde se puede observar que la función es continua y que el punto inicial se encuentra cerca de la raíz; por lo que se empieza a aplicar el método.

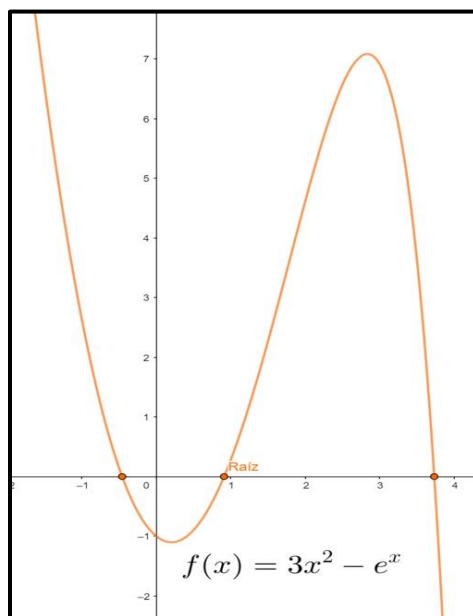


Figura 39. Gráfica de $f(x) = 3x^2 - e^x$

Aplicando el Método de Newton primero es indispensable obtener la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 6x - e^x$$

Se empieza calculando $f(0.8)$ y $f'(0.8)$ obteniendo:

$$f(0.8) = 3(0.8)^2 - e^{(0.8)} = -0.305541$$

$$f'(0.8) = 6(0.8) - e^{(0.8)} = 2.574459$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 0.8 - \frac{-0.305541}{2.574459} = 0.918682$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(0.918682) = 3(0.8)^2 - e^{(0.8)} = 0.025943$$

$$f'(0.918682) = 6(0.8) - e^{(0.8)} = 3.006107$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 0.918682 - \frac{0.025943}{3.006107} = 0.910052$$

Para obtener x_3 se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el siguiente Cuadro 33.

Cuadro 33. Ejemplo del Método de Newton cuando converge

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	0.8	-0.305541	2.574459	-----
1	0.918682	0.025943	3.006107	0.129187
2	0.910052	0.000132	2.975860	0.009483
3	0.910008	0.00000	2.975706	0.000048

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{0.918682 - 0.8}{0.918682} \right| = 0.129187$$

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.910052 - 0.918682}{0.910052} \right| = 0.009483$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 33.

Comprobación:

$$f(0.910008) = 3(0.910008)^2 - e^{0.910008} \approx 0$$

∴ La raíz es: **0.910008** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 3: Localizar la raíz de $f(x) = x^2 + 2$ mediante el Método de Newton, con $x_0 = 1 + i$ con una tolerancia de 10^{-5} y utilizar un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Noguera, M. (2001).

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = x^2 + 2$, obteniendo la Figura 40, donde se puede observar que la función es continua.

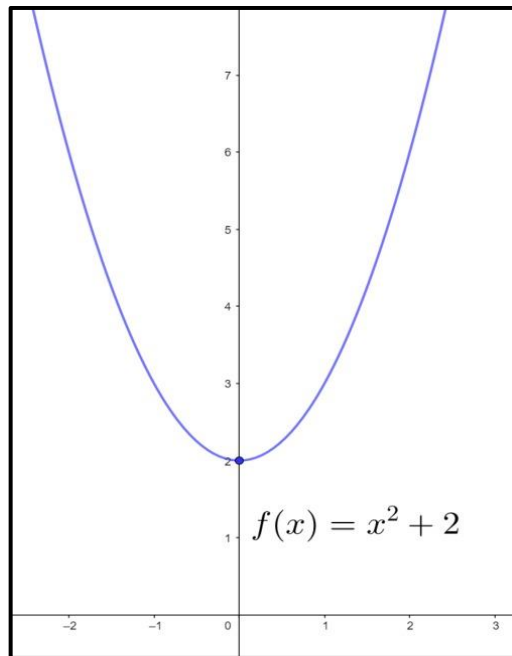


Figura 40. Gráfica de $f(x) = x^2 + 2$

Aplicando el Método de Newton primero es indispensable obtener la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 2x$$

Se empieza calculando $f(1 + i)$ y $f'(1 + i)$ obteniendo:

$$f(1 + i) = (1 + i)^2 + 2 = 2 + 2i$$

$$f'(1 + i) = 2(1 + i) = 2 + 2i$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 1 + i - \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = i$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(i) = (i)^2 + 2 = 1$$

$$f'(i) = 2(i) = 2i$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = i - \frac{1}{2i} = 1.5i$$

Para obtener x_3 , x_4 y x_5 se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 34:

Cuadro 34. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	$1 + i$	$2 + 2i$	$2 + 2i$	-----
1	i	1	$2i$	1
2	$1.5i$	-0.25	$3i$	0.333333
3	$1.416666i$	-0.006944	$2.833332i$	0.058824
4	$1.414215i$	-0.000005	$2.82843i$	0.0001733
5	$1.414213i$	0.0000009	$2.828426i$	0.000000

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera¹⁴:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{i - (1 + i)}{i} \right| = \frac{-1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$$

$$|0 + i| = 1$$

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{(1.5i) - (i)}{1.5i} \right| = 0.333333$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 34.

Comprobación:

$$f(1.414213i) = (1.414213i)^2 + 2 \approx 0$$

∴ La raíz es: **1.414213i** con una $Tol = 0.00001$

Ejemplo 4: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$, con $x_0 = 0.5$, con una tolerancia de 10^{-5} , utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

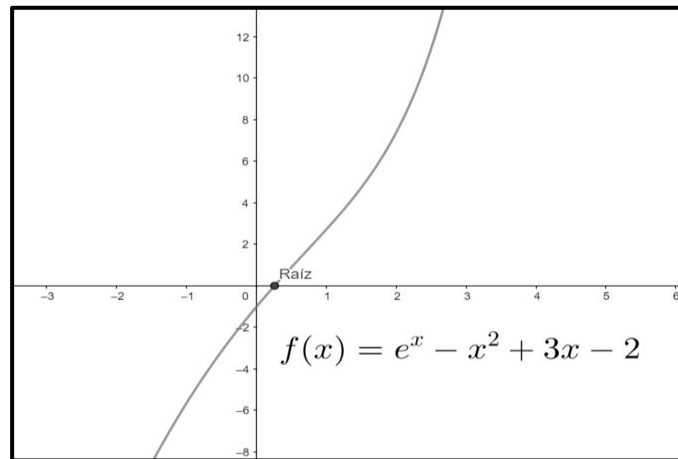


Figura 41. Gráfica de $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

¹⁴ Recuerda que el valor absoluto de un complejo es $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$, obteniendo la Figura 41, donde se puede observar que la función es continua y que el punto inicial se encuentra cerca de la raíz; por lo que se empieza a aplicar el método.

Antes de aplicar el Método de Newton es indispensable obtener la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = e^x - 2x + 3$$

Se empieza calculando $f(0.5)$ y $f'(0.5)$ obteniendo:

$$f(0.5) = e^{0.5} - (0.5)^2 + 3(0.5) - 2 = 0.898721$$

$$f'(0.5) = e^{0.5} - 2(0.5) + 3 = 3.648721$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11 :

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.898721}{3.648721} = 0.253689$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(0.253689) = e^{0.253689} - (0.253689)^2 + 3(0.253689) - 2 = -0.014520$$

$$f'(0.253689) = e^{0.253689} - 2(0.253689) + 3 = 3.781393$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11 :

$$x_2 = 0.253689 - \left(\frac{-0.014520}{3.781393} \right) = 0.257529$$

después se calcula $f(x_2)$ y $f'(x_2)$:

$$f(0.257529) = e^{0.257529} - (0.257529)^2 + 3(0.257529) - 2 = -0.000005$$

$$f'(0.257529) = e^{0.257529} - 2(0.257529) + 3 = 3.778671$$

Para obtener x_3 se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 35:

Cuadro 35. Ejemplo del método de Newton cuando converge

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	0.500000	0.898721	3.648721	-----
1	0.253689	-0.014520	3.781393	0.970917
2	0.257529	-0.000005	3.778671	0.014911
3	0.257530	-0.000001	3.778671	0.000004

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{0.253689 - 0.500000}{0.253689} \right| = 0.970917$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.257529 - 0.253689}{0.257529} \right| = 0.014911$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 35.

Comprobación:

$$f(0.257530) = e^{0.257530} - (0.257530)^2 + 3(0.257530) - 2 = -0.000001 \approx 0$$

∴ La raíz es: **0.257530** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 5: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz positiva más pequeña de la siguiente ecuación; con $x_0 = 3.6$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 7 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

$$f(x) = \tan(x) - 0.5x$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 42; donde se puede observar que la función no es continua y que el punto inicial no se encuentra tan cerca de la raíz.

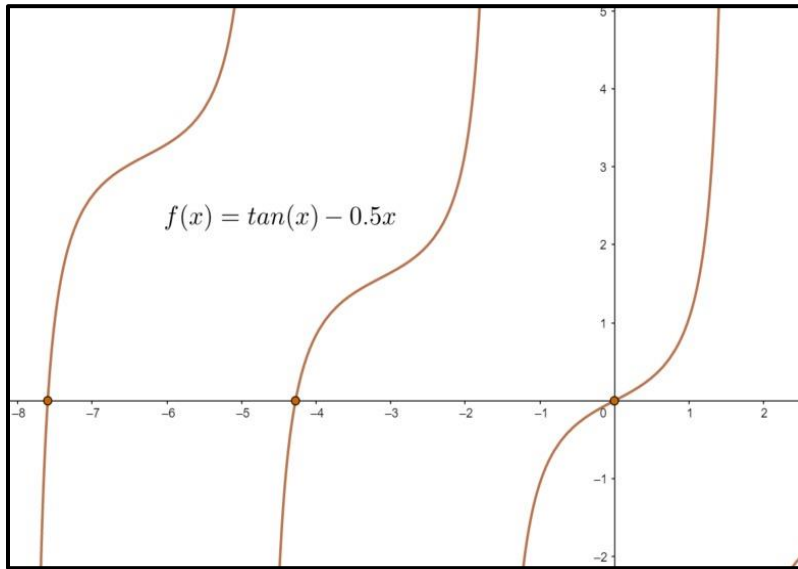


Figura 42. Gráfica de $f(x) = \tan(x) - 0.5x$

Supóngase que no se grafica la función y se empieza aplicar el método.

Se calcula la primera derivada $f'(x)$.

$$f'(x) = 0.5 + \tan(x)^2$$

Utilizando el Algoritmo 3, se empieza calculando $f(3.6)$ y $f'(3.6)$ obteniendo:

$$f(3.6) = \tan(3.6) - 0.5(3.6) = -1.3065333$$

$$f'(3.6) = 0.5 + \tan(3.6)^2 = 0.7435094$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 3.6 - \left(\frac{-1.3065333}{0.7435094} \right) = 5.3572519$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(5.3572519) = \tan(5.3572519) - 0.5(5.3572519) = -4.0081833$$

$$f'(5.3572519) = 0.5 + \tan(5.3572519)^2 = 2.2677228$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 5.3572519 - \left(\frac{-4.0081833}{2.2677228} \right) = 7.124745$$

después se calcula $f(x_2)$ y $f'(x_2)$:

$$f(7.1247445) = \tan(7.1247445) - 0.5(7.1247445) = -2.4432340$$

$$f'(7.1247445) = 0.5 + \tan(7.1247445)^2 = 1.7524705$$

Para obtener $x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{15}$; se repite el proceso anterior. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro

36:

Cuadro 36. Ejemplo del método de Newton cuando no converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	3.6000000	-1.3065333	0.7435094	-----
1	5.3572519	-4.0081833	2.2677228	0.3280137
2	7.1247445	-2.4432340	1.7524705	0.2480780
3	8.5189101	-5.5349126	2.1267919	0.1636554
4	11.1213803	-13.4674562	63.0169493	0.2340060
5	11.3350919	-8.4988493	8.5162789	0.0188540
6	12.3330453	-6.4041764	0.5564793	0.0809170
7	23.8414274	-15.4051057	12.6409875	0.4827052

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
8	25.0600906	-12.6028240	0.5052967	0.486296
9	50.0015240	-25.2710266	0.5730430	0.4988135
10	94.1012279	-47.1982239	0.5217887	0.4686411
11	184.5558964	-93.3036189	1.5520003	0.4901207
12	244.6741959	-1227249969	0.6504656	0.2457076
13	433.3467358	-216.8688528	0.5382144	0.4353847
14	836.2881153	-417.4233796	1.0193768	0.4818212
15	1245.7769124	-630.2274064	54.3601902	0.3287015

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{5.3572519 - 3.6000000}{5.3572518} \right| = 0.3280137$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{7.1247445 - 5.3572519}{7.1247445} \right| = 0.2480780$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 36.

Se puede verificar que el método de Newton no converge debido a que la aproximación inicial x_0 “no es lo suficientemente cercano” a la raíz, sería mejor empezar con $x_0 = 4$. Esto no siempre es así, es decir, habrá casos en donde el método converja aunque la aproximación inicial “no este lo suficientemente cerca” de la raíz.

Ejemplo 6: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; en $[-0.65, 0.65]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. (Sugerencia: usar el Teorema 3). Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

$$\frac{3e^x}{1+e^x} = 2$$

Se iguala la ecuación con cero, para utilizar el método, es decir:

$$\frac{3e^x}{1+e^x} - 2 = 0$$

$$f(x) = \frac{3e^x}{1+e^x} - 2$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 43; donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-0.65, 0.65]$ y que en este intervalo se encuentra exactamente una raíz.

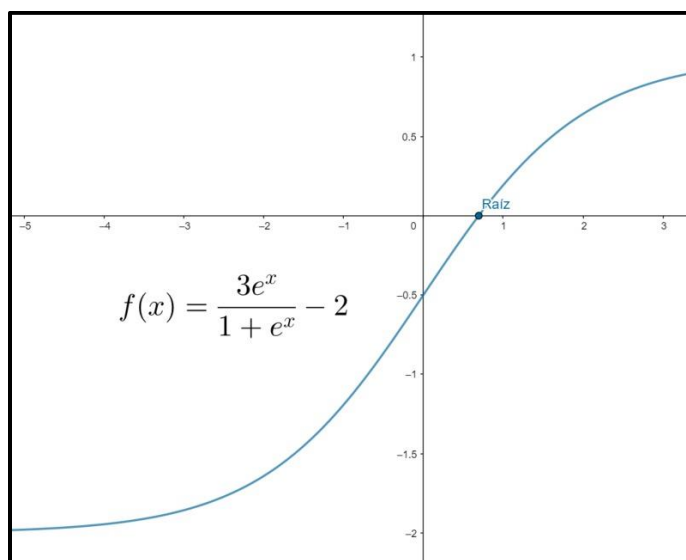


Figura 43. Gráfica de $f(x) = \frac{3e^x}{1+e^x} - 2$

Se calcula la primera y la segunda derivada $f'(x)$ y $f''(x)$, (obtenidas con Maple):

$$f'(x) = \frac{3e^x}{1+e^x} - \frac{3(e^x)^2}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{3e^x}{1+e^x} - \frac{9(e^x)^2}{(1+e^x)^2} + \frac{6(e^x)^3}{(1+e^x)^3}$$

Para saber que aproximación inicial tomar, se verifica en qué extremo del intervalo la función y su derivada tienen el mismo signo (Teorema 3); obteniendo:

$$f(-0.65) = \frac{3e^{(-0.65)}}{1+e^{(-0.65)}} - 2 = -0.971031$$

$$f''(-0.65) = \frac{3e^{(-0.65)}}{1 + e^{(-0.65)}} - \frac{9(e^{(-0.65)})^2}{(1 + e^{(-0.65)})^2} + \frac{6(e^{(-0.65)})^3}{(1 + e^{(-0.65)})^3} = 0.212292$$

$$f(0.65) = \frac{3e^{(0.65)}}{1 + e^{(0.65)}} - 2 = -0.028969$$

$$f''(0.65) = \frac{3e^{(0.65)}}{1 + e^{(0.65)}} - \frac{9(e^{(0.65)})^2}{(1 + e^{(0.65)})^2} + \frac{6(e^{(0.65)})^3}{(1 + e^{(0.65)})^3} = -0.212292$$

Tomando como valor inicial $x_0 = 0.65$, ya que en este extremo del intervalo la función y su derivada tienen el mismo signo. Por lo que se empieza a aplicar el Método de Newton, ya que se puede garantizar que va a converger. Utilizando el Algoritmo 3, se empieza calculando $f(0.65)$ y $f'(0.65)$ obteniendo:

$$f(0.65) = \frac{3e^{(0.65)}}{1 + e^{(0.65)}} - 2 = -0.028969$$

$$f'(0.65) = \frac{3e^{(0.65)}}{1 + e^{(0.65)}} - \frac{3(e^{(0.65)})^2}{(1 + e^{(0.65)})^2} = 0.676043$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 0.65 - \frac{0.028969}{0.676043} = 0.692850$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(0.692850) = \frac{3e^{(0.692850)}}{1 + e^{(0.692850)}} - 2 = -0.000198$$

$$f'(0.692850) = \frac{3e^{(0.692850)}}{1 + e^{(0.692850)}} - \frac{3(e^{(0.692850)})^2}{(1 + e^{(0.692850)})^3} = 0.666733$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 0.692850 - \frac{-0.000198}{0.666733} = 0.693147$$

después se calcula $f(x_2)$ y $f'(x_2)$:

$$f(0.693147) = \frac{3e^{(0.693147)}}{1 + e^{(0.693147)}} - 2 = 0.000000$$

$$f'(0.693147) = \frac{3e^{(0.693147)}}{1 + e^{(0.693147)}} - \frac{3(e^{(0.693147)})^2}{(1 + e^{(0.693147)})^2} = 0.666667$$

Para obtener x_3 ; se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 37:

Cuadro 37. Ejemplo del método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	0.650000	-0.028969	0.676043	-----
1	0.692850	-0.000198	0.666733	0.061846
2	0.693147	0.000000	0.666667	0.000428
3	0.693147	0.000000	0.666666	0.000000

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{0.692850 - 0.650000}{0.692850} \right| = 0.061846$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.693147 - 0.692850}{0.693147} \right| = 0.000428$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 37.

Comprobación:

$$f(0.693147) = \frac{3e^{0.693147}}{1+e^{0.693147}} - 2 = 0.000000 \approx 0$$

$\therefore$ La raíz es: **0.693147** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 7: Usar el método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz compleja de la siguiente ecuación; con $x_0 = 1 + i$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$$

Antes de aplicar el método de Newton se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 44; donde se puede observar que la función sólo tiene una raíz real, por lo que las otras dos raíces son complejas.

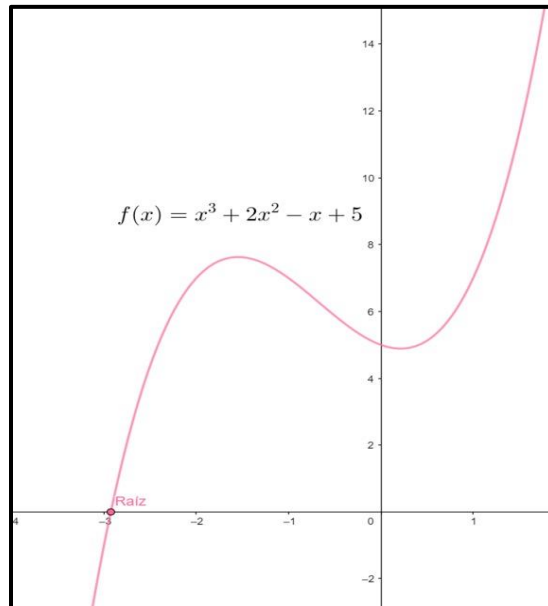


Figura 44. Gráfica de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

Utilizando el algoritmo 3, se empieza calculando $f(1 + i)$ y $f'(1 + i)$ obteniéndose:

$$f(1 + i) = (1 + i)^3 + 2(1 + i)^2 - (1 + i) + 5 = 2 + 5i$$

$$f'(1 + i) = 3(1 + i)^2 + 4(1 + i) - 1 = 3 + 10i$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = (1 + i) - \frac{2 + 5i}{3 + 10i} = 0.486239 + 1.045872i$$

después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$\begin{aligned}
f(0.486239 + 1.045872i) &= (0.486239 + 1.045872i)^3 + 2(0.486239 + 1.045872i)^2 - \\
&(0.486239 + 1.045872i) + 5 = 1.318268 + 0.586095i \\
f'(0.486239 + 1.045872i) &= 3(0.486239 + 1.045872i)^2 + 4(0.486239 + 1.045872i) - 1 \\
&= -1.627307 + 7.234746i
\end{aligned}$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$\begin{aligned}
x_2 &= (0.486239 + 1.045872i) - \frac{1.318268 + 0.586095i}{-1.627307 + 7.234746i} \\
&= 0.448140 + 1.236655i
\end{aligned}$$

después se calcula $f(x_2)$ y $f'(x_2)$:

$$\begin{aligned}
f(0.448140 + 1.236655i) &= (0.448140 + 1.236655i)^3 + 2(0.448140 + 1.236655i)^2 - \dots \\
&\dots - (0.448140 + 1.236655i) + 5 \\
&= -0.071155 - 0.166043i \\
f'(0.448140 + 1.236655i) &= 3(0.448140 + 1.236655i)^2 + 4(0.448140 + 1.236655i) - 1 \\
&= -3.192898 + 8.271787i
\end{aligned}$$

Para obtener x_3, x_4 , etc., se repite el proceso anterior. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 38:

Cuadro 38. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	1.000000+1.000000i	2.000000+5.000000i	3.000000+10.000000i	-----
1	0.486239+1.045872i	1.318268+0.586095i	-1.627307+7.234746i	0.447216
2	0.448140+1.236655i	-0.071155-0.166043i	-3.192898+8.271787i	0.147907
3	0.462721+1.222425i	0.001564-0.001357i	-2.989757+8.283546i	0.015588
4	0.462929+1.222540i	-0.000001+0.000001i	-2.989209+8.285833i	0.000180
5	0.462926+1.222540i	-0.000000-0.000002i	-2.989209+8.285830i	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{(0.486239 + 1.045872i) - (1.000000 + 1.000000i)}{0.486239 + 1.045872i} \right| = 0.447216$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{(0.448140 + 1.236655i) - (0.486239 + 1.045872i)}{0.448140 + 1.236655i} \right| = 0.147907$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 38.

Recuerda que el valor absoluto de los números complejos está definido de la siguiente manera:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} f(0.462926 + 1.222540i) &= (0.462926 + 1.222540i)^3 + 2(0.462926 + 1.222540i)^2 \\ &\quad - (0.462926 + 1.222540i) + 5 \\ &= -0.000000 - 0.000002i \approx 0 + 0i \end{aligned}$$

∴ La raíz es: **0.462926+1.222540i** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 8: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz compleja de la siguiente ecuación; con $x_0 = i$ y una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Puig, E.L. (1996).

$$f(x) = x^2 + 4$$

Antes de aplicar el método se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 45; donde se puede observar que ambas raíces son complejas.

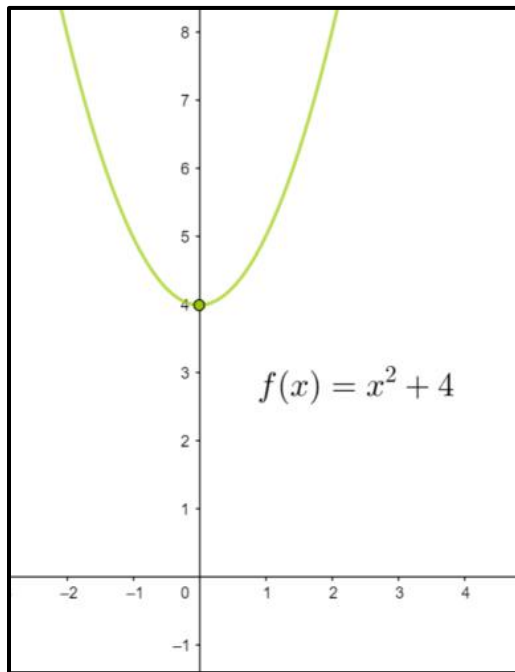


Figura 45. Gráfica de $f(x) = x^2 + 4$

Se calcula la primera derivada, $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x$$

Se empieza calculando $f(i)$ y $f'(i)$ obteniendo:

$$f(i) = i^2 + 4 = 3$$

$$f'(i) = 2i$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = i - \frac{3}{2i} = 2.5i$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(2.5i) = (2.5i)^2 + 4 = -2.25$$

$$f'(2.5i) = 2(2.5i) = 5i$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 2.5i - \left(\frac{-2.25}{5i} \right) = 2.05i$$

Después se calcula $f(x_2)$ y $f'(x_2)$:

$$f(2.05i) = (2.05i)^2 + 4 = -0.2025$$

$$f'(2.05i) = 2(2.05i) = 4.1i$$

Luego se calcula x_3 con la ecuación 11:

$$x_3 = 2.05i - \left(\frac{-0.2025}{4.1i} \right) = 2.00061i$$

Después se calcula $f(x_3)$ y $f'(x_3)$:

$$f(2.00061i) = (2.00061i)^2 + 4 = -0.00244$$

$$f'(2.00061i) = 2(2.00061i) = 4.00122i$$

Luego se calcula x_4 con la ecuación 11:

$$x_4 = 2.00061i - \left(\frac{-0.00244}{4.00122i} \right) = 2i$$

Después se calcula $f(x_4)$ y $f'(x_4)$:

$$f(2i) = (2i)^2 + 4 = 0$$

$$f'(2i) = 2(2i) = 4i$$

Para obtener x_5 , se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 39.

Cuadro 39. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	i	3	$2i$	-----
1	$2.5i$	-2.25	$5i$	0.600000
2	$2.05i$	-0.2025	$4.1i$	0.219512
3	$2.00061i$	-0.00244	$4.00122i$	0.024687
4	$2i$	0	$4i$	0.000305
5	$2i$	0	$4i$	0.0000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{2.5i - i}{2.5i} \right| = 0.600000$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{2.05i - 2.5i}{2.05i} \right| = 0.219512$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 39.

Comprobación:

$$f(2i) = (2i)^2 + 4 \approx 0$$

∴ La raíz es: **2i** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 9: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz positiva más pequeña de la siguiente ecuación; con $x_0 = 5$, con una tolerancia de 10^{-6} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Burden, R. (2017).

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$, obteniendo la Figura 46, donde se puede observar que la función es continua.

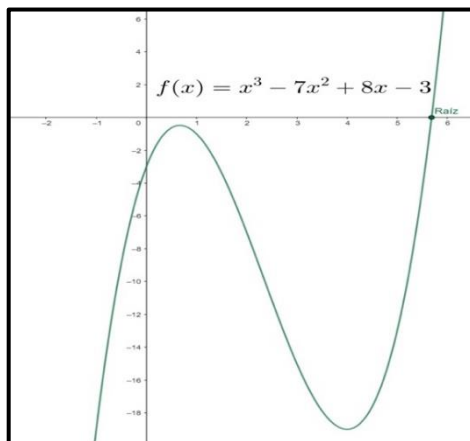


Figura 46. Gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8$$

Se empieza calculando $f(5)$ y $f'(5)$

$$f(5) = 5^3 - 7(5^2) + 8(5) - 3 = -13$$

$$f'(5) = 3(5)^2 - 14(5) + 8 = 13$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 5 - \frac{-13}{13} = 6$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(6) = 6^3 - 7(6^2) + 8(6) - 3 = 9$$

$$f'(6) = 3(6)^2 - 14(6) + 8 = 32$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 6 - \frac{9}{32} = 5.718750$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(5.718750) = (5.718750)^3 - 7(5.718750^2) + 8(5.718750) - 3 = 0.847870$$

$$f'(5.718750) = 3(5.718750)^2 - 14(5.718750) + 8 = 26.049805$$

Para obtener $x_3, x_4 \dots x_n$, se repite el proceso anterior. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 40.

Cuadro 40. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	5.000000	-13.000000	13.000000	-----
1	6.000000	9.000000	32.000000	0.166667
2	5.718750	0.847870	26.049805	0.049180
3	5.686202	0.010725	25.391851	0.005724
4	5.685780	0.000002	25.383355	0.000074
5	5.685780	0.000000	25.383353	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{6 - 5}{6} \right| = 0.166667$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{5.718750 - 6}{5.718750} \right| = 0.049180$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 40.

Comprobación:

$$f(5.685780) = (5.685780)^3 - 7(5.685780)^2 + 8(5.685780) - 3 \approx 0$$

∴ La raíz es: **5.685780** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 10: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz positiva más pequeña de la siguiente ecuación; con $x_0 = 3.5$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Puig, E.L. (1996).

$$f(x) = 2x^2 + 5 - e^x$$

Antes de aplicar el método de Newton se grafica la función $f(x) = 2x^2 + 5 - e^x$, obteniendo la Figura 47, donde se puede observar que la función es continua.

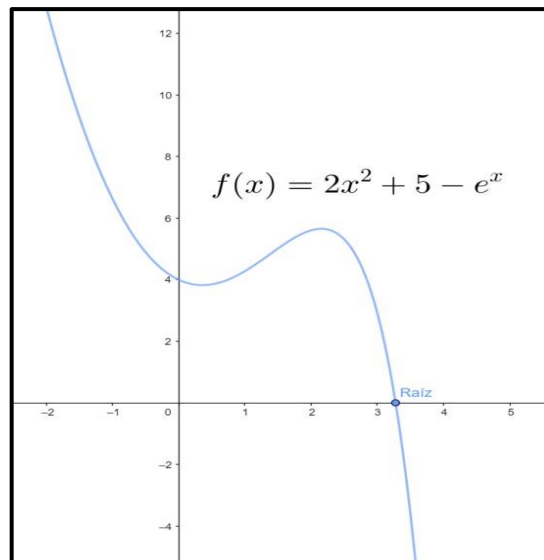


Figura 47. Gráfica de $f(x) = 2x^2 + 5 - e^x$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x - e^x$$

Se empieza calculando $f(3.5)$ y $f'(3.5)$

$$f(3.5) = 2(3.5)^2 + 5 - e^{(3.5)} = -3.615452$$

$$f'(3.5) = 4(3.5) - e^{(3.5)} = -19.115452$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 3.5 - \frac{-3.615452}{-19.115452} = 3.310862$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(3.310862) = 2(3.310862)^2 + 5 - e^{(3.310862)} = -0.485132$$

$$f'(3.310862) = 4(3.310862) - e^{(3.310862)} = -14.165301$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 3.310862 - \frac{-0.485132}{-14.165301} = 3.276614$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(3.276614) = 2(3.276614)^2 + 5 - e^{(3.276614)} = -0.013546$$

$$f'(3.276614) = 4(3.276614) - e^{(3.276614)} = -13.379493$$

Para obtener $x_3, x_4 \dots x_n$, se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 41.

Cuadro 41. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	3.500000	-3.615452	-19.115452	-----
1	3.310862	-0.485132	-14.165301	0.057126
2	3.276614	-0.013546	-13.379493	0.010452
3	3.275602	-0.000012	-13.356740	0.000309
4	3.275601	0.000000	-13.356721	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{3.310862 - 3.5}{3.310862} \right| = 0.057126$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{3.276614 - 3.310862}{3.276614} \right| = 0.010452$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 41.

Comprobación:

$$f(3.275601) = 2(3.275601)^2 + 5 - e^{(3.275601)} \approx 0$$

∴ La raíz es: **3.275601** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 11: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; con $x_0 = -3.5$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Noguera, M. (2001).

$$f(x) = x^3 - x^2 - 15x + 1$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = x^3 - x^2 - 15x + 1$, obteniendo la Figura 48, donde se puede observar que la función es continua.

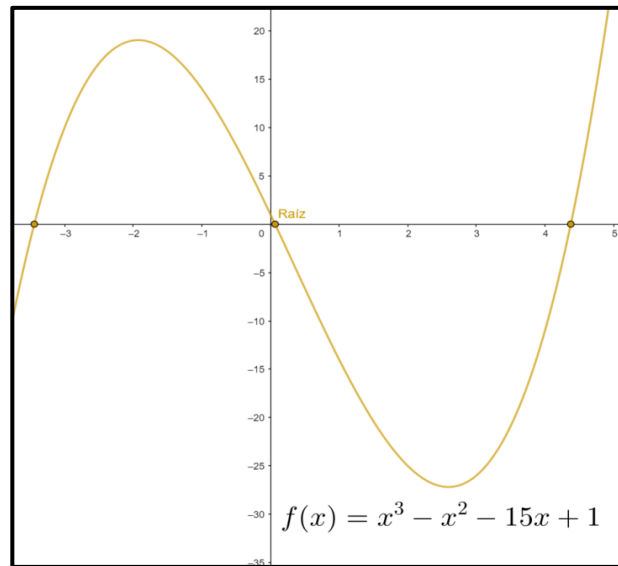


Figura 48. Gráfica de $f(x) = x^3 - x^2 - 15x + 1$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 15$$

Se empieza calculando $f(-3.5)$ y $f'(-3.5)$

$$f(-3.5) = (-3.5)^3 - (-3.5)^2 - 15(-3.5) + 1 = -1.625000$$

$$f'(-3.5) = 3(-3.5)^2 - 2(-3.5) - 15 = 28.750000$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = -3.5 - \frac{-1.625000}{28.750000} = -3.443478$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-3.443478) = (-3.443478)^3 - (-3.443478)^2 - 15(-3.443478) + 1 = -0.036559$$

$$f'(-3.443478) = 3(-3.443478)^2 - 2(-3.443478) - 15 = 27.459584$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = -3.443478 - \frac{-0.036559}{27.459584} = -3.442147$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-3.442147) = (-3.442147)^3 - (-3.442147)^2 - 15(-3.442147) + 1 = -0.000020$$

$$f'(-3.442147) = 3(-3.442147)^2 - 2(-3.442147) - 15 = 27.429420$$

Para obtener x_3 , se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 42.

Cuadro 42. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	-3.500000	-1.625000	28.750000	-----
1	-3.443478	-0.036559	27.459584	0.016414
2	-3.442147	-0.000020	27.429420	0.000387
3	-3.442146	0.000000	27.429403	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{-3.443478 - (-3.5)}{-3.443478} \right| = 0.016414$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-3.442147 - (-3.443478)}{-3.442147} \right| = 0.000387$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 42.

Comprobación:

$$f(-3.442146) = (-3.442146)^3 - (-3.442146)^2 - 15(-3.442146) + 1 \approx 0$$

∴ La raíz es: **-3.442146** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 12: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; con $x_0 = -1.5$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Burden, R. (2017).

$$f(x) = 2 - x^2 - \text{sen}(x)$$

Antes de aplicar el método de Newton se grafica la función $f(x) = 2 - x^2 - \text{sen}(x)$, obteniendo la Figura 49, donde se puede observar que la función es continua.

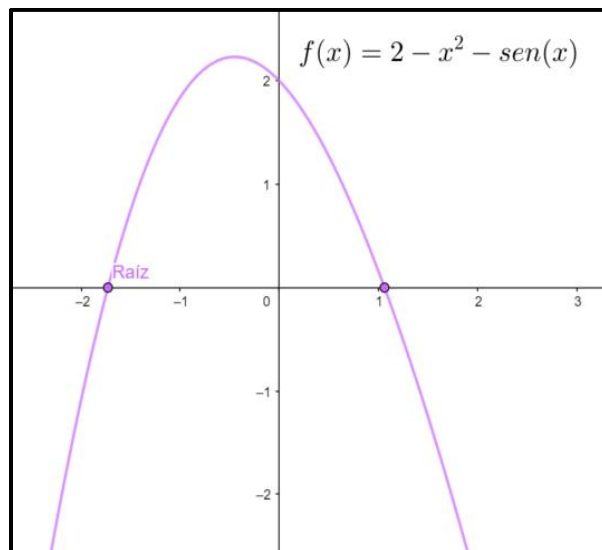


Figura 49. Gráfica de $f(x) = 2 - x^2 - \text{sen}(x)$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = -\cos(x) - 2x$$

Se empieza calculando $f(-1.5)$ y $f'(-1.5)$

$$f(-1.5) = 2 - (-1.5)^2 - \text{sen}(-1.5) = 0.747495$$

$$f'(-1.5) = -\cos(-1.5) - 2(-1.5) = 2.929263$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = -1.5 - \frac{0.747495}{2.929263} = -1.755182$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-1.755182) = 2 - (-1.755182)^2 - \sin(-1.755182) = -0.097614$$

$$f'(-1.755182) = -\cos(-1.755182) - 2(-1.755182) = 3.693706$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = -1.755182 - \frac{-0.097614}{3.693706} = -1.728755$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-1.728755) = 2 - (-1.728755)^2 - \sin(-1.728755) = -0.001042$$

$$f'(-1.728755) = -\cos(-1.728755) - 2(-1.728755) = 3.614812$$

Para obtener x_3 y x_4 , se repite el proceso anterior. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 43.

Cuadro 43: Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	-1.500000	0.747495	2.929263	-----
1	-1.755182	-0.097614	3.693706	0.145388
2	-1.728755	-0.001042	3.614812	0.015287
3	-1.728466	-0.000000	3.613950	0.000167
4	-1.728466	-0.000000	3.613950	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{-1.755182 - (-1.500000)}{-1.755182} \right| = 0.145388$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-1.728755 - (-1.755182)}{-1.728755} \right| = 0.015287$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 43.

Comprobación:

$$f(-1.728466) = 2 - (-1.728466)^2 - \sin(-1.728466) \approx 0$$

∴ La raíz es: **-1.728466** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 13: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz positiva más grande de la siguiente ecuación; con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x + 3$$

Antes de aplicar el Método de Newton se observa que el ejercicio no indica un intervalo para aplicar el método, por ello se tabula $f(x)$, donde se obtiene el Cuadro 44 y se observa que en el intervalo $[-5,5]$ se encuentra un cambio de signo, por lo que en este intervalo se encuentra exactamente la raíz.

Cuadro 44. Tabulación $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x + 3$

x	$f(x)$
-1	0
0	3
1	8
2	-3
3	-24
4	-25
5	48

Después se grafica la función $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x + 3$, obteniendo la Figura 50, donde se puede observar que la función es continua, y tomamos a $x_0 = 5$ como punto de inicio al ser la raíz positiva más grande.

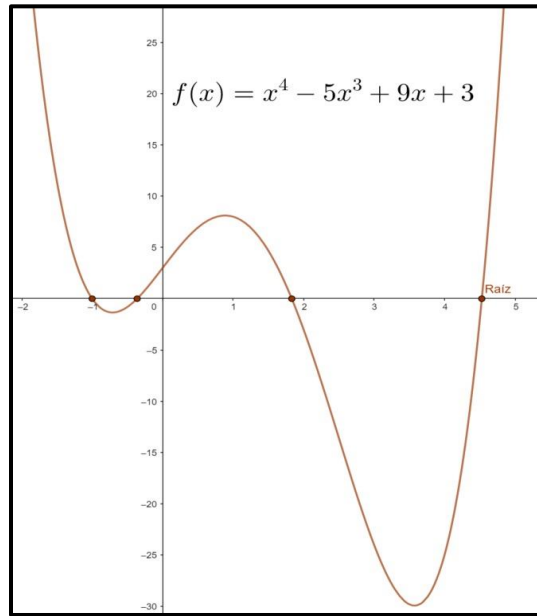


Figura 50. Gráfica de $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x + 3$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 9$$

Se empieza calculando $f(5)$ y $f'(5)$

$$f(5) = (5)^4 - 5(5)^3 + 9(5) + 3 = 48$$

$$f'(5) = 4(5)^3 - 15(5)^2 + 9 = 134$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 5 - \frac{48}{134} = 4.641791$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(4.641791) = (4.641791)^4 - 5(4.641791)^3 + 9(4.641791) + 3 = 8.950542$$

$$f'(4.641791) = 4(4.641791)^3 - 15(4.641791)^2 + 9 = 85.858919$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = 4.641791 - \frac{8.950542}{85.858919} = 4.537544$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(4.537544) = (4.537544)^4 - 5(4.537544)^3 + 9(4.537544) + 3 = 0.632997$$

$$f'(4.537544) = 4(4.537544)^3 - 15(4.537544)^2 + 9 = 73.859932$$

Para obtener x_3 , x_4 y x_5 , se repite el proceso anterior. Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 45.

Cuadro 45. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	5.000000	48.000000	134.000000	-----
1	4.641791	8.950542	85.858919	0.077170
2	4.537544	0.632997	73.859932	0.022974
3	4.528974	0.004066	72.911999	0.001892
4	4.528918	0.000000	72.905850	0.000012
5	4.528918	0.000000	72.905850	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{4.641791 - (5)}{4.641791} \right| = 0.077170$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{4.537544 - 4.641791}{4.537544} \right| = 0.022974$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 45.

Comprobación:

$$f(4.528918) = (4.528918)^4 - 5(4.528918)^3 + 9(4.528918) + 3 \approx 0$$

∴ La raíz es: **4.528918** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 14: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz positiva más pequeña de la siguiente ecuación; con $x_0 = 1$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Manterola, M. (2009).

$$f(x) = x\cos(x) - x^2$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = x\cos(x) - x^2$, obteniendo la Figura 51, donde se puede observar que la función es continua.

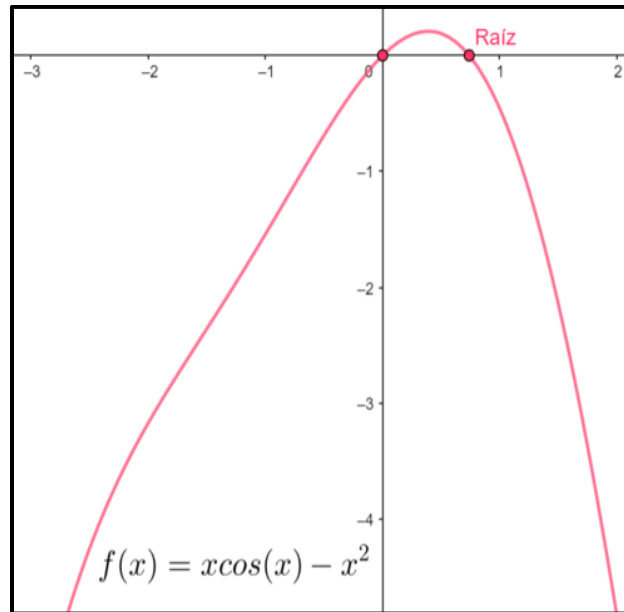


Figura 51. Gráfica de $f(x) = x\cos(x) - x^2$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = -x\sin(x) + \cos(x) - 2x$$

Se empieza calculando $f(1)$ y $f'(1)$

$$f(1) = (1)\cos(1) - (1)^2 = -0.459698$$

$$f'(1) = -(1)\sin(1) + \cos(1) - 2 = -2.301169$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 1 - \frac{-0.459698}{-2.301169} = 0.800233$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(0.800233) = (0.800233)\cos(0.800233) - (0.800233)^2 = -0.459698$$

$$f'(0.800233) = -(0.800233)\sin(0.800233) + \cos(0.800233) - 2(0.800233) = -2.301169$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = (0.800233) - \frac{-0.459698}{-2.301169} = 0.744094$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(0.744094) = (0.744094)\cos(0.744094) - (0.744094)^2 = -0.006245$$

$$f'(0.744094) = -(0.744094)\sin(0.744094) + \cos(0.744094) - 2(0.744094) = -1.256467$$

Para obtener $x_3, x_4, y x_5$, se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 46.

Cuadro 46. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	1.000000	-0.459698	-2.301169	-----
1	0.800233	-0.082979	-1.478108	0.249636
2	0.744094	-0.006245	-1.256467	0.075445
3	0.739124	-0.000048	-1.237093	0.006725
4	0.739085	0.000000	-1.236942	0.000053
5	0.739085	0.000000	-1.236942	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{0.800233 - 1}{0.800233} \right| = 0.249636$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{0.744094 - 0.800233}{0.744094} \right| = 0.075445$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 46.

Comprobación:

$$f(0.739085) = (0.739085)\cos(0.739085) - (0.739085)^2 \approx 0$$

∴ La raíz es: **0.739085** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 15: Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación; con $x_0 = 0$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

$$f(x) = \cos(x) + 2\text{sen}(x) + x^2$$

Antes de aplicar el Método de Newton se grafica la función $f(x) = \cos(x) + 2\text{sen}(x) + x^2$, obteniendo la Figura 52, donde se puede observar que la función es continua.

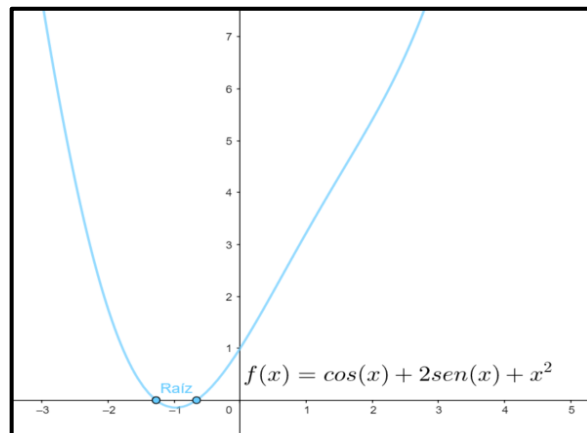


Figura 52. Gráfica de $f(x) = \cos(x) + 2\text{sen}(x) + x^2$

Se calcula la primera derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = -\text{sen}(x) + 2\cos(x) + 2x$$

Se empieza calculando $f(0)$ y $f'(0)$

$$f(0) = \cos(0) + 2(0) + 0^2 = 1$$

$$f'(0) = -\text{sen}(0) + 2\cos(0) + 2(0) = 2$$

A continuación se calcula x_1 con la ecuación 11:

$$x_1 = 0 - \frac{1}{2} = -0.500000$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-0.500000) = \cos(-0.500000) + 2\text{sen}(-0.500000) + (-0.500000)^2 = 0.168731$$

$$f'(-0.500000) = -\text{sen}(-0.500000) + 2\cos(-0.500000) + 2(-0.500000) = 1.234591$$

Luego se calcula x_2 con la ecuación 11:

$$x_2 = (-0.500000) - \frac{0.168731}{1.234591} = -0.636670$$

Después se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$:

$$f(-0.636670) = \cos(-0.636670) + 2(-0.636670) + (-0.636670)^2 = 0.020386$$

$$f'(-0.636670) = -\text{sen}(-0.636670) + 2\cos(-0.636670) + 2(-0.636670) = 0.929341$$

Para obtener $x_3, x_4, \dots, x_n$, se repite el proceso anterior.

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| \leq 0.00001$.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 47.

Cuadro 47. Ejemplo del Método de Newton cuando converge.

n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$f(x_{n+1})$	$f'(x_n)$	ε
0	0.000000	1.000000	2.000000	-----
1	-0.500000	0.168731	1.234591	1.000000
2	-0.636670	0.020386	0.929341	0.214664
3	-0.658606	0.000578	0.876494	0.033307
4	-0.659265	0.000001	0.874890	0.001000
5	-0.659266	0.000000	0.874889	0.000001
6	-0.659266	0.000000	0.874889	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo se calcula de la siguiente manera:

$$\left| \frac{x_1 - x_0}{x_1} \right| = \left| \frac{-0.500000 - 0}{-0.500000} \right| = 1.000000$$

Para la segunda iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_2 - x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{-0.636670 - (-0.500000)}{-0.636670} \right| = 0.214664$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 47.

Comprobación:

$$f(-0.659266) = \cos(-0.659266) + 2\sin(-0.659266) + (-0.659266)^2 \approx 0$$

∴ La raíz es: **-0.659266** con $Tol = 0.00001$

4 Método de la Secante

El *Método de la secante* es una variante del Método de Newton, debido a que se utiliza la aproximación a la derivada $f'(x_n)$, es decir la pendiente de la recta, obteniéndose:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad \text{Pendiente de la recta}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

Fórmula de iteración para el Método de la Secante

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \quad (15)$$

La ventaja es que no hay que calcular la derivada de f ; esto es de gran ayuda en caso de que f' sea difícil de calcular.

En la ecuación (15) se puede observar que para iterar con el Método de la secante se requieren dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 .

El Método de la Secante también está ligado con el Método de Falsa Posición, ya que ambos comienzan con un intervalo y se basan en la fórmula de interpolación lineal, pero el primero utiliza extrapolaciones y no necesariamente el intervalo encierra la raíz buscada (lo que puede provocar divergencia en el método), mientras que el segundo utiliza únicamente interpolaciones y el intervalo debe encerrar la raíz buscada (por lo que el método siempre converge).

Al igual que el Método de Falsa Posición, la aproximación a la raíz x_n , se obtiene con la intersección de la recta secante a la curva que une a los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ con el eje x y se denota como x_2 ; proporcionando una mejor estimación de la raíz. Sin embargo la diferencia entre ambos métodos radica en la forma en que uno de los valores iniciales se reemplaza por la nueva aproximación, ya que en el método de la secante se usan las dos últimas aproximaciones x_n y x_{n+1} para obtener el nuevo subintervalo en lugar de buscar el subintervalo

que encierra a la raíz; (en consecuencia, algunas veces los valores del subintervalo están del mismo lado de la raíz). Entonces el nuevo intervalo sería $[x_1, x_2]$, después se traza otra recta secante a la curva que une a los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

La nueva intersección de la recta secante con el eje x , se denota como x_3 y se considera una mejor aproximación de la raíz. El proceso se repite hasta que se cumplan los criterios de convergencia de las ecuaciones (5), (6) y (7) .

En la Figura 53 se muestra la representación grafica del Método de la Secante.

La intersección de la recta secante con el eje x se puede calcular de la siguiente manera (Ver Figura 53).

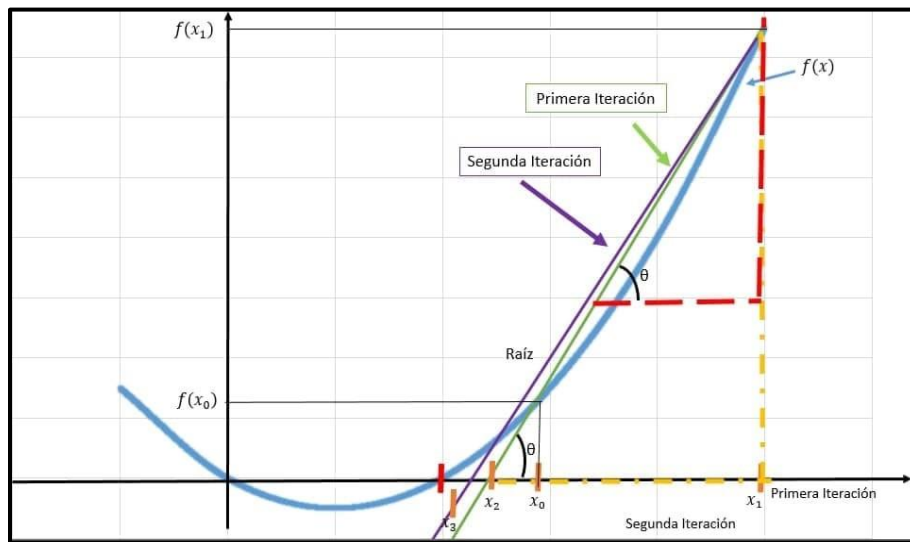


Figura 53. Representación Gráfica del Método de la Secante.

$$\cot(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cot(\theta) = \frac{x_2 - x_1}{f(x_1)}$$

$$\cot(\theta) = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$\frac{x_1 - x_2}{f(x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_1 - x_2 = f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$-x_2 = -x_1 + f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Para obtener la n – ésima intersección con el eje x de la recta secante a la curva, la ecuación sería:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

4.1 Algoritmo del Método de la Secante

Algoritmo 4

Método de la Secante.¹⁵

Para encontrar una aproximación de la raíz, de una ecuación $f(x) = 0$, conocidas dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 .

Datos: $f(x)$, dos aproximaciones iniciales x_0 y x_1 , una tolerancia Tol y un número máximo de iteraciones N .

Resultados: Una raíz aproximada o un mensaje de falla.

- **Paso 1:** Hacer $n = 1$.
- **Paso 2:** Mientras $n \leq N$, repetir los pasos del 3 al 11.
 - **Paso 3:** Calcular $f(x_{n-1})$ y $f(x_n)$.
 - **Paso 4:** Si $n = 1$ entonces realizar la siguiente comparación. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 5:** Si $f(x_{n-1}) * f(x_n) = 0$ entonces imprimir “Una raíz de la ecuación dada es uno de los extremos del intervalo” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 6:** Calcular $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.
 - **Paso 7:** Calcular $f(x_{n+1})$.

¹⁵ Burden, 2002, como se citó en Sánchez, 2007.

- **Paso 8:** Si $f(x_{n+1}) = 0$ entonces imprimir “Una raíz de la ecuación dada es x_{n+1} ” y TERMINAR. De lo contrario CONTINUAR.
- **Paso 9:** Si $n > 1$ entonces calcular $\varepsilon = \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$ y realizar la siguiente comparación. De lo contrario CONTINUAR.
 - **Paso 10:** Si $\varepsilon \leq Tol$ y $|f(x_{n+1})| \leq Tol$ entonces IMPRIMIR “Una raíz aproximada de la ecuación dada es x_{n+1} ” y TERMINAR. De lo Contrario CONTINUAR.
- **Paso 11:** Hacer $n = n + 1$.
- **Paso 12:** IMPRIMIR mensaje de falla “El método no converge a una raíz” y TERMINAR.

Análisis de convergencia para el método de la secante

Para analizar la convergencia del Método de la Secante, se utiliza la serie de Taylor, tomando en cuenta que el error en la n – ésima iteración sería: $\varepsilon_n = x - x_n$.

$$\varepsilon_{n+1} = x - x_{n+1}$$

$$\varepsilon_{n-1} = x - x_{n-1}$$

Se sustituye la ecuación (15), en ε_{n+1} obteniéndose:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= x - \left[x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \\ \varepsilon_{n+1} &= x - \left[\frac{x_n f(x_n) - x_n f(x_{n-1}) - x_n f(x_n) + x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \\ \varepsilon_{n+1} &= x - \left[\frac{-x_n f(x_{n-1}) + x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \\ \varepsilon_{n+1} &= \frac{x f(x_n) - x f(x_{n-1}) + x_n f(x_{n-1}) - x_{n-1} f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ \varepsilon_{n+1} &= \frac{f(x_n)(x - x_{n-1}) - f(x_{n-1})(x - x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\end{aligned}$$

como $\varepsilon_n = x - x_n$ y $\varepsilon_{n-1} = x - x_{n-1}$, entonces:

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{f(x_n)\varepsilon_{n-1} - f(x_{n-1})\varepsilon_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (16)$$

Se multiplica la ecuación (16) por $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, obteniéndose:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) \left(\frac{f(x_n)\varepsilon_{n-1} - f(x_{n-1})\varepsilon_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right)$$

$$\varepsilon_{n+1} = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left(\frac{f(x_n)\varepsilon_{n-1} - f(x_{n-1})\varepsilon_n}{x_n - x_{n-1}} \right)$$

Se factoriza en términos de ε_n y ε_{n-1} , obteniéndose:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right) \left(\frac{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}} \right) \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \quad (17)$$

Al utilizar la serie de Taylor de $f(x_n)$ alrededor de x , se tiene:

$$f(x_n) = f(x) + f'(x)(x_n - x) + \frac{f''(x)(x_n - x)^2}{2!} + \dots$$

Truncando la serie de Taylor después del término de la segunda derivada, se obtiene:

$$f(x_n) \approx f(x) + f'(x)(x_n - x) + \frac{f''(x)(x_n - x)^2}{2}$$

En la intersección con el eje x , $f(x)$ debe ser igual a cero, entonces:

$$f(x_n) \approx 0 + f'(x)(x_n - x) + \frac{f''(x)(x_n - x)^2}{2}$$

como $-\varepsilon_n = x_n - x$, entonces:

$$f(x_n) \approx f'(x)(-\varepsilon_n) + \frac{f''(x)(-\varepsilon_n)^2}{2}$$

$$f(x_n) \approx \left[-f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\varepsilon_n \right] \varepsilon_n$$

$$\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} \approx -f'(x) + \frac{f''(x)}{2}\varepsilon_n \quad (18)$$

Al utilizar la serie de Taylor de $f(x_{n-1})$ alrededor de x , se tiene:

$$f(x_{n-1}) = f(x) + f'(x)(x_{n-1} - x) + \frac{f''(x)(x_{n-1} - x)^2}{2!} + \dots$$

Truncando la serie de Taylor después del término de la segunda derivada, se obtiene:

$$f(x_{n-1}) \approx f(x) + f'(x)(x_{n-1} - x) + \frac{f''(x)(x_{n-1} - x)^2}{2}$$

En la intersección con el eje x , $f(x)$ debe ser igual a cero, entonces:

$$f(x_{n-1}) \approx 0 + f'(x)(x_{n-1} - x) + \frac{f''(x)(x_{n-1} - x)^2}{2}$$

como $-\varepsilon_{n-1} = x_{n-1} - x$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x_{n-1}) &\approx f'(x)(-\varepsilon_{n-1}) + \frac{f''(x)(-\varepsilon_{n-1})^2}{2} \\ f(x_{n-1}) &\approx \left[-f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_{n-1} \right] \varepsilon_{n-1} \\ \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &\approx -f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_{n-1} \end{aligned} \quad (19)$$

Se restan las ecuaciones (18) y (19); obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &\approx -f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_n - \left[-f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_{n-1} \right] \\ &\approx -f'(x) + \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_n + f'(x) - \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_{n-1} \\ &\approx \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_n - \frac{f''(x)}{2} \varepsilon_{n-1} \\ &\approx \frac{f''(x)}{2} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \end{aligned}$$

como $\varepsilon_n = x - x_n$ y $\varepsilon_{n-1} = x - x_{n-1}$, entonces:

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} = x - x_n - (x - x_{n-1}) = x - x_n - x + x_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &\approx \frac{f''(x)}{2} (x_{n-1} - x_n) \\ \frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}} &\approx -\frac{f''(x)}{2} (x_n - x_{n-1}) \\ \frac{\frac{f(x_n)}{\varepsilon_n} - \frac{f(x_{n-1})}{\varepsilon_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}} &\approx -\frac{f''(x)}{2} \end{aligned}$$

Obteniendo la segunda expresión del lado derecho entre paréntesis de la ecuación (17). La primera expresión entre paréntesis de la ecuación (17), se puede escribir como:

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \approx \frac{1}{f'(x)}$$

ya que $f'(x_n)$ se aproxima a la pendiente de la recta. Entonces

$$\varepsilon_{n+1} \approx \frac{1}{f'(x)} \left(-\frac{f''(x)}{2} \right) \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \approx -\frac{f''(x)}{2f'(x)} \varepsilon_n \varepsilon_{n-1}$$

es decir, el error en una determinada iteración es proporcional al producto de los errores de las dos iteraciones previas. A este comportamiento se le llama convergencia superlineal.

Por lo tanto el Método de la Secante comparado con el Método de Newton, tiene una convergencia ligeramente menor, con la ventaja que no se requiere la derivada de $f(x)$.

4.2 Ventajas y Desventajas del Método

Ventajas

1. No hay que calcular la derivada de f ; esto es de gran ayuda en un caso en que f' sea difícil de calcular.
2. La convergencia del método es superficial

Desventajas

1. El método puede converger a una raíz no deseada o puede no converger del todo si la estimación inicial no es buena.
2. Si dos aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} están demasiado cercanas, entonces también $f(x_n)$ y $f(x_{n+1})$ están muy cercanas, por lo que aparece un error de redondeo significativo en la ecuación (15).

4.3 Ejemplos

Ejemplo 1: Localizar la raíz de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Lial, L.M. (2013).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 54, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

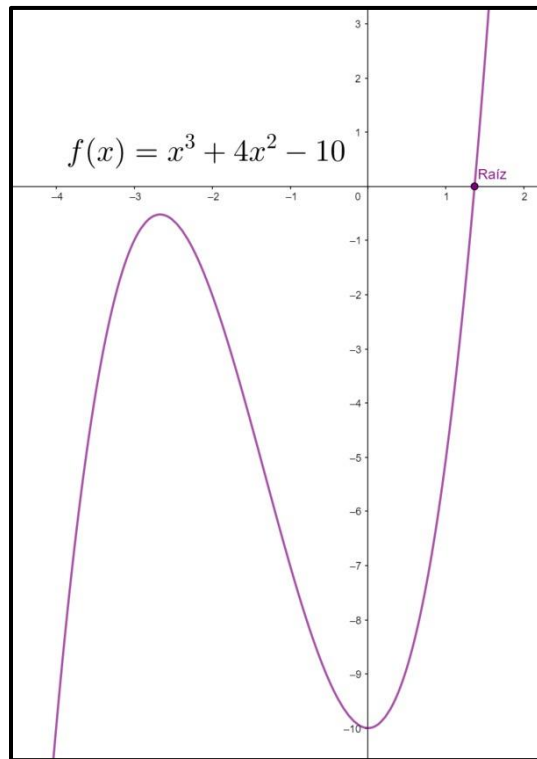


Figura 54. Grafica $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = -5.000000$$

$$f(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 14.000000$$

A continuación se calcula x_2 con la ecuación 15:

$$x_2 = 2 - 14 \left(\frac{2 - 1}{14 - (-5)} \right) = 1.263158$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.263158) = (1.263458)^3 + 4(1.263458)^2 - 10 = -1.602274$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.263158$ se calcula x_3 con la fórmula de iteración:

$$x_3 = 1.263158 - (-1.602274) \left(\frac{1.263158 - 2}{-1.602274 - 14} \right) = 1.338828$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6. Para obtener x_4 , x_5 , y x_6 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 48:

Cuadro 48. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	1.000000	2.000000	-5.000000	14.000000	1.263158	-1.602274	-----
2	2.000000	1.263158	14.000000	-1.602274	1.338828	-0.430365	0.056520
3	1.263158	1.338828	-1.602274	-0.430365	1.366616	0.022909	0.020334
4	1.338828	1.366616	-0.430365	0.022909	1.365212	-0.000299	0.001029
5	1.366616	1.365212	0.022909	-0.000299	1.365230	-0.000000	0.000013
6	1.365212	1.365230	-0.000299	-0.000000	1.365230	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.338828 - 1.263158}{1.338828} \right| = 0.056520$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.366616 - 1.338828}{1.366616} \right| = 0.020334$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 48.

Comprobación:

$$f(1.365230) = (1.365230)^3 + 4(1.365230)^2 - 10 = 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{1.365230 - 1.365230}{1.365230} \right| = 0.000000 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.365230** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 2: Localizar la raíz de $f(x) = 3x^2 - e^x$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 55, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

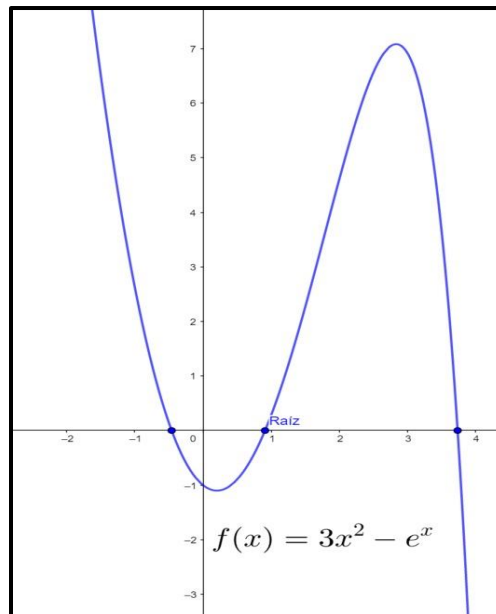


Figura 55. Gráfica de $f(x) = 3x^2 - e^x$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(0) = 3(0)^2 - e^{(0)} = -1.000000$$

$$f(1) = 3(1)^2 - e^{(1)} = 0.281718$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 1 - 0.281718 \left(\frac{1 - 0}{0.281718 - (-1)} \right) = 0.780203$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.780203) = 3(0.780203)^2 - e^{(0.780203)} = -0.355765$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.780203$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 0.780203 - (-0.3557665) \left(\frac{0.780203 - 1}{-0.355765 - 0.281718} \right) = 0.902867$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5. Para obtener x_4 y x_5 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 49:

Cuadro 49. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	0.281718	0.780203	-0.355766	-----
2	1.000000	0.780203	0.281718	-0.355766	0.902867	-0.021159	0.135861
3	0.780203	0.902867	-0.355766	-0.021159	0.910624	0.001834	0.008518
4	0.902867	0.910624	-0.021159	0.001834	0.910005	-0.000008	0.000680
5	0.910624	0.910005	0.001834	-0.000008	0.910008	-0.000000	0.000003

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.902827 - 0.780203}{0.902867} \right| = 0.135861$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.910624 - 0.902867}{0.910624} \right| = 0.008518$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior.

Los errores se muestran en el Cuadro 49.

Comprobación:

$$f(0.910008) = 3(0.910008)^2 - e^{0.910008} = 0.000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{0.910008 - 0.910005}{0.910008} \right| = 0.000003 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **0.910008** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 3: Localizar la raíz de $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 56, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

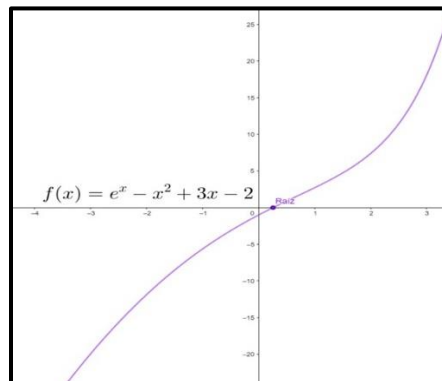


Figura 56. Gráfica de $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(0) = e^{(0)} - (0)^2 + 3(0) - 2 = -1$$

$$f(1) = e^{(1)} - (1)^2 + 3(1) - 2 = 2.718282$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 1 - 2.718282 \left(\frac{1 - 0}{2.718282 - (-1)} \right) = 0.268941$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$\begin{aligned} f(0.268941) &= e^{(0.268941)} - (0.268941)^2 + 3(0.268941) - 2 \\ &= -0.043073 \end{aligned}$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.268941$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0.268941 - 0.043073 \left(\frac{0.268941 - 1}{0.043073 - 2.718282} \right) \\ &= 0.257171 \end{aligned}$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$\begin{aligned} f(0.257171) &= e^{(0.257171)} - (0.257171)^2 + 3(0.257171) - 2 \\ &= -0.001359 \end{aligned}$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 4. Para obtener x_4 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 50:

Cuadro 50. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	2.718282	0.268941	0.043073	-----
2	1.000000	0.268941	2.718282	0.043073	0.257171	-0.001359	0.045770
3	0.268941	0.257171	0.043073	-0.001359	0.257531	0.000001	0.001398
4	0.257171	0.257531	-0.001359	0.000001	0.257530	0.000000	0.000001

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.257171 - 0.268941}{0.257171} \right| = 0.045770$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.257531 - 0.257171}{0.257531} \right| = 0.001398$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 50.

Comprobación:

$$f(0.257530) = e^{0.257530} - (0.257530)^2 + 3(0.257530) - 2 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\frac{0.257530 - 0.257531}{0.257530} = 0.000001 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.257530** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 4: Localizar la raíz de $f(x) = x \ln(x) - 10$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[5,6]$ y en $[15,16]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Nieves, A. (2014).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 57, donde se puede observar que la función es continua y que en este caso solo el intervalo $[5,6]$ se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

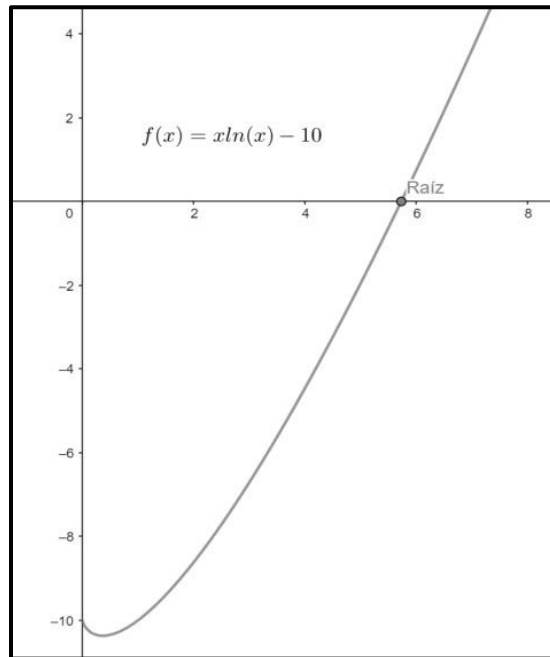


Figura 57. Gráfica de $f(x) = x \ln(x) - 10$

Para el intervalo [5, 6]

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(5)$ y $f(6)$, para verificar que en el intervalo [5,6] se encuentra la raíz. Obteniéndose :

$$f(5) = (5)\ln(5) - 10 = -1.952810$$

$$f(6) = (6)\ln(6) - 10 = 0.750557$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 6 - 0.750557 \left(\frac{6 - 5}{0.750557 - (-1.952810)} \right) = 5.722362$$

Después se calcula $f(x_2)$

$$f(5.722362) = (5.722362)\ln(5.722362) - 10 = -0.018016$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 6$ y $x_2 = 5.722362$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 5.722362 - (-0.018016) \left(\frac{5.722362 - 6}{-0.018016 - 0.750557} \right) = 5.728870$$

Después se calcula $f(x_3)$

$$f(5.728870) = (5.728870)\ln(5.728870) - 10 = -0.000152$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 4.

Para obtener x_4 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 51.

Cuadro 51. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	5.000000	6.000000	-1.952810	0.750557	5.722362	-0.018016	-----
2	6.000000	5.722362	0.750557	-0.018016	5.728870	-0.000152	0.001136
3	5.722362	5.728870	-0.018016	-0.000152	5.728926	0.000000	0.00001
4	5.728870	5.728926	-0.000152	0.000000	5.728926	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{5.728870 - 5.722362}{5.728870} \right| = 0.001136$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{5.728926 - 5.728870}{5.728926} \right| = 0.00001$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 51.

Comprobación:

$$f(5.728926) = (5.728926)\ln(5.728926) - 10 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5)

$$\left| \frac{5.728926 - 5.728870}{5.728826} \right| = 0.00001 = 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **5.728926** con $Tol = 0.00001$

Para el intervalo [15, 16]

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(15)$ y $f(16)$.
Obteniéndose:

$$f(15) = (15)\ln(15) - 10 = 30.620753$$

$$f(16) = (16)\ln(16) - 10 = 34.361420$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 16 - 34.361420 \left(\frac{16 - 15}{34.361420 - 30.620753} \right) = 6.814092$$

Después se calcula $f(x_2)$

$$f(6.814092) = (6.814092)\ln(6.814092) - 10 = 3.076193$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 16$ y $x_2 = 6.814092$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 6.814092 - 3.076193 \left(\frac{6.814092 - 16}{3.076193 - 34.361420} \right) = 5.910866$$

Después se calcula $f(x_3)$

$$f(5.910866) = (5.910866)\ln(5.910866) - 10 = 0.502381$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5. Para obtener x_4 y x_5 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 52

Cuadro 52. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	15.000000	16.000000	30.620753	34.361420	6.814092	3.076193	-----
2	16.000000	6.814092	34.361420	3.076193	5.910866	0.502381	0.152808
3	6.814092	5.910866	3.076193	0.502381	5.734566	0.015488	0.30743
4	5.910866	5.734566	0.502381	0.015488	5.728958	0.000088	0.000979
5	5.734566	5.728958	0.015488	0.000088	5.728926	0.000000	0.0000006

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{5.910866 - 6.814092}{5.910866} \right| = 0.152808$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{5.734566 - 5.910866}{5.734566} \right| = 0.30743$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 52.

Comprobación:

$$f(5.728926) = (5.728926)\ln(5.728926) - 10 = 0.0000000 \dots \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{5.728926 - 5.728958}{5.728926} \right| = 0.0000006 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **5.728926** con $Tol = 0.00001$

Observando el Ejemplo 4, se puede verificar que para aplicar el Método de la Secante el intervalo no necesariamente debe encerrar la raíz. En la mayoría de los casos el Método converge más rápido cuando el intervalo se encuentra cercano a la raíz.

Ejemplo 5: Localizar la raíz de $f(x) = x^2 - 3$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[3.5, 4.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 58, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[3.5, 4.5]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

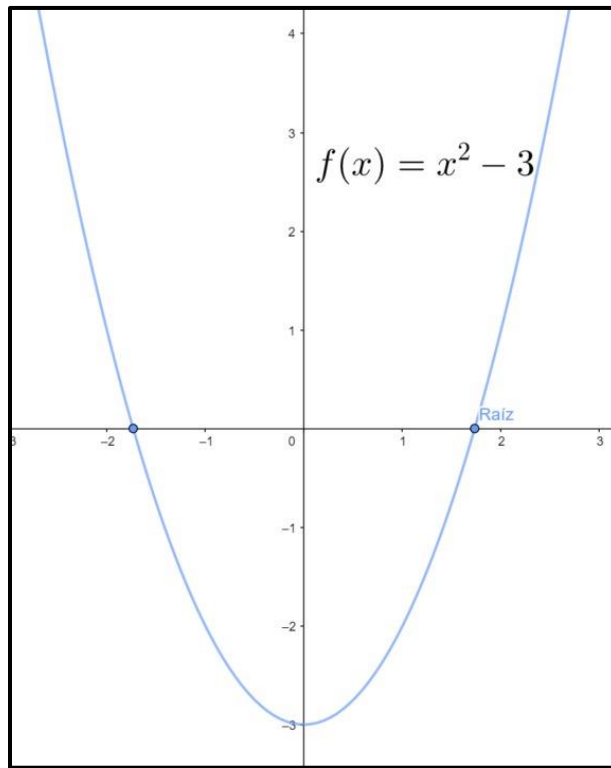


Figura 58. Gráfica de $f(x) = x^2 - 3$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(3.5)$ y $f(4.5)$, para verificar que en el intervalo $[3.5, 4.5]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(3.5) = (3.5)^2 - 3 = 9.25$$

$$f(4.5) = (4.5)^2 - 3 = 17.25$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 4.5 - 17.25 \left(\frac{4.5 - 3.5}{17.25 - 9.25} \right) = 2.343750$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(2.343750) = (2.343750)^2 - 3 = 2.493164$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 4.5$ y $x_2 = 2.343750$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 2.343750 - 2.493164 \left(\frac{2.343750 - 4.5}{2.493164 - 17.25} \right) = 1.979452$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(1.979452) = (1.979452)^2 - 3 = 0.918230$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 7. Para obtener x_4 , x_5 , x_6 y x_7 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 53:

Cuadro 53. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	3.500000	4.500000	9.250000	17.250000	2.343750	2.493164	-----
2	4.500000	2.343750	17.250000	2.493164	1.979452	0.918230	0.184040
3	2.343750	1.979452	2.493164	0.918230	1.767056	0.122487	0.120198
4	1.979452	1.767056	0.918230	0.122487	1.734362	0.008013	0.018851
5	1.767056	1.734362	0.122487	0.008013	1.732074	0.000080	0.001321
6	1.734362	1.732074	0.008013	0.000080	1.732051	0.000000	0.000013
7	1.732074	1.732051	0.000080	0.000000	1.732051	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.979452 - 2.343750}{1.979452} \right| = 0.184040$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.767056 - 1.979452}{1.767056} \right| = 0.120198$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 53.

Comprobación:

$$f(1.732051) = (1.732051)^2 - 3 = 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.732051 - 1.732051}{1.732051} \right| = 0.000001 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.732051** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 6: Localizar la raíz de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Gerald, C.F. (2011).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 59, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

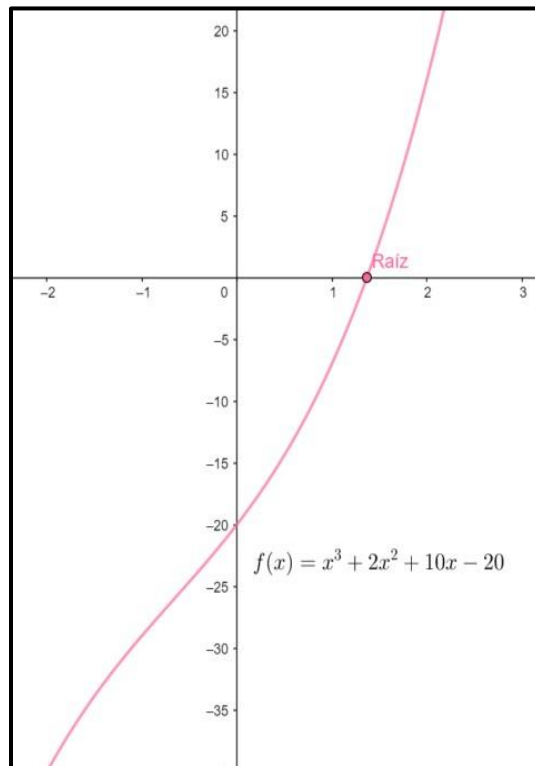


Figura 59. Gráfica de $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(1) = (1)^3 + 2(1)^2 + 10(1) - 20 = -7$$

$$f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 + 10(2) - 20 = 16$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 2 - 16 \left(\frac{2 - 1}{16 - (-7)} \right) = 1.304348$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.304348) = (1.304348)^3 + 2(1.304348)^2 + 10(1.304348) - 20 = -1.334758$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.304348$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 1.304348 - (-1.334758) \left(\frac{1.304348 - 2}{-1.334758 - 16} \right) = 1.357912$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(1.357912) = (1.357912)^3 + 2(1.357912)^2 + 10(1.357912) - 20 = -0.229136$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5. Para obtener x_4 y x_5 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 54:

Cuadro 54. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	1.000000	2.000000	-7.000000	16.000000	1.304348	-1.334758	-----
2	2.000000	1.304348	16.000000	-1.334758	1.357912	-0.229136	0.039446
3	1.304348	1.357912	-1.334758	-0.229136	1.369013	0.004330	0.008109
4	1.357912	1.369013	-0.229136	0.004330	1.368807	-0.000014	0.000150
5	1.369013	1.368807	0.004330	-0.000014	1.368808	0.000000	0.0000005

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.357912 - 1.304348}{1.357912} \right| = 0.039446$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.369013 - 1.357912}{1.369013} \right| = 0.008109$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 54.

Comprobación:

$$f(1.368808) = (1.368808)^3 + 2(1.368808)^2 + 10(1.368808) - 20 = 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.368808 - 1.368807}{1.368808} \right| = 0.0000005 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.368808** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 7: Localizar la raíz de $f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 60, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0,1]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de la Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

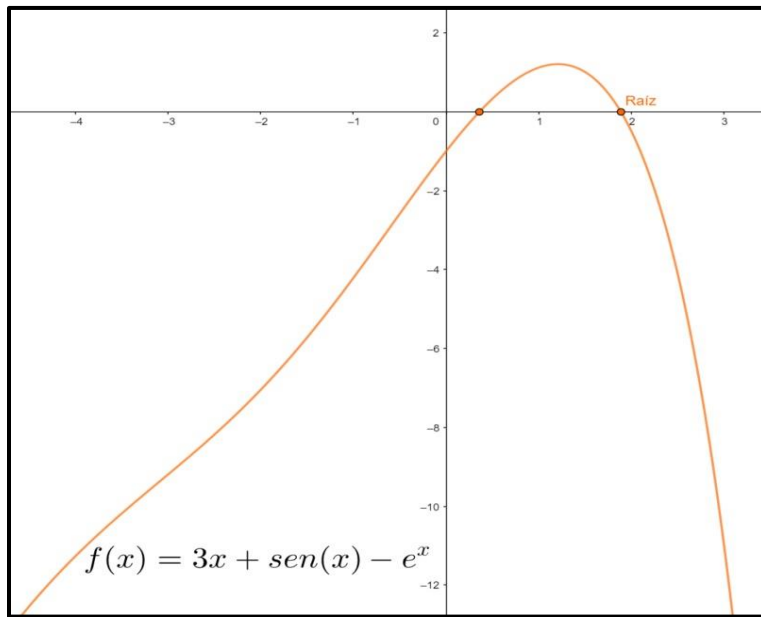


Figura 60. Gráfica de $f(x) = 3x + \text{sen}(x) - e^x$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0,1]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(0) = 3(0) + \text{sen}(0) - e^0 = -1$$

$$f(1) = 3(1) + \text{sen}(1) - e^1 = 1.123189$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 1 - 1.123189 \left(\frac{1 - 0}{1.123189 - (-1)} \right) = 0.470990$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.470990) = 3(0.470990) + \text{sen}(0.470990) - e^{(0.470990)} = 0.265159$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.470990$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 0.470990 - 0.265159 \left(\frac{0.470990 - 1}{0.265159 - 1.123189} \right) = 0.307508$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(0.307508) = 3(0.307508) + \text{sen}(0.307508) - e^{(0.307508)} = -0.134822$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6. Para obtener x_4 , x_5 y x_6 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 55:

Cuadro 55. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.000000	1.000000	-1.000000	1.123189	0.470990	0.265159	-----
2	1.000000	0.47099	1.123189	0.265159	0.307508	-0.134822	0.531631
3	0.470990	0.307508	0.265159	-0.134822	0.362613	0.005479	0.151966
4	0.307508	0.362613	-0.134822	0.005479	0.360461	0.000100	0.005969
5	0.362613	0.360461	0.005479	0.000100	0.360422	0.000000	0.000110
6	0.360461	0.360422	0.000100	0.000000	0.360422	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.307508 - 0.470990}{0.307508} \right| = 0.531631$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.362613 - 0.307508}{0.362613} \right| = 0.151966$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 55.

Comprobación:

$$f(0.360422) = 3(0.360422) + \sin(0.360422) - e^{0.360422} = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.360422 - 0.360422}{0.360422} \right| = 0 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.360422** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 8: Localizar la raíz de $f(x) = \tan(\pi x) - 6$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0, 0.48]$ y en $[0.40, 0.48]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Luthe, Olvera y Schutz (1986).

Para efectos de visualización de la función se presentan dos gráficas con distintas escalas, ver Figura 61 y Figura 62.

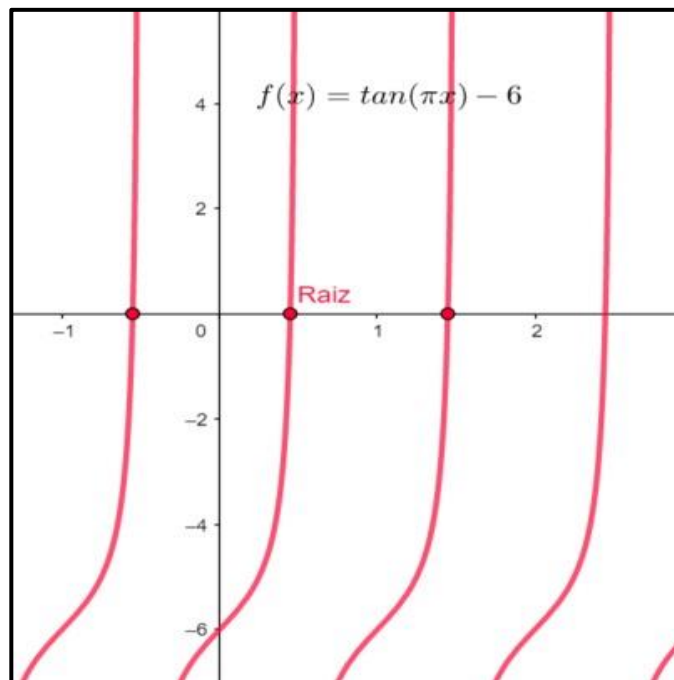


Figura 61. Gráfica de $f(x) = \tan(\pi x) - 6$

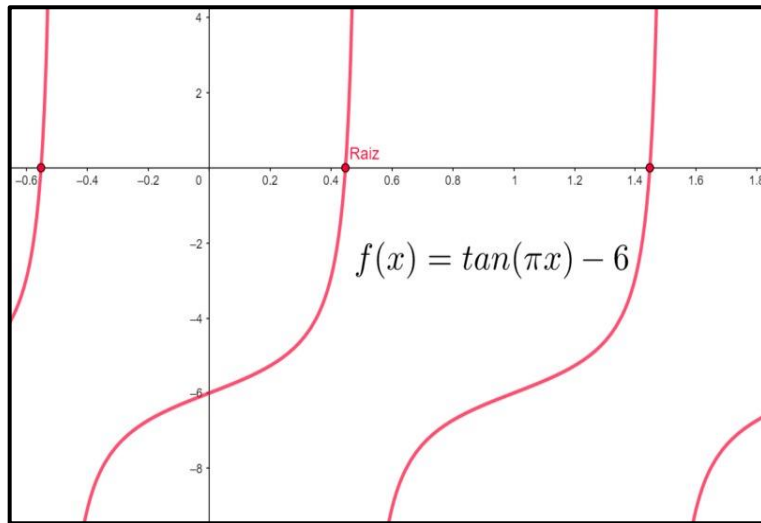


Figura 62. Gráfica de $f(x) = \tan(\pi x) - 6$

Se puede observar en la Figura 62 que la función es continua en el intervalo $[0, 0.48]$ y en el intervalo $[0.40, 0.48]$ en los cuales se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de la Secante.

Para el intervalo $[0, 0.48]$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0)$ y $f(0.48)$, para verificar que en el intervalo $[0, 0.48]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose :

$$f(0) = \tan(\pi(0)) - 6 = -6.000000$$

$$f(0.48) = \tan(\pi(0.48)) - 6 = 9.894545$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 0.48 - 9.894545 \left(\frac{0.48 - 0}{9.894545 - (-6.000000)} \right) = 0.181194$$

Después se calcula $f(x_2)$

$$f(0.181194) = \tan(\pi(0.181194)) - 6 = -5.360105$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 0.480000$ y $x_2 = 0.181194$ se calcula x_3 con la ecuación 15 :

$$x_3 = 0.181194 - (-5.360105) \left(\frac{0.181194 - 0.480000}{-5.360105 - 9.894545} \right) = 0.286187$$

Después se calcula $f(x_3)$

$$f(0.286187) = \tan(\pi(0.286187)) - 6 = -4.742211$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 56.

Cuadro 56. Ejemplo del Método de la Secante cuando no converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.000000	0.480000	-6.000000	9.894545	0.181194	-5.360105	-----
2	0.480000	0.181194	9.894545	-5.360105	0.286187	-4.742211	0.366868
3	0.181194	0.286187	-5.360105	-4.742211	1.091986	-5.702695	0.737921
4	0.286187	1.091986	-4.742211	-5.702695	-3.692297	-4.551143	1.295747
5	1.091986	-3.692297	-5.702695	-4.551143	-22.600650	-2.943563	0.836629
6	-3.692297	-22.600650	-4.551143	-2.943563	-57.222832	-6.842372	0.605041
7	-22.600650	-57.222832	-2.943563	-6.842372	3.538758	-14.172096	17.170315
8	-57.222832	3.538758	-6.842372	-14.172096	-113.944398	-5.823523	1.031057
9	3.538758	-113.944398	-14.172096	-5.823523	-195.894431	-5.655624	0.418338
10	-113.944398	-195.894431	-5.823523	-5.655624	-2956.366771	-8.248014	0.933738
11	-195.894431	-2956.366771	-5.655624	-8.248014	5826.423063	-1.943618	1.507407
12	-2956.366771	5826.423063	-8.248014	-1.943618	8534.119765	-5.604926	0.317279

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.286187 - 0.181194}{0.286187} \right| = 0.366868$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.091986 - 0.286187}{1.091986} \right| = 0.737921$$

Para obtener el error relativo de la última iteración se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 56.

Observando el Cuadro 56, en la columna x_{n+1} y en la columna del error relativo se muestra un comportamiento no congruente para llegar a la raíz esperada. Por otra parte, la columna de $f(x_{n+1})$ tampoco da indicios de la cercanía a la raíz, por lo tanto el Método de la Secante no converge en este intervalo.

Para el intervalo [0.40, 0.48]

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0.40)$ y $f(0.48)$, para verificar que en el intervalo $[0.40, 0.48]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose :

$$\begin{aligned} f(0.40) &= \tan(\pi(0.40)) - 6 = -2.922316 \\ f(0.48) &= \tan(\pi(0.48)) - 6 = 9.894545 \end{aligned}$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 0.48 - 9.894545 \left(\frac{0.48 - 0.40}{9.894545 - (-2.922316)} \right) = 0.418240$$

Después se calcula $f(x_2)$

$$f(0.418240) = \tan(\pi(0.418240)) - 6 = -2.192753$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 0.480000$ y $x_2 = 0.418240$ se calcula x_3 con la ecuación 15 :

$$x_3 = 0.418240 - (-2.192753) \left(\frac{0.418240 - 0.480000}{-2.192753 - 9.894545} \right) = 0.429444$$

Después se calcula $f(x_3)$

$$f(0.429444) = \tan(\pi(0.429444)) - 6 = -1.562664$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 8. Para obtener x_4 , x_5 , x_6 , x_7 y x_8 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 57.

Cuadro 57. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.400000	0.480000	-2.922316	9.894545	0.418240	-2.192753	-----
2	0.480000	0.418240	9.894545	-2.192753	0.429444	-1.562664	0.026089
3	0.418240	0.429444	-2.192753	-1.562664	0.457230	1.397584	0.060771
4	0.429444	0.457230	-1.562664	1.397584	0.444112	-0.363145	0.029538
5	0.457230	0.444112	1.397584	-0.363145	0.446818	-0.070541	0.006055
6	0.444112	0.446818	-0.363145	-0.070541	0.447470	0.004465	0.001458
7	0.446818	0.447470	-0.070541	0.004465	0.447431	-0.000052	0.000087
8	0.447470	0.447431	0.004465	-0.000052	0.447432	0.000000	0.000001

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.429444 - 0.418240}{0.429444} \right| = 0.026089$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.457230 - 0.429444}{0.457230} \right| = 0.060771$$

Para obtener el error relativo de las demás iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 57.

Comprobación:

$$f(0.447432) = \tan(\pi(0.447432)) - 6 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.447432 - 0.447431}{0.447432} \right| = 0.000001 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.447432** con $Tol = 0.00001$

En este segundo intervalo $[0.40, 0.48]$ se verificó la convergencia del método, por lo que se puede concluir que en la mayoría de los casos el Método de la Secante converge cuando el intervalo esta cercano a la raíz.

Ejemplo 9: Localizar la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0, 1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 63, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0, 1]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

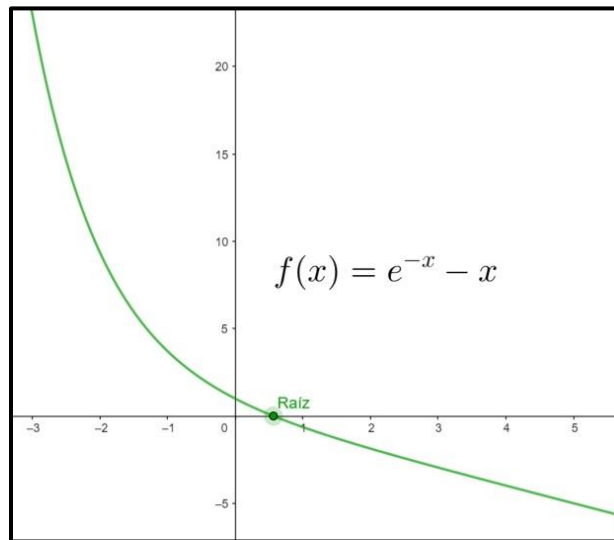


Figura 63. Grafica de $f(x) = e^{-x} - x$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0)$ y $f(1)$, para verificar que en el intervalo $[0, 1]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(0) = e^{-(0)} - (0) = 1$$

$$f(1) = e^{-(1)} - (1) = -0.632121$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 1 - (-0.632121) \left(\frac{1 - 0}{-0.632121 - 1} \right) = 0.612700$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(0.612700) = e^{-(0.612700)} - (0.612700) = -0.070814$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 1$ y $x_2 = 0.612700$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 0.612700 - (-0.070814) \left(\frac{0.612700 - 1}{-0.070814 - (-0.632121)} \right) = 0.563838$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(0.563838) = e^{-(0.563838)} - (0.563838) = 0.005182$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5. Para obtener x_4 y x_5 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 58:

Cuadro 58. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.000000	1.000000	1.000000	-0.632121	0.612700	-0.070814	-----
2	1.000000	0.612700	-0.632121	-0.070814	0.563838	0.005182	0.086659
3	0.612700	0.563838	-0.070814	0.005182	0.567170	-0.000042	0.005875
4	0.563838	0.567170	0.005182	-0.000042	0.567143	-0.000000	0.000048
5	0.567170	0.567143	-0.000042	-0.000000	0.567143	0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.563838 - 0.6127000}{0.563838} \right| = 0.086659$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.567170 - 0.563838}{0.567170} \right| = 0.005875$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 58.

Comprobación:

$$f(0.567143) = e^{-(0.567143)} - (0.567143) = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.567143 - 0.567143}{0.567143} \right| = 0 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.567143** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 10: Localizar la raíz de $f(x) = 8\text{sen}(x)e^{-x} - 1$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[0.4, 0.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Chapra, S.C. (2011).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 64, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[0, 3]$; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

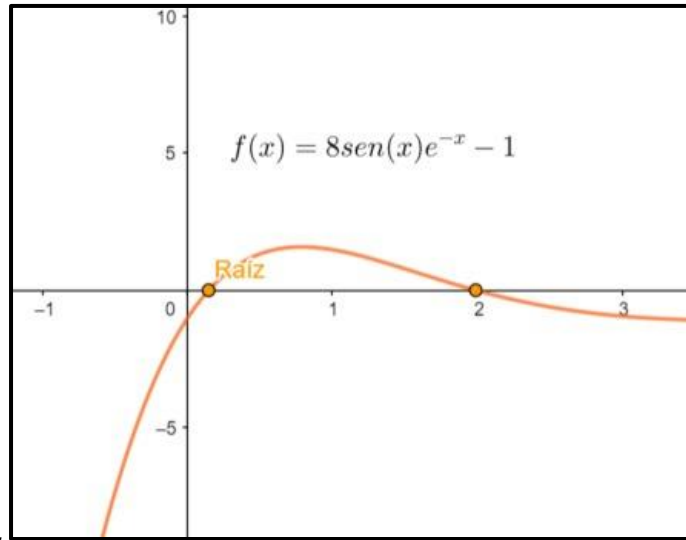


Figura 64. Gráfica de $f(x) = 8 \text{ sen}(x)e^{-x} - 1$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(0.4)$ y $f(0.5)$. Obteniéndose:

$$f(0.4) = 8\text{sen}(0.4)e^{-(0.4)} - 1 = 1.088279$$

$$f(0.5) = 8\text{sen}(0.5)e^{-(0.5)} - 1 = 1.326290$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 0.5 - 1.326290 \left(\frac{0.5 - 0.4}{1.326290 - 1.088279} \right) = -0.057239$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-0.057239) = 8\text{sen}(-0.057239)e^{-(-0.057239)} - 1 = -1.484624$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 0.5$ y $x_2 = -0.057239$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = -0.057239 - (-1.484624) \left(\frac{-0.057239 - 0.5}{-1.484624 - 1.326290} \right) = 0.237075$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(0.237075) = 8\text{sen}(0.237075)e^{-(0.237075)} - 1 = 0.482310$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 7. Para obtener x_4 , x_5 , x_6 y x_7 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 59:

Cuadro 59. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	0.400000	0.500000	1.088279	1.326290	-0.057239	-1.484624	-----
2	0.500000	-0.057239	1.326290	-1.484624	0.237075	0.482310	1.241440
3	-0.057239	0.237075	-1.484624	0.482310	0.164906	0.113625	0.437633
4	0.237075	0.164906	0.482310	0.113625	0.142665	-0.013780	0.155901
5	0.164906	0.142665	0.113625	-0.013780	0.145070	0.000325	0.016583
6	0.142665	0.145070	-0.013780	0.000325	0.145015	0.000001	0.000382
7	0.145070	0.145015	0.000325	0.000001	0.145015	-0.000000	0.000001

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{0.237075 - (-0.057239)}{0.237075} \right| = 1.241440$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{0.164906 - 0.237075}{0.164906} \right| = 0.437633$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 59.

Comprobación:

$$f(0.145015) = 8\text{sen}(0.145015)e^{-(0.145015)} - 1 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{0.145015 - 0.145015}{0.145015} \right| = 0 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **0.145015** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 11: Localizar la raíz de $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(1 + x^2) - 1$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[1.5, 2.25]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Tucci, K. (2008).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 65, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1.5, 2.25]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

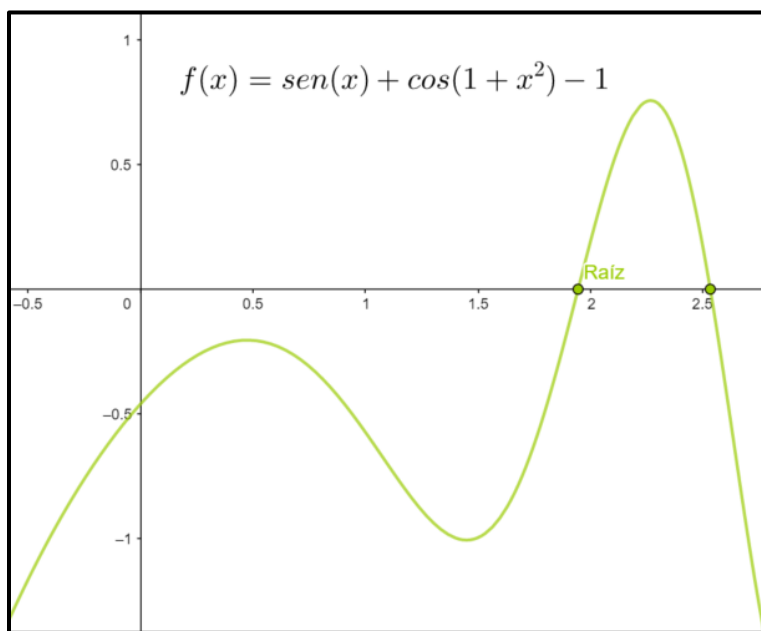


Figura 65. Gráfica de $f(x) = \text{sen}(x) + \cos(1 + x^2) - 1$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(1.5)$ y $f(2.25)$, para verificar que en el intervalo $[1.5, 2.25]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(1.5) = \text{sen}(1.5) + \cos(1 + (1.5)^2) - 1 = -0.996635$$

$$f(2.25) = \text{sen}(2.25) + \cos(1 + (2.25)^2) - 1 = 0.753821$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 2.25 - 0.753821 \left(\frac{2.25 - 1.5}{0.753821 - (-0.996635)} \right) = 1.927018$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.927018) = \text{sen}(1.927018) + \cos(1 + (1.927018)^2) - 1 = -0.061769$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 2.25$ y $x_2 = 1.927018$ se calcula x_3 con la ecuación 15 :

$$x_3 = 1.927018 - (-0.061769) \left(\frac{1.927018 - 2.25}{-0.061769 - 0.753821} \right) = 1.951479$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(1.951479) = \text{sen}(1.951479) + \cos(1 + (1.951479)^2) - 1 = 0.024147$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 4. Para obtener x_4 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 60:

Cuadro 60. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	1.500000	2.250000	-0.996635	0.753821	1.927018	-0.061769	-----
2	2.250000	1.927018	0.753821	-0.061769	1.951479	0.024147	0.012535
3	1.927018	1.951479	-0.061769	0.024147	1.944604	-0.000014	0.003535
4	1.951479	1.944604	0.024147	-0.000014	1.944608	0.000000	0.000002

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial. Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.951479 - 1.927018}{1.951479} \right| = 0.012535$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.944604 - 1.951479}{1.944604} \right| = 0.003535$$

Para obtener el error relativo de las última iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 60.

Comprobación:

$$f(1.944608) = \sin(1.944608) + \cos(1 + (1.944608)^2) - 1 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.944608 - 1.944604}{1.944608} \right| = 0.000002 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **1.944608** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 12: Localizar la raíz de $f(x) = x^3 - 48$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[3,4]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Lial, L.M. (2013).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 66, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[3,4]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

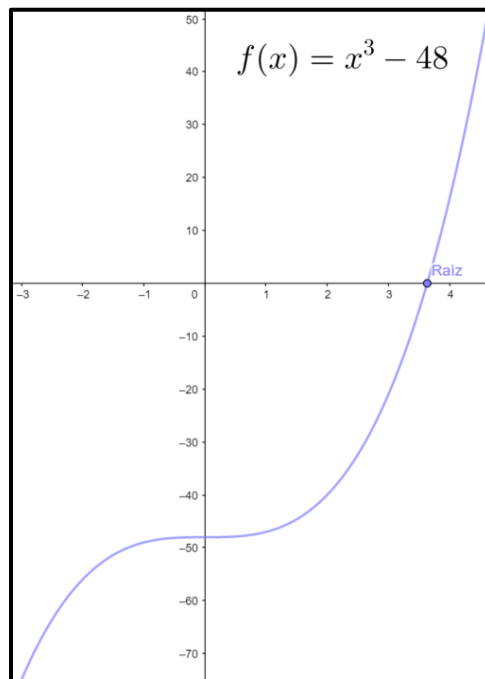


Figura 66. Gráfica de $f(x) = x^3 - 48$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(3)$ y $f(4)$, para verificar que en el intervalo $[3,4]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(3) = (3)^3 - 48 = -21$$

$$f(4) = (4)^3 - 48 = 16$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 4 - 16 \left(\frac{4 - 3}{16 - (-21)} \right) = 3.567568$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(3.567568) = (3.567568)^3 - 48 = -2.593647$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 4$ y $x_2 = 3.567568$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = 3.567568 - 4 \left(\frac{3.567568 - 4}{-2.593647 - 16} \right) = 3.627888$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(3.627888) = (3.627888)^3 - 48 = -0.251293$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 5. Para obtener x_4 y x_5 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 61.

Cuadro 61. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	3.000000	4.000000	-21.000000	16.000000	3.567568	-2.593647	-----
2	4.000000	3.567568	16.000000	-2.593647	3.627888	-0.251293	0.016627
3	3.567568	3.627888	-2.593647	-0.251293	3.634359	0.004681	0.001781
4	3.627888	3.634359	-0.251293	0.004681	3.634241	-0.000008	0.000033
5	3.634359	3.634241	0.004681	-0.000008	3.634241	-0.000000	0.000000

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{3.627888 - 3.567568}{3.627888} \right| = 0.016627$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{3.634359 - 3.627888}{3.634359} \right| = 0.001781$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 61.

Comprobación:

$$f(3.634241) = (3.634241)^3 - 48 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5) .

$$\left| \frac{3.634241 - 3.634241}{3.634241} \right| = 0 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **3.634241** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 13: Localizar la raíz de $f(x) = 2x^3 - 2x - 5$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[1,2]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Nieves, A. (2014).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 67, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[1,2]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

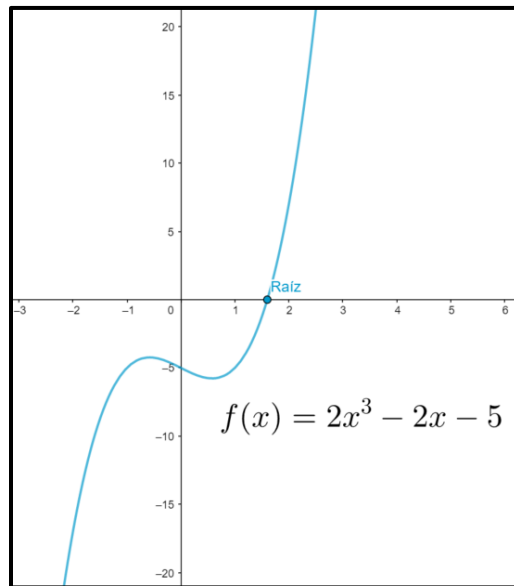


Figura 67. Gráfica de $f(x) = 2x^3 - 2x - 5$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(1)$ y $f(2)$, para verificar que en el intervalo $[1,2]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose:

$$f(1) = 2(1)^3 - 2(1) - 5 = -5$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 2(2) - 5 = 7$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = 2 - 7 \left(\frac{2 - 1}{7 - (-5)} \right) = 1.416667$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(1.416667) = 2(1.416667)^3 - 2(1.416667) - 5 = -2.146991$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 1.416667$ se calcula x_3 con la ecuación 15 :

$$x_3 = 1.416667 - (-2.146991) \left(\frac{1.416667 - 2}{-2.146991 - 7} \right) = 1.553587$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(1.553587) = 2(1.553587)^3 - 2(1.553587) - 5 = -0.607595$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6. Para obtener x_4 , x_5 y x_6 se repite el proceso anterior. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 62:

Cuadro 62. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	1.000000	2.000000	-5.000000	7.000000	1.416667	-2.146991	-----
2	2.000000	1.416667	7.000000	-2.146991	1.553587	-0.607595	0.088132
3	1.416667	1.553587	-2.146991	-0.607595	1.607629	0.094488	0.033616
4	1.553587	1.607629	-0.607595	0.094488	1.600356	-0.003239	0.004545
5	1.607629	1.600356	0.094488	-0.003239	1.600597	-0.000016	0.000151
6	1.600356	1.600597	-0.003239	-0.000016	1.600599	0.000000	0.000001

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{1.553587 - 1.416667}{1.553587} \right| = 0.088132$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{1.607629 - 1.553587}{1.607629} \right| = 0.033616$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 62.

Comprobación:

$$f(1.600599) = 2(1.600599)^3 - 2(1.600599) - 5 = 0.0000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{1.600599 - 1.600597}{1.600599} \right| = 0.000001 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **1.600599** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 14: Localizar la raíz más pequeña de $f(x) = 3x\cos(2x) - (x+1)^2 + 6$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[-5, -4.5]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio tomado de Nieves, A. (2014).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 68, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-6, -4]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que éste va a converger a la solución buscada.

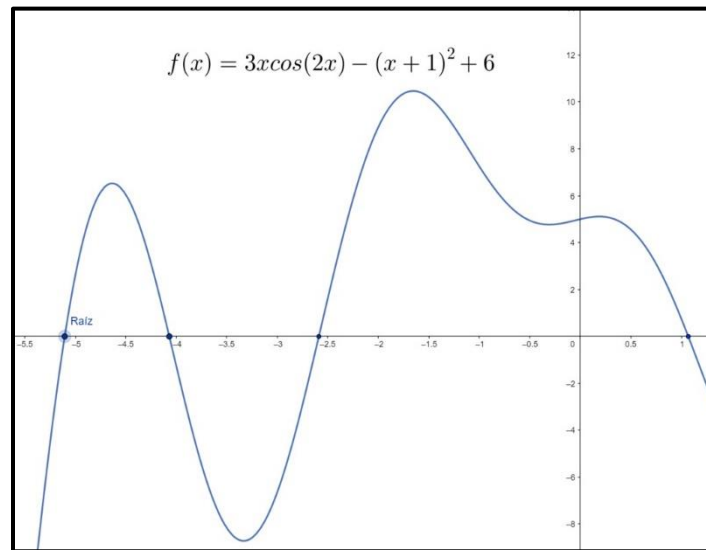


Figura 68: Gráfica de $f(x) = 3x \cos(2x) - (x+1)^2 + 6$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(-5)$ y $f(-4.5)$, para verificar que en el intervalo $[-5, -4.5]$ se encuentra la raíz. Obteniéndose

$$\begin{aligned} f(-5) &= 3(-5)\cos(2(-5)) - ((-5) + 1)^2 + 6 = -5 \\ f(-4.5) &= 3(-4.5)\cos(2(-4.5)) - ((-4.5) + 1)^2 + 6 = 7 \end{aligned}$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = -4.5 - 6.050259 \left(\frac{-4.5 - (-5)}{6.050259 - 2.586073} \right) = -5.373258$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-5.373258) = 3(-5.373258)\cos(2(-5.373258)) - ((-5.373258) + 1)^2 + 6 = -9.152016$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = -4.5$ y $x_2 = -5.373258$ se calcula x_3 con la ecuación 15 :

$$x_3 = -5.373258 - (-4.5) \left(\frac{-5.373258 - (-4.5)}{-9.152016 - 6.050259} \right) = -4.847543$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(-4.847543) = 3(-4.847543)\cos(2(-4.847543)) - ((-4.847543) + 1)^2 + 6 = 5.210984$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 7.

Para obtener x_4 , x_5 , x_6 y x_7 se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 63:

Cuadro 63. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	-5.000000	-4.500000	2.586073	6.050259	-5.373258	-9.152016	-----
2	-4.500000	-5.373258	6.050259	-9.152016	-4.847543	5.210984	0.108450
3	-5.373258	-4.847543	-9.152016	5.210984	-5.038276	1.708761	0.037857
4	-4.847543	-5.038276	5.210984	1.708761	-5.131336	-0.768878	0.018136
5	-5.038276	-5.131336	1.708761	-0.768878	-5.102457	0.050612	0.005660
6	-5.131336	-5.102457	-0.768878	0.050612	-5.104240	0.001289	0.000349
7	-5.102457	-5.104240	0.050612	0.001289	-5.104287	-0.000002	0.000009

A continuación se indica cómo calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{-4.847543 - (-5.373258)}{-4.847543} \right| = 0.108450$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{-5.038276 - (-4.847543)}{-5.038276} \right| = 0.037857$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 63.

Comprobación:

$$f(-5.104287) = 3(-5.104287)\cos(2(-5.104287) - ((-5.104287) + 1)^2 + 6 = 0.000002... \\ \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{-5.104287 - (-5.104240)}{-5.104287} \right| = 0.000009 \leq 0.00001$$

∴ La raíz es: **-5.104287** con $Tol = 0.00001$

Ejemplo 15: Localizar la raíz de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2$ mediante el Método de la Secante, en el intervalo $[-2, -1]$, con una tolerancia de 10^{-5} y usando un redondeo de seis decimales. Ejercicio obtenido de Nieves, A. (2014).

Antes de aplicar el Método de la Secante, se grafica la función $f(x)$, obteniendo la Figura 69, donde se puede observar que la función es continua en el intervalo $[-2, 0]$ y que en este intervalo se encuentra una raíz; por lo que se empieza a usar el Método de Secante ya que se puede garantizar que este va a converger a la solución buscada.

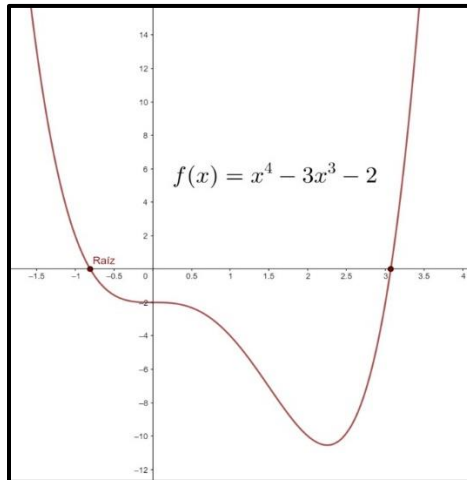


Figura 69: Gráfica de $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2$

Aplicando el algoritmo 4 del Método de la Secante se empieza calculando $f(-2)$ y $f(-1)$. Obteniéndose:

$$f(-2) = (-2)^4 - 3(-2)^3 - 2 = 38$$

$$f(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 - 2 = 2$$

A continuación se calcula x_2 :

$$x_2 = -1 - 2 \left(\frac{-1 - (-2)}{2 - 38} \right) = -0.944444$$

Después se calcula $f(x_2)$:

$$f(-0.944444) = (-0.944444)^4 - 3(-0.944444)^3 - 2 = 1.322883$$

Luego utilizando las últimas dos iteraciones $x_1 = -1$ y $x_2 = -0.944444$ se calcula x_3 con la ecuación 15:

$$x_3 = -0.944444 - (1.322883) \left(\frac{-0.944444 - (-1)}{1.322883 - 2} \right) = -0.835906$$

Después se calcula $f(x_3)$:

$$f(-0.835906) = (-0.835906)^4 - 3(-0.835906)^3 - 2 = 0.240472$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| \leq 0.00001$ y que $|f(x_n)| \leq 0.00001$; esto se cumple en la iteración 6.

Para obtener x_4 , x_5 y x_6 se repite el proceso anterior.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 64:

Cuadro 64. Ejemplo del Método de la Secante cuando converge.

n	x_{n-1}	x_n	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$	$f(x_{n+1})$	ε
1	-2.000000	-1.000000	38.000000	2.000000	-0.944444	1.322883	-----
2	-1.000000	-0.944444	2.000000	1.322883	-0.835906	0.240472	0.129846
3	-0.944444	-0.835906	1.322883	0.240472	-0.811792	0.039219	0.029704
4	-0.835906	-0.811792	0.240472	0.039219	-0.807093	0.001541	0.005822
5	-0.811792	-0.807093	0.039219	0.001541	-0.806901	0.000011	0.000238
6	-0.807093	-0.806901	0.001541	0.000011	-0.806900	0.000000	0.000002

A continuación se indica como calcular el error relativo $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right|$.

Para la primera iteración el error relativo no se calcula porque no se cuenta con una aproximación inicial.

Para la segunda iteración el error se calcula:

$$\left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{-0.835906 - (-0.944444)}{-0.835906} \right| = 0.129846$$

Para la tercera iteración el error relativo se calcula:

$$\left| \frac{x_4 - x_3}{x_4} \right| = \left| \frac{-0.811792 - (-0.835906)}{-0.811792} \right| = 0.029704$$

Para obtener el error relativo de las últimas iteraciones se repite el proceso anterior. Los errores se muestran en el Cuadro 64.

Comprobación:

$$f(-0.806900) = (-0.806900)^4 - 3(-0.806900)^3 - 2 = 0.000000... \approx 0$$

Podemos observar que se cumple el criterio de convergencia (5).

$$\left| \frac{-0.806901 - (-0.806901)}{-0.806900} \right| = 0.000002 \leq 0.00001$$

$\therefore$ La raíz es: **-0.806900** con $Tol = 0.00001$

5 Método de Bairstow

De acuerdo con Gerald y Wheatley (2000), los métodos considerados hasta ahora son difíciles de usar para encontrar una raíz compleja de un polinomio. Es cierto que el Método de Newton funciona satisfactoriamente en el supuesto de que se empiece con una estimación inicial de valor complejo; no obstante, en un cálculo manual es tedioso realizar las multiplicaciones y divisiones de números complejos. Sin embargo, en un programa de computadora si existe la capacidad de cálculos aritméticos con números complejos, pero la ejecución es más lenta.

Para polinomios, las raíces complejas ocurren en pares conjugados si todos los coeficientes son números reales. En este caso, si se extraen los factores cuadráticos que son los productos de los pares de raíces complejas, es posible evitar la aritmética con números complejos porque dichos factores cuadráticos tienen coeficientes reales. Primero se desarrolla el algoritmo para la doble división sintética mediante una cuadrática de prueba: $x^2 - rx - s$, que con optimismo, está cerca del factor deseado del polinomio:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= (x^2 - rx - s)Q_{n-2}(x) + \text{residuo} \\ &= (x^2 - rx - s)(b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \cdots + b_3 x + b_2) + \text{residuo} \\ \text{residuo} &= b_1(x - r) + b_0 \end{aligned}$$

Si $x^2 - rx - s$ es un factor exacto de $P_n(x)$, entonces b_1 y b_0 serán cero. Los signos negativos en el factor son convencionales para el desarrollo del algoritmo. Al multiplicar e igualar los coeficientes de potencias semejantes de x se obtiene:

$$\left. \begin{array}{lcl} a_n & = & b_n \\ a_{n-1} & = & b_{n-1} - rb_n \\ a_{n-2} & = & b_{n-2} - rb_{n-1} - sb_n \\ a_{n-3} & = & b_{n-3} - rb_{n-2} - sb_{n-1} \\ \vdots & & \\ a_1 & = & b_1 - rb_2 - sb_3 \\ a_0 & = & b_0 - rb_1 - sb_2 \end{array} \right\} o \left\{ \begin{array}{lcl} b_n & = & a_n \\ b_{n-1} & = & a_{n-1} + rb_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-2} + rb_{n-1} + sb_n \\ b_{n-3} & = & a_{n-3} + rb_{n-2} + sb_{n-1} \\ \vdots & & \\ b_1 & = & a_1 + rb_2 + sb_3 \\ b_0 & = & a_0 + rb_1 + sb_2 \end{array} \right.$$

Es deseable que b_1 y b_0 sean cero, ya que eso demostraría que $x^2 - rx - s$ es un factor cuadrático del polinomio (ya que el residuo es cero). Sin embargo, normalmente esto no es así; si los valores de r y s , se cambian apropiadamente es posible hacer cero el residuo, o por lo menos hacer más pequeños sus coeficientes. Resulta evidente que b_1 y b_0 son funciones de los

parámetros r y s . Al desarrollarlos como una serie de Taylor para una función de dos variables en términos de $(r^* - r)$ y $(s^* - s)$, donde se supone que $(r^* - r)$ y $(s^* - s)$ son pequeños, de modo que términos de orden superior al primero son despreciables, se obtiene:

$$b_1(r^*, s^*) = b_1(r, s) + \frac{\partial b_1}{\partial r}(r^* - r) + \frac{\partial b_1}{\partial s}(s^* - s)$$

$$b_0(r^*, s^*) = b_0(r, s) + \frac{\partial b_0}{\partial r}(r^* - r) + \frac{\partial b_0}{\partial s}(s^* - s)$$

Se tomará (r^*, s^*) como el punto en el que el residuo es cero, y

$$r^* - r = \Delta r, \quad s^* - s = \Delta s,$$

donde Δr y Δs son incrementos que se suman a los r y s originales para obtener los nuevos valores de r^* y s^* , para los cuales el residuo es cero. Entonces:

$$b_1(r^*, s^*) = 0 \simeq b_1 + \frac{\partial b_1}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s} \Delta s,$$

$$b_0(r^*, s^*) = 0 \simeq b_0 + \frac{\partial b_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s} \Delta s,$$

Gerald y Wheatley (2000), consideran que todos los términos a la derecha deben evaluarse ahora en (r, s) . Se desea resolver simultáneamente estas dos ecuaciones para las incógnitas Δr y Δs , de modo que es necesario evaluar las derivadas parciales.

Bairstow demostró que las derivadas parciales requeridas pueden obtenerse a partir de las b aplicando nuevamente la doble división sintética entre el factor $x^2 - rx - s$ de la misma forma en que las b se obtienen a partir de las letras a . Obsérvese que esto es análogo a obtener la derivada de un polinomio al dividir el polinomio reducido entre $(x - x_1)$. Se define un conjunto de letras c mediante las siguientes relaciones que se muestran a la izquierda y estas se comparan con las derivadas parciales en las columnas de la derecha:

Por tanto, las derivadas parciales que se necesitan son iguales a las letras c idóneamente correspondientes. Las ecuaciones simultáneas se convierten en:

$$-b_1 = c_2 \Delta r + c_3 \Delta s,$$

$$-b_0 = c_1 \Delta r + c_2 \Delta s$$

donde Δr y Δs son las incógnitas a resolver.

$$\begin{array}{lll}
C_n = b_n & \frac{\partial b_n}{\partial r} = \frac{\partial b_n}{\partial r} = 0 & \frac{\partial b_n}{\partial s} = \frac{\partial a_n}{\partial s} = 0 \\
C_{n-1} = b_{n-1} + rc_n & \frac{\partial b_{n-1}}{\partial r} = r \frac{\partial b_n}{\partial r} + b_n = b_n = c_n & \frac{\partial b_{n-1}}{\partial s} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial s} + r \frac{\partial b_n}{\partial s} = 0 \\
C_{n-2} = b_{n-2} + rc_{n-1} + sc_n & \frac{\partial b_{n-2}}{\partial r} = r \frac{\partial b_{n-1}}{\partial r} + b_{n-1} = b_{n-1} = c_{n-1} & = b_n = c_n \\
C_{n-3} = b_{n-3} + rc_{n-2} + sc_{n-1} & \frac{\partial b_{n-3}}{\partial r} = r \frac{\partial b_{n-2}}{\partial r} + b_{n-2} = b_{n-2} = c_{n-2} & \frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} = \frac{\partial b_{n-1}}{\partial s} + r \frac{\partial b_n}{\partial s} = b_0 \\
\vdots & & = b_{n-1} + rc_n = c_{n-1} \\
C_1 = b_1 + rc_2 + sc_3 & & \vdots \\
& \frac{\partial b_1}{\partial r} = r \frac{\partial b_2}{\partial r} + b_2 + s \frac{\partial b_3}{\partial r} & \frac{\partial b_1}{\partial r} = r \frac{\partial b_2}{\partial r} + s \frac{\partial b_3}{\partial r} + b_3 \\
& = b_2 + rc_3 + sc_4 = c_2 & = b_3 + rc_4 + sc_5 = c_{n-1}
\end{array}$$

Por tanto, las derivadas parciales que se necesitan son iguales a las letras c idóneamente correspondientes. Las ecuaciones simultáneas se convierten en:

$$\begin{aligned}
-b_1 &= c_2 \Delta r + c_3 \Delta s, \\
-b_0 &= c_1 \Delta r + c_2 \Delta s
\end{aligned}$$

donde Δr y Δs son las incógnitas a resolver.

Finalmente Gerald y Wheatley (2000), comentan que la solución se expresa como cocientes de determinantes, usando la regla de Cramer:

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} -b_1 & c_3 \\ -b_0 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}, \quad \Delta s = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & -b_1 \\ c_1 & -b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}},$$

Fórmula de iteración para el Método de Bairstow

Las fórmulas iterativas más significativas de este método, se observan en el paso 1, 2 y 4. del algoritmo.

5.1 Algoritmo del Método de Bairstow

Paso 0: Introducir el grado del polinomio a trabajar y los valores de r y s .

Paso 1: Utilizar la doble división sintética con los valores de r y s , esto con la finalidad de obtener b_0 y b_1 , para calcular estos se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}b_n &= a_n \\b_{n-1} &= a_{n-1} + b_n * r \\b_{n-2} &= a_{n-2} + b_{n-1} * r + b_n * s \\b_{n-3} &= a_{n-3} + b_{n-2} * r + b_{n-1} * s \\\vdots \\b_1 &= a_1 + b_2 * r + b_3 * s \\b_0 &= a_0 + b_1 * r + b_2 * s\end{aligned}$$

Paso 2: Obtener los valores de c_1 , c_2 y c_3 , para ello utilice nuevamente el método de la doble división sintética con los mismos valores de r y s .

$$\begin{aligned}c_n &= b_n \\c_{n-1} &= b_{n-1} + c_n * r \\c_{n-2} &= b_{n-2} + c_{n-1} * r + c_n * s \\c_{n-3} &= b_{n-3} + c_{n-2} * r + c_{n-1} * s \\\vdots \\c_1 &= b_1 + c_2 * r + c_3 * s\end{aligned}$$

Paso 3: Formar el sistema de ecuaciones utilizando los valores de c_1 , c_2 , c_3 , b_1 y b_0 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0\end{aligned}$$

para determinar Δr y Δs .

Paso 4: Calcular el valor r^* y s^* , utilizando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}r^* &= \Delta r + r \\s^* &= \Delta s + s\end{aligned}$$

Paso 5: Verificar que el error obtenido se aproxime al porcentaje dado o propuesto como tolerancia para detener el algoritmo.

$$E_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; E_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

Paso 6: Si $E_r \leq Tol$ y $E_s \leq Tol$ entonces

Paso 6.1: Formar el polinomio $g(x) = x^2 - rx - s$.

Paso 6.2: Realizar la división del polinomio original $f(x)$ entre el polinomio del

Paso 6.1 $g(x)$, es decir

$$g(x) \overline{) f(x)}$$

para encontrar los valores de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

DE LO CONTRARIO

Paso 6.1 hacer $n = n + 1$.

Paso 6.2 Ir al **Paso 1**

Paso 7: IMPRIMIR "Las raíces aproximadas del polinomio de grado n son: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$." y TERMINAR.

5.2 Ventajas y Desventajas del Método

Ventajas

1. Encuentra todas las raíces.
2. Permite encontrar tanto raíces reales como complejas.

Desventajas

1. Puede tener una convergencia lenta dependiendo del polinomio.
2. Solo funciona con polinomios con coeficientes reales.
3. Es más difícil de programar que los Métodos revisados en este libro.

5.3 Convergencia del método

- El método obtiene las raíces mientras no rebase el número máximo de iteraciones.
- El método converge cuando el error relativo es menor a una tolerancia dada.
- Si los primeros valores de r y s que se proporcionan no son cercanos a la raíces del polinomio o aproximadas a un factor del polinomio, es probable que el método no converja.

5.4 Ejemplos

Ejemplo 1: Usar el Método de Bairstow para encontrar las raíces del polinomio $f(x) = x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3$. Usar como factor inicial $r = s = -1$ con error de tolerancia del 5%. Ejercicio tomado de Burden, R. (2017).

Antes de aplicar el Método de Bairstow se grafica la función $f(x) = x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3$, obteniendo la Figura 70; donde se puede observar que no hay raíces reales; por lo que se empieza a aplicar el método.

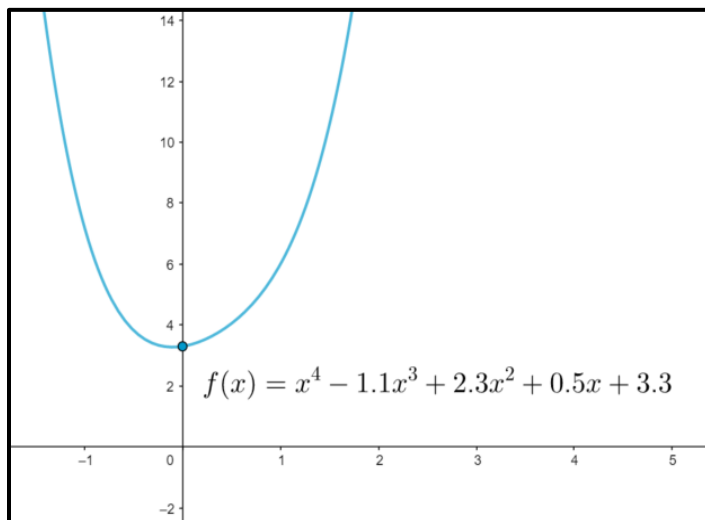


Figura 70. Grafica de $f(x) = x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3$

Para realizar este método, tendrá que utilizar doble división sintética utilizando los valores de r y s . Con esta primera iteración encontraremos los valores de b_0 y b_1 .

Manejando la doble división sintética se obtiene:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-1.1	2.3	0.5	3.3
$r = -1$	*	-1	2.1	-3.4	0.8
$s = -1$	*	*	-1	2.1	-3.4
	1	-2.1	3.4	-0.8	0.7
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$b_4 = 1$$

$$b_3 = a_3 + b_4 * r = -1.1 + (1) * (-1) = -2.1$$

$$b_2 = a_2 + b_3 * r + b_4 * s = 2.3 + (-2.1) * (-1) + (1) * (-1) = 3.4$$

$$b_1 = a_1 + b_2 * r + b_3 * s = 0.5 + (3.4) * (-1) + (-2.1)(-1) = -0.8$$

$$b_0 = a_0 + b_1 * r + b_2 * s = 3.3 + (-0.8) * (-1) + (3.4) * (-1) = 0.7$$

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$b_0 = 0.7 \quad y \quad b_1 = -0.8$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	-2.1	3.4	-0.8
$r = -1$	*	-1	3.1	-5.5
$s = -1$	*	*	-1	3.1
	1	-3.1	5.5	-3.2
	c_4	c_3	c_2	c_1

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}c_4 &= b_4 = 1 \\c_3 &= b_3 + c_4 * r = -2.1 + (1)(-1) = -3.1 \\c_2 &= b_2 + c_3 * r + c_4 * s = 3.4 + (-3.1) * (-1) + (1) * (-1) = 5.5 \\c_1 &= b_1 + c_2 * r + c_3 * s = -0.8 + (5.5) * (-1) + (-3.1)(-1) = -3.2\end{aligned}$$

Ya realizada las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = -3.2; \quad c_2 = 5.5; \quad c_3 = -3.1$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}5.5 \Delta r - 3.1 \Delta s &= 0.8 \\-3.2 \Delta r + 5.5 \Delta s &= -0.7\end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el método de Cramer:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{\begin{vmatrix} 0.8 & -3.1 \\ -0.7 & 5.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5.5 & -3.1 \\ -3.2 & 5.5 \end{vmatrix}} = \frac{(0.8)(5.5) - (-0.7)(-3.1)}{(5.5)(5.5) - (-3.2)(-3.1)} = \frac{4.4 - 2.17}{30.25 - 9.92} = \frac{2.23}{20.33} = 0.10969 \\ \Delta s &= \frac{\begin{vmatrix} 5.5 & 0.8 \\ -3.2 & -0.7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5.5 & -3.1 \\ -3.2 & 5.5 \end{vmatrix}} = \frac{(5.5)(-0.7) - (-3.2)(0.8)}{(5.5)(5.5) - (-3.2)(-3.1)} = \frac{-3.85 - (-2.56)}{30.25 - 9.92} = \frac{-1.29}{20.33} \\ &= -0.063453\end{aligned}$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}r^* &= r + \Delta r = -1 + 0.10969 = -0.89031 \\s^* &= s + \Delta s = -1 + (-0.063453) = -1.063453\end{aligned}$$

A continuación, se indica como calcular el error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; \quad \epsilon_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

por lo que

$$\epsilon_r = \left| \frac{0.10969}{-0.89031} \right| * 100 = 12.320428\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{-0.063453}{-1.063453} \right| * 100 = 5.966695\%$$

Para la segunda iteración se utilizarán los valores de r^* y s^* , con el objeto de encontrar los nuevos valores de b_0 y b_1 . Realizando la doble división sintética y utilizando los valores del polinomio inicial obtenemos:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-1.1	2.3	0.5	3.3
$r^* = -0.89031$	*	-0.89031	1.771993	-2.678533	0.055139
$s^* = -1.063453$	*	*	-1.063453	2.116601	-3.199441
	1	-1.99031	3.00854	-0.061932	0.155698
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = 0.155698 \quad y \quad b_1 = -0.061932}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	-1.99031	3.00854	-0.061932
$r^* = -0.89031$	*	-0.89031	2.564645	-4.015059
$s^* = -1.063453$	*	*	-1.063453	3.063404
	1	-2.88062	4.509732	-1.013587
	c_4	c_3	c_2	c_1

Ya realizada las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = -1.013587; \quad c_2 = 4.509732; \quad c_3 = -2.88062$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s , se deberá plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 4.509732 \Delta r - 2.88062 \Delta s &= 0.061932 \\ -1.013587 \Delta r + 4.509732 \Delta s &= -0.155698 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el método de Cramer:

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} 0.061932 & -2.88062 \\ -0.155698 & 4.509732 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.509732 & -2.88062 \\ -1.013587 & 4.509732 \end{vmatrix}} = -0.009715$$

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} 4.509732 & 0.061932 \\ -1.013587 & -0.155698 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.509732 & -2.88062 \\ -1.013587 & 4.509732 \end{vmatrix}} = -0.036708$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} r^* &= r + \Delta r = -0.89031 + (-0.009715) = -0.900025 \\ s^* &= s + \Delta s = -1.063453 + (-0.036708) = -1.100161 \end{aligned}$$

Ahora verifiquemos que tan cerca se está del error:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \left| \frac{-0.009715}{-0.900025} \right| * 100 = 1.079414\% \\ \epsilon_s &= \left| \frac{-0.036708}{-1.100161} \right| * 100 = 3.336603\% \end{aligned}$$

Como se puede observar los valores de ϵ_r y ϵ_s son menores al 5%, de acuerdo con el Algoritmo del Método de Bairstow $g(x) = x^2 - rx - s$ así $g(x) = x^2 + 0.9x + 1.1$.

Se realiza una división entre el polinomio original $f(x)$ y el obtenido $g(x)$ para encontrar las raíces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3}{x^2 + 0.9x + 1.1}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 3 \\
 \hline
 x^2 + 0.9x + 1.1 \overline{) x^4 - 1.1x^3 + 2.3x^2 + 0.5x + 3.3} \\
 \underline{-x^4 - 0.9x^3 - 1.1x^2} \\
 -2x^3 + 1.2x^2 + 0.5x + 3.3 \\
 \underline{2x^3 + 1.8x^2 + 2.2x} \\
 3x^2 + 2.7x + 3.3 \\
 \underline{-3x^2 - 2.7x - 3.3} \\
 0
 \end{array}$$

Por lo tanto, con el polinomio encontrado con la forma $x^2 - rx - s$, podemos hallar todas las raíces del polinomio. Observe lo siguiente:

$$(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 0.9x + 1.1) = 0$$

Usando la fórmula general para los polinomios anteriores a fin de encontrar las raíces, se obtiene:

Para $x^2 - 2x + 3 = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{8}i}{2} = 1 + 1.414214i$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{8}i}{2} = 1 - 1.414214i$$

Para $x^2 + 0.9x + 1.1 = 0$ se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Implica

$$x = \frac{-(0.9) \pm \sqrt{(0.9)^2 - 4(1)(1.1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-0.9 \pm \sqrt{0.81 - 4.4}}{2}$$

$$x = \frac{-0.9 \pm \sqrt{-3.59}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-0.9 + \sqrt{3.59}i}{2} = -0.45 + 0.947364i$$

$$x_4 = \frac{-0.9 - \sqrt{3.59}i}{2} = -0.45 - 0.947364i$$

Además, se muestra el Cuadro 65 de iteraciones:

Cuadro 65. Ejemplo del Método de Bairstow

n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3
1	0.7	-0.8	3.4	-2.1	1	-3.2	5.5	-3.1
2	0.155698	-0.061932	3.00854	-1.99031	1	-1.013587	4.509732	-2.88062

n	r^*	s^*	Δr	Δs	εr	εs
1	-0.89031	-1.063453	0.10969	-0.063453	12.320428	5.966695
2	-0.900025	-1.100161	-0.009715	-0.036708	1.079414	3.336603

Por lo tanto las raíces complejas encontradas son:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1 + 1.414214i \\
 x_2 &= 1 - 1.414214i \\
 x_3 &= -0.45 + 0.947364i \\
 x_4 &= -0.45 - 0.947364i
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Usar el método de Bairstow para encontrar las raíces del polinomio $f(x) = x^3 - 11x^2 + 32x - 22$. Usar como factor inicial $r = s = 0.1$ con error de tolerancia del 0.00001%. Ejercicio tomado de Tucci, K. (2008).

Antes de aplicar el Método de Bairstow se grafica la función $f(x) = x^3 - 11x^2 + 32x - 22$, obteniendo la Figura 71; donde se puede observar que hay 3 raíces reales; por lo que se empieza a aplicar el método.

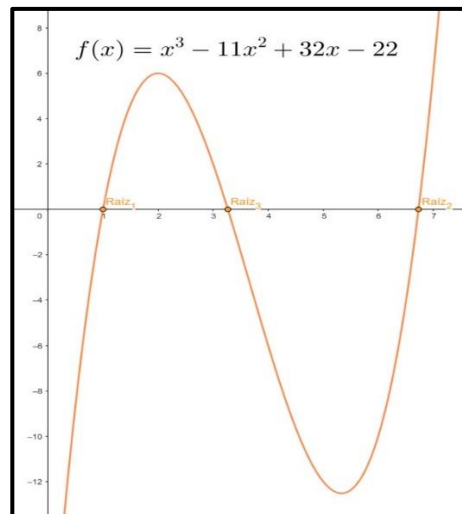


Figura 71. Gráfica de $f(x) = x^3 - 11x^2 + 32x - 22$

Para realizar este método, tendrá que utilizar doble división sintética utilizando los valores de r y s . Con esta primera iteración encontraremos los valores de b_0 y b_1 . Manejando la doble división sintética se obtiene:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-11	32	-22
$r = 0.1$	*	0.1	-1.09	3.101
$s = 0.1$	*	*	0.1	-1.09
	1	-10.9	31.01	-19.989
	b_3	b_2	b_1	b_0

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$b_3 = 1$$

$$b_2 = a_2 + b_3 * r = -11 + (1) * (0.1) = -10.9$$

$$b_1 = a_1 + b_2 * r + b_3 * s = 32 + (-10.9) * (0.1) + (1) * (0.1) = \mathbf{31.01}$$

$$b_0 = a_0 + b_1 * r + b_2 * s = -22 + (31.01) * (0.1) + (-10.9)(0.1) = \mathbf{-19.989}$$

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = -19.989 \quad y \quad b_1 = 31.01}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_3	b_2	b_1
	1	-10.9	31.01
$r = 0.1$	*	0.1	-1.08
$s = 0.1$	*	*	0.1
	1	-10.8	30.03
	c_3	c_2	c_1

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$c_3 = b_3 = 1$$

$$c_2 = b_2 + c_3 * r = -10.9 + (1)(0.1) = -10.8$$

$$c_1 = b_1 + c_2 * r + c_3 * s = 31.01 + (-10.8) * (0.1) + (1) * (0.1) = 30.03$$

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = 30.03; \quad c_2 = -10.8; \quad c_3 = 1$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -10.8 \Delta r + \Delta s &= -31.01 \\ 30.03 \Delta r - 10.8 \Delta s &= 19.989 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{\begin{vmatrix} -31.01 & 1 \\ 19.989 & -10.8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10.8 & 1 \\ 30.03 & -10.8 \end{vmatrix}} = \frac{(-31.01)(-10.8) - (19.989)(1)}{(-10.8)(-10.8) - (30.03)(1)} = \frac{334.908 - 19.989}{116.64 - 30.03} = \frac{314.919}{86.61} \\ &= 3.636058 \\ \Delta s &= \frac{\begin{vmatrix} -10.8 & -31.01 \\ 30.03 & 19.989 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -10.8 & 1 \\ 30.03 & -10.8 \end{vmatrix}} = \frac{(-10.8)(19.989) - (30.03)(-31.01)}{(-10.8)(-10.8) - (30.03)(1)} = \frac{-215.8812 - (-931.2303)}{116.64 - 30.03} \\ &= \frac{715.3491}{86.61} = 8.259428 \end{aligned}$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = 0.1 + 3.636058 = 3.736058$$

$$s^* = s + \Delta s = 0.1 + 8.259428 = 8.359428$$

A continuación, se indica como calcular el error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; \quad \epsilon_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

por lo que

$$\epsilon_r = \left| \frac{3.636058}{3.736058} \right| * 100 = 97.323382\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{8.259428}{8.359428} \right| * 100 = 98.803746\%$$

Para la segunda iteración se utilizarán los valores de r^* y s^* , con el objeto de encontrar los nuevos valores de b_0 y b_1 . Realizando la doble división sintética y utilizando los valores del polinomio inicial obtenemos:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-11	32	-22
$r^* = 3.736058$	*	3.736058	-27.138509	49.394123
$s^* = 8.359428$	*	*	8.359428	-60.722402
	1	-7.263942	13.220919	-33.328279
	b_3	b_2	b_1	b_0

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = -33.328279 \quad y \quad b_1 = 13.220919}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_3	b_2	b_1
	1	-7.263942	13.220919
$r^* = 3.736058$	*	3.736058	-13.180378
$s^* = 8.359428$	*	*	8.359428
	1	-3.527884	8.399969
	c_3	c_2	c_1

Ya realizada las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = 8.399969; \quad c_2 = -3.527884; \quad c_3 = 1$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s , en primera instancia se deberá plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -3.527884 \Delta r + \Delta s &= -13.220919 \\ 8.399969 \Delta r - 3.527884 \Delta s &= 33.328279 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} -13.220919 & 1 \\ 33.328279 & -3.527884 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3.527884 & 1 \\ 8.399969 & -3.527884 \end{vmatrix}} = 3.29056$$

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} -3.527884 & -13.220919 \\ 8.399969 & 33.3283 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3.527884 & 1 \\ 8.399969 & -3.527884 \end{vmatrix}} = -1.612206$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizará las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = 3.736058 + 3.29056 = 7.02661$$

$$s^* = s + \Delta s = 8.359428 + (-1.612206) = 6.747222$$

Ahora verifiquemos que tan cerca se está del error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{3.29056}{7.026618} \right| * 100 = 46.829926\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{-1.612206}{6.747222} \right| * 100 = 23.894367\%$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que:

$$\epsilon_r \leq 0.00001\% \quad \epsilon_s \leq 0.00001\%$$

esto se cumple en la iteración 9. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 66:

Cuadro 66: Ejemplo del Método de Bairstow

n	r	s	b_3	b_2	b_1	b_0	c_3	c_2	c_1
1	0.1	0.1	1	-10.9	31.01	-19.989	1	-10.8	30.03
2	3.736058	8.359428	1	-7.263942	13.220919	-33.328279	1	-3.527884	8.399969
3	7.026618	6.747223	1	-3.973382	10.827786	27.273431	1	3.053237	39.028938
4	7.221402	-4.675283	1	-3.778598	0.037941	-4.060000	1	3.442803	20.224522
5	7.721976	-6.436602	1	-3.278024	0.250575	1.034268	1	4.443952	28.130060
6	7.731434	-6.729209	1	-3.268566	0.000089	-0.004446	1	4.462868	27.775253
7	7.732051	-6.732050	1	-3.267949	0.000000	0.000001	1	4.464101	27.784609
8	7.732051	-6.732051	1	-3.267949	0.000000	0.000000	1	4.464102	27.784610
9	7.732051	-6.732051	1	-3.267949	0.000000	0.000000	1	4.464102	27.784610

n	Δr	Δs	r^*	s^*	εr	εs
1	3.636058	8.259428	3.736058	8.359428	97.323382	98.803746
2	3.290560	-1.612206	7.026618	6.747223	46.829926	-23.894363
3	0.194783	-11.422506	7.221402	-4.675283	2.697305	244.316884
4	0.500574	-1.761319	7.721976	-6.436602	6.482463	27.364114
5	0.009458	-0.292607	7.731434	-6.729209	0.122336	4.348310
6	0.000617	-0.002841	7.732051	-6.732050	0.007974	0.042204
7	0.000000	-0.000001	7.732051	-6.732051	0.000001	0.000010
8	0.000000	0.000000	7.732051	-6.732051	0.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000	7.732051	-6.732051	0.000000	0.000000

De acuerdo con el Algoritmo del Método de Bairstow

$$g(x) = x^2 - rx - s$$

$$g(x) = x^2 - 7.732051x + 6.732051$$

Por lo tanto, con el polinomio encontrado con la forma $x^2 - rx - s$, podemos hallar las dos primeras raíces del polinomio.

Para $x^2 - 7.732051x + 6.732051 = 0$ se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$x = \frac{-(-7.732051) \pm \sqrt{(-7.732051)^2 - 4(1)(6.732051)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7.732051 \pm \sqrt{59.784613 - 26.928204}}{2}$$

$$x = \frac{7.732051 \pm \sqrt{32.856409}}{2}$$

$$x_1 = \frac{7.732051 + 5.732051}{2} = \frac{13.464102}{2} = 6.732051$$

$$x_2 = \frac{7.732051 - 5.732051}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Para calcular la tercer raíz se utiliza x_1 , x_2 y la división sintética:

$x_1 = 1$	1	-11	32	-22
		1	-10	22
	1	-10	22	0
$x_2 = 6.732051$			6.73205	-22
		1	-3.26795	0
$x_3 = 3.26795$			3.26795	
		1		0

Concluyendo el ejercicio, podemos observar que las raíces encontradas son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 6.73205 \\ x_3 &= 3.26795 \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Usar el Método de Bairstow para encontrar las raíces del polinomio

$f(x) = x^3 - x - 3$ Usar como factor inicial $r = s = 0.1$ con error de tolerancia del 0.00001%.
Ejercicio tomado de Wheatley, G. (2001).

Antes de aplicar el Método de Bairstow se grafica la función $f(x) = x^3 - x - 3$, obteniendo la Figura 72; donde se puede observar que hay una raíz real, por lo que se puede deducir que existen dos raíces complejas; por lo que se empieza a aplicar el método, ya que se puede garantizar que va a encontrar las raíces complejas y una real.

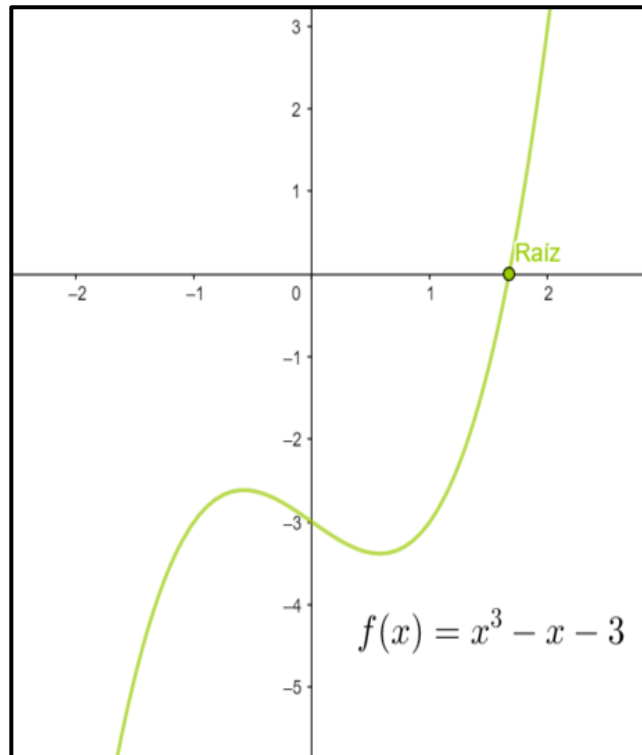


Figura 72. Gráfica de $f(x) = x^3 - x - 3$

Para realizar este método, tendrá que utilizar doble división sintética utilizando los valores de r y s . Con esta primera iteración encontraremos los valores de b_0 y b_1 .

Manejando la doble división sintética se obtiene:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	0	-1	-3
$r = 0.1$	*	0.1	0.01	-0.089
$s = 0.1$	*	*	0.1	0.01
	1	0.1	-0.89	-3.079
	b_3	b_2	b_1	b_0

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 b_3 &= 1 \\
 b_2 &= a_2 + b_3 * r = 0 + (1) * (0.1) = 0.1 \\
 b_1 &= a_1 + b_2 * r + b_3 * s = -1 + (0.1) * (0.1) + (1) * (0.1) = -\mathbf{0.89} \\
 b_0 &= a_0 + b_1 * r + b_2 * s = -3 + (-0.89) * (0.1) + (0.1)(0.1) = -\mathbf{3.079}
 \end{aligned}$$

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = -3.079 \quad y \quad b_1 = -0.89}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_3	b_2	b_1
	1	0.1	-0.89
$r = 0.1$	*	0.1	0.02
$s = 0.1$	*	*	0.1
	1	0.2	-0.77
	c_3	c_2	c_1

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 c_3 &= b_3 = 1 \\
 c_2 &= b_2 + c_3 * r = 0.1 + (1)(0.1) = 0.2 \\
 c_1 &= b_1 + c_2 * r + c_3 * s = -0.89 + (0.2) * (0.1) + (1) * (0.1) = -0.77
 \end{aligned}$$

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = -0.77; \quad c_2 = 0.2; \quad c_3 = 1$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\
 c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0.2\Delta r + 1\Delta s &= 0.89 \\ -0.77\Delta r + 0.2\Delta s &= 3.079 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{\begin{vmatrix} 0.89 & 1 \\ 3.079 & 0.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.77 & 0.2 \end{vmatrix}} = \frac{(0.89)(0.2) - (3.079)(1)}{(0.2)(0.2) - (-0.77)(1)} = \frac{0.178 - 3.079}{0.04 - (-0.77)} = \frac{-2.901}{0.81} = -3.581481 \\ \Delta s &= \frac{\begin{vmatrix} 0.2 & 0.89 \\ -0.77 & 3.079 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.2 & 1 \\ -0.77 & 0.2 \end{vmatrix}} = \frac{(0.2)(3.079) - (0.89)(-0.77)}{(0.2)(0.2) - (-0.77)(1)} = \frac{0.6158 - (-0.6853)}{0.04 - (-0.77)} = \frac{1.3011}{0.81} \\ &= 1.606296 \end{aligned}$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} r^* &= r + \Delta r = 0.1 - 3.581481 = -3.481481 \\ s^* &= s + \Delta s = 0.1 + 1.606296 = 1.706296 \end{aligned}$$

A continuación, se indica como calcular el error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; \quad \epsilon_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

por lo que

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \left| \frac{-3.581481}{-3.481481} \right| * 100 = 102.872340\% \\ \epsilon_s &= \left| \frac{1.606296}{1.706296} \right| * 100 = 94.139353\% \end{aligned}$$

Para la segunda iteración se utilizarán los valores de r^* y s^* , con el objeto de encontrar los nuevos valores de b_0 y b_1 . Realizando la doble división sintética y utilizando los valores del polinomio inicial obtenemos:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	0	-1	-3
$r^* = -3.481481$	*	-3.481481	12.120713	-44.656996
$s^* = 1.706296$	*	*	1.706296	-5.940439
	1	-3.481481	12.827010	-53.597435
	b_3	b_2	b_1	b_0

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = -53.597435 \quad y \quad b_1 = 12.827010}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_3	b_2	b_1
	1	-3.481481	12.827010
$r^* = -3.481481$	*	-3.481481	24.241427
$s^* = 1.706296$	*	*	1.706296
	1	-6.962963	38.774733
	c_3	c_2	c_1

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = 38.774733; \quad c_2 = -6.962963; \quad c_3 = 1$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} -6.962963\Delta r + \Delta s &= -12.827010 \\ 38.774733\Delta r - 6.962963\Delta s &= 53.597435 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} -12.827010 & 1 \\ 53.597435 & -6.962963 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6.962963 & 1 \\ 38.774733 & -6.962963 \end{vmatrix}} = 3.679039$$

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} -6.962963 & -12.827010 \\ 38.774733 & 53.597435 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -6.962963 & 1 \\ 38.774733 & -6.962963 \end{vmatrix}} = 12.790005$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizará las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = -3.481481 + 3.679039 = 0.197558$$

$$s^* = s + \Delta s = 1.7063 + 12.79 = 14.496301$$

Ahora verifiquemos que tan cerca se está del error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{3.679039}{0.197558} \right| * 100 = 1862.259711\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{12.790005}{14.496301} \right| * 100 = 88.229437\%$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que:

$$\epsilon_r \leq 0.00001\% \quad \epsilon_s \leq 0.00001\%$$

esto se cumple en la iteración 22. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 67.

Cuadro 67. Ejemplo del Método de Bairstow

n	r	s	b_3	b_2	b_1	b_0	c_3	c_2	c_1
1	0.1	0.1	1	0.1	-0.89	-3.079	1	0.2	-0.77
2	-3.481481	1.706296	1	-3.481481	12.827010	-53.597435	1	-6.962963	38.774733
3	0.197558	14.496301	1	0.197558	13.535330	2.537867	1	0.395116	28.109689
4	0.298087	0.921250	1	0.298087	0.010106	-2.722375	1	0.596174	1.109068
5	3.918361	-1.247170	1	3.918361	13.106383	43.468681	1	7.836722	42.566320
6	0.775177	10.278710	1	0.775177	9.879609	12.626256	1	1.550353	21.360116
7	0.917113	0.179049	1	0.917113	0.020146	-2.817315	1	1.834227	1.881389
8	-1.007547	3.689166	1	-1.007547	3.704318	-10.449283	1	-2.015094	9.423786
9	-0.451024	1.106295	1	-0.451024	0.309718	-3.638656	1	-0.902048	1.822859
10	2.877733	3.799276	1	2.877733	11.080626	39.820394	1	5.755467	31.442603
11	-11.356771	74.644873	1	-11.356771	202.621129	-3151.846599	1	-22.713543	535.218515
12	-86.454395	-1833.709339	1	-86.454395	5639.653035	-329043.558763	1	-172.908790	18754.668444
13	-28.470484	2552.565429	1	-28.470484	3362.133894	-168397.353107	1	-56.940968	7535.836254
14	-33.838010	-1115.200572	1	-33.838010	28.810331	36758.283524	1	-67.676019	1203.631565
15	-22.373754	-368.155690	1	-22.373754	131.429166	5293.460964	1	-44.747507	764.443187
16	-13.346674	-95.645520	1	-13.346674	81.488176	185.953450	1	-26.693347	342.110048
17	-6.972516	-6.986096	1	-6.972516	40.629884	-237.581855	1	-13.945032	130.875749
18	-1.798548	24.535174	1	-1.798548	26.769948	-95.274712	1	-3.597096	57.774670
19	-1.821283	-2.316555	1	-1.821283	0.000517	1.218161	1	-3.642566	4.318106
20	-1.684968	-1.820536	1	-1.684968	0.018582	0.036235	1	-3.369936	3.876281
21	-1.671753	-1.794582	1	-1.671753	0.000175	-0.000195	1	-3.343505	3.795106
22	-1.671700	-1.794580	1	-1.671700	0.000000	0.000000	1	-3.343400	3.794580

n	Δr	Δs	r^*	s^*	εr	εs
1	-3.581481	1.606296	-3.481481	1.706296	102.872340	94.139353
2	3.679039	12.790005	0.197558	14.496301	1862.259711	88.229437
3	0.100529	-13.575051	0.298087	0.921250	33.724804	1473.546524
4	3.620274	-2.168420	3.918361	-1.247170	92.392557	173.867271
5	-3.143184	11.525880	0.775177	10.278710	405.479816	112.133524
6	0.141937	-10.099661	0.917113	0.179049	15.476463	5640.714815
7	-1.924660	3.510117	-1.007547	3.689166	191.024354	95.146619
8	0.556523	-2.582871	-0.451024	1.106295	123.391018	233.470302
9	3.328757	2.692981	2.877733	3.799276	115.672890	70.881420
10	-14.234505	70.845596	-11.356771	74.644873	125.339363	94.910198
11	-75.097623	-1908.354211	-86.454395	-1833.709339	86.863859	104.070704
12	57.983911	4386.274767	-28.470484	2552.565429	203.663241	171.837898
13	-5.367526	-3667.766000	-33.838010	-1115.200572	15.862415	328.888461
14	11.464256	747.044881	-22.373754	-368.155690	51.239752	202.915479
15	9.027080	272.510170	-13.346674	-95.645520	67.635431	284.916816
16	6.374158	88.659424	-6.972516	-6.986096	91.418327	1269.083986
17	5.173968	31.521270	-1.798548	24.535174	287.674781	128.473798
18	-0.022735	-26.851729	-1.821283	-2.316555	1.248309	1159.123375
19	0.136315	0.496019	-1.684968	-1.820536	8.090060	27.245786
20	0.013215	0.025953	-1.671753	-1.794582	0.790515	1.446212
21	0.000053	0.000002	-1.671700	-1.794580	0.003155	0.000093
22	0.000000	0.000000	-1.671700	-1.794580	0.000000	0.000000

De acuerdo con el Algoritmo del Método de Bairstow

$$g(x) = x^2 - rx - s$$

$$g(x) = x^2 + 1.6717x + 1.79458$$

Por lo tanto, con el polinomio encontrado con la forma $x^2 - rx - s$, podemos hallar las dos primeras raíces del polinomio. Para $x^2 + 1.6717x + 1.79458 = 0$ se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$x = \frac{-(1.6717) \pm \sqrt{(1.6717)^2 - 4(1)(1.79458)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1.6717 \pm \sqrt{2.794581 - 7.17832}}{2}$$

$$x = \frac{-1.6717 \pm \sqrt{-4.383739}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1.6717 + 2.093738i}{2} = -0.83585 + 1.046869i$$

$$x_2 = \frac{-1.6717 - 2.093738i}{2} = -0.83585 - 1.046869i$$

Para calcular la tercer raíz se utiliza x_1, x_2 y la división sintética:

$x_2 = -0.83585 - 1.046869i$	1	0	-1	-3
		$-0.83585 - 1.046869i$	$-0.39729 + 1.750051i$	3
	1	$0.83585 - 1.046869i$	$-1.39729 + 1.750051i$	0

$x_1 = -0.83585 + 1.046869i$			
		$-0.83585 + 1.046869i$	$1.39729 - 1.750051i$
	1	-1.6717	0

$x_3 = 1.6717$		
		1.6717
	1	0

Concluyendo el ejercicio, podemos observar que las raíces encontradas son:

$$\begin{aligned}x_1 &= -0.83585 + 1.046869i \\x_2 &= -0.83585 - 1.046869i \\x_3 &= 1.6717\end{aligned}$$

Ejemplo 4: Usar el Método de Bairstow para encontrar las raíces del polinomio $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ Usar como factor inicial $r = 0.5$ y $s = -0.5$ con error de tolerancia del 0.00001%. Ejercicio tomado de Puig, E. L. (1996).

Antes de aplicar el Método de Bairstow se grafica la función $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, obteniendo la Figura 73; donde se puede observar que no hay raíces reales; por lo que se empieza a aplicar el método.

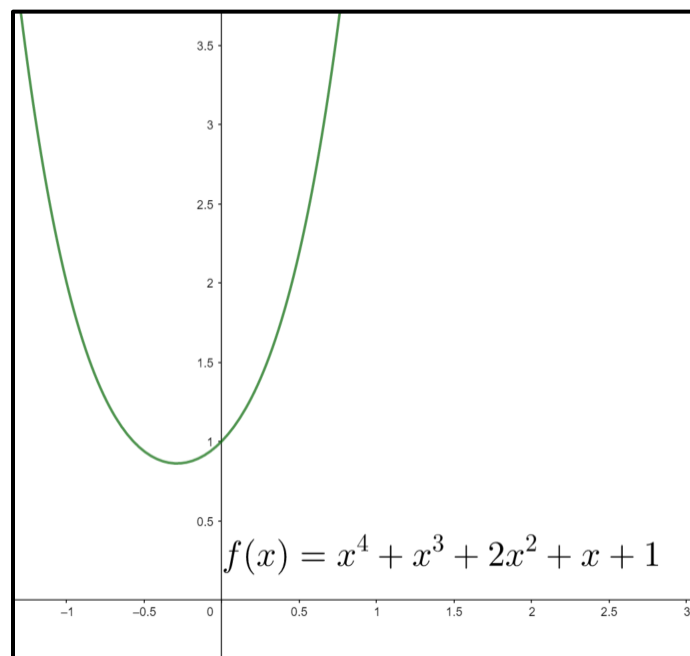


Figura 73. Gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

Para realizar este método, tendrá que utilizar doble división sintética utilizando los valores de r y s . Con esta primera iteración encontraremos los valores de b_0 y b_1 .

Manejando la doble división sintética se obtiene

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	1	2	1	1
$r = 0.5$	*	0.5	0.75	1.125	0.6875
$s = -0.5$	*	*	-0.5	-0.75	-1.125
	1	1.5	2.25	1.375	0.5625
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$b_4 = 1$$

$$b_3 = a_3 + b_4 * r = 1 + 1 * (0.5) = 1.5$$

$$b_2 = a_2 + b_3 * r + b_4 * s = 2 + (1.5) * 0.5 + 1 * (-0.5) = 2.25$$

$$b_1 = a_1 + b_2 * r + b_3 * s = 1 + (2.25) * 0.5 + 1.5 * (-0.5) = \mathbf{1.375}$$

$$b_0 = a_0 + b_1 * r + b_2 * s = 1 + (1.375) * 0.5 + 2.25 * (-0.5) = \mathbf{0.5625}$$

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = 0.5625 \quad y \quad b_1 = 1.375}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	1.5	2.25	1.375
$r = 0.5$	*	0.5	1	1.375
$s = -0.5$	*	*	-0.5	-1
	1	2	2.75	1.75
	c_4	c_3	c_2	c_1

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}c_4 &= b_4 = 1 \\c_3 &= b_3 + c_4 * r = 1.5 + 1 * 0.5 = 2 \\c_2 &= b_2 + c_3 * r + c_4 * s = 2.25 + (2) * 0.5 + 1 * (-0.5) = 2.75 \\c_1 &= b_1 + c_2 * r + c_3 * s = 1.375 + (2.75) * 0.5 + 2 * (-0.5) = 1.75\end{aligned}$$

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = 1.75; \quad c_2 = 2.75; \quad c_3 = 2$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}2.75 \Delta r + 2 \Delta s &= -1.375 \\1.75 \Delta r + 2.75 \Delta s &= -0.5625\end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{\begin{vmatrix} -1.375 & 2 \\ -0.5625 & 2.75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.75 & 2 \\ 1.75 & 2.75 \end{vmatrix}} = \frac{(-1.375)(2.75) - (-0.5625)(2)}{(2.75)(2.75) - (2)(1.75)} \\&= \frac{-3.78125 - (-1.125)}{7.5625 - 3.5} = \frac{-2.65625}{4.0625} = -0.653846 \\ \Delta s &= \frac{\begin{vmatrix} 2.75 & -1.375 \\ 1.75 & -0.5625 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2.75 & 2 \\ 1.75 & 2.75 \end{vmatrix}} = \frac{(2.75)(-0.5625) - (-1.375)(1.75)}{(2.75)(2.75) - (2)(1.75)} \\&= \frac{-1.546875 - (-2.40625)}{7.5625 - 3.5} = \frac{0.859375}{4.0625} = 0.211538\end{aligned}$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = 0.5 - 0.653846 = -0.153846$$

$$s^* = s + \Delta s = -0.5 + 0.211538 = -0.288462$$

A continuación, se indica como calcular el error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; \quad \epsilon_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

por lo que

$$\epsilon_r = \left| \frac{-0.653846}{-0.153846} \right| * 100 = 425\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{0.211538}{-0.288462} \right| * 100 = 73.333333\%$$

Para la segunda iteración se utilizarán los valores de r^* y s^* , con el objeto de encontrar los nuevos valores de b_0 y b_1 . Realizando la doble división sintética y utilizando los valores del polinomio inicial obtenemos:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	1	2	1	1
$r^* = -0.153846$	*	1	0.846154	1.58136	0.512631
$s^* = -0.288462$	*	*	1	0.846154	1.58136
	1	0.846154	1.581361	0.512631	0.464972
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = 0.464972 \quad y \quad b_1 = 0.512631}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	0.846154	1.581361	0.512631
$r^* = -0.153846$	*	-0.153846	-0.106509	-0.182522
$s^* = -0.288462$	*	*	-0.288462	-0.199704
	1	0.692308	1.186391	0.130405
	c_4	c_3	c_2	c_1

Ya realizada las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = 0.130405; \quad c_2 = 1.186391; \quad c_3 = 0.692308$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1.18639 \Delta r + 0.692308 \Delta s &= -0.512631 \\ 0.130405 \Delta r + 1.18639 \Delta s &= -0.464972 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} -0.512631 & 0.692308 \\ -0.464972 & 1.18639 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.18639 & 0.692308 \\ 0.130405 & 1.18639 \end{vmatrix}} = -0.21733$$

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} 1.18639 & -0.512631 \\ 0.130405 & -0.464972 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.18639 & 0.692308 \\ 0.130405 & 1.18639 \end{vmatrix}} = -0.368033$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = -0.153846 + (-0.21733) = -0.371177$$

$$s^* = s + \Delta s = -0.288462 + (-0.368033) = -0.656495$$

Ahora verifiquemos que tan cerca se está del error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{-0.21733}{-0.371177} \right| * 100 = 58.551762\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{-0.368033}{-0.656495} \right| * 100 = 56.060332\%$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que:

$$\epsilon_r \leq 0.00001\% \quad \epsilon_s \leq 0.00001\%$$

esto se cumple en la iteración 11. Las iteraciones se muestran en el Cuadro 68:

Cuadro 68. Ejemplo del Método de Bairstow

n	r	s	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	c_3	c_2	c_1
1	0.5	-0.5	1	1.5	2.25	1.375	0.5625	2	2.75	1.75
2	-0.153846	-0.288462	1	0.846154	1.581361	0.512631	0.464972	0.692308	1.186391	0.130405
3	-0.371177	-0.656495	1	0.628823	1.110101	0.175137	0.206218	0.257647	0.357974	-0.126878
4	-0.430636	-1.253639	1	0.569364	0.501173	0.070401	0.341394	0.138727	-0.812207	0.246253
5	-0.263510	-0.782640	1	0.736490	1.023288	0.153947	0.158568	0.472979	0.116013	-0.246796
6	0.175388	-1.215777	1	1.175388	0.990372	-0.255310	-0.248849	1.350776	0.011504	-1.895535
7	0.045260	-1.025659	1	1.045260	1.021650	-0.025840	-0.049033	1.090519	0.045348	-1.142288
8	0.003344	-1.000220	1	1.003344	1.003135	-0.000211	-0.003357	1.006688	0.006281	-1.007100
9	0.000013	-0.999990	1	1.000013	1.000022	0.000010	-0.000013	1.000025	0.000044	-1.000006
10	0.000000	-1.000000	1	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	-1.000000
11	0.000000	-1.000000	1	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	1.000000	0.000000	-1.000000

n	Δr	Δs	r^*	s^*	εr	εs
1	-0.653846	0.211538	-0.153846	-0.288462	425.000000	73.333333
2	-0.217330	-0.368033	-0.371177	-0.656495	58.551762	56.060332
3	-0.059460	-0.597144	-0.430636	-1.253639	13.807428	47.632877
4	0.167126	0.470999	-0.263510	-0.782640	63.422930	60.180831
5	0.438898	-0.433137	0.175388	-1.215777	250.244402	35.626376
6	-0.130128	0.190118	0.045260	-1.025659	287.514030	18.536233
7	-0.041916	0.025438	0.003344	-1.000220	1253.382602	2.543251
8	-0.003332	0.000230	0.000013	-0.999990	26609.464473	0.023007
9	-0.000013	-0.000010	0.000000	-1.000000	7050019.281532	0.000964
10	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000	423872628.622173	0.000000
11	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000	0.000000

De acuerdo con el Algoritmo del Método de Bairstow

$$g(x) = x^2 - rx - s$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Se realiza una división entre el polinomio original $f(x)$ y el obtenido $g(x)$ para encontrar las raíces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + x + 1 \\
 x^2 + 1 \overline{) \begin{array}{l} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ -x^4 \\ \hline x^3 + x^2 + x + 1 \\ -x^3 \\ \hline x^2 + 1 \\ -x^2 \\ \hline 0 \end{array}}
 \end{array}$$

Por lo tanto, con el polinomio encontrado con la forma $x^2 - rx - s$, podemos hallar todas las raíces del polinomio. Observe lo siguiente:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 1) = 0$$

Usando la fórmula general para los polinomios anteriores a fin de encontrar las raíces, se obtiene:

Para $x^2 + x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -0.5 + 0.866025i$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -0.5 - 0.866025i$$

Para $x^2 + 1 = 0$ se obtiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Implica

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{\sqrt{-4}}{2}$$

$$x_3 = \frac{2i}{2} = i$$

$$x_4 = \frac{-2i}{2} = -i$$

Concluyendo el ejercicio, podemos observar que las raíces complejas encontradas son:

$$x_1 = -0.5 + 0.866025i$$

$$x_2 = -0.5 - 0.866025i$$

$$x_3 = i$$

$$x_4 = -i$$

Ejemplo 5: Usar el Método de Bairstow para encontrar las raíces del polinomio

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$. Usar como factor inicial $r = s = -1$ con error de tolerancia del 0.00001%. Ejercicio tomado de Cheney, F. (2011).

Antes de aplicar el Método de Bairstow se grafica la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$, obteniendo la Figura 74; donde se puede observar que no hay raíces reales; por lo que se empieza a aplicar el método, ya que se puede garantizar que va a encontrar raíces complejas.

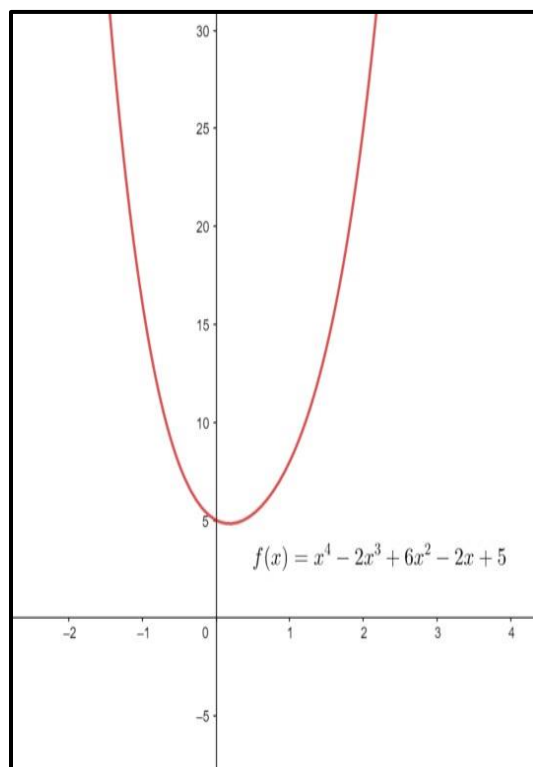


Figura 74. Gráfica de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$

Para realizar este método, tendrá que utilizar doble división sintética utilizando los valores de r y s . Con esta primera iteración encontraremos los valores de b_0 y b_1 .

Manejando la doble división sintética se obtiene

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-2	6	-2	5
$r = -1$	*	-1	3	-8	7
$s = -1$	*	*	-1	3	-8
	1	-3	8	-7	4
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 b_4 &= 1 \\
 b_3 &= a_3 + b_4 * r = -2 - 1 = -3 \\
 b_2 &= a_2 + b_3 * r + b_4 * s = 6 + 3 - 1 = 8 \\
 b_1 &= a_1 + b_2 * r + b_3 * s = -2 - 8 + 3 = -7 \\
 b_0 &= a_0 + b_1 * r + b_2 * s = 5 + 7 - 8 = 4
 \end{aligned}$$

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = 4 \quad y \quad b_1 = -7}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	-3	8	-7
$r = -1$	*	-1	4	-11
$s = -1$	*	*	-1	4
	1	-4	11	-14
	c_4	c_3	c_2	c_1

Para entender la doble división sintética se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 c_4 &= b_4 = 1 \\
 c_3 &= b_3 + c_4 * r = -3 - 1 = -4 \\
 c_2 &= b_2 + c_3 * r + c_4 * s = 8 + 4 - 1 = 11 \\
 c_1 &= b_1 + c_2 * r + c_3 * s = -7 - 11 + 4 = -14
 \end{aligned}$$

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = -14; \quad c_2 = 11; \quad c_3 = -4$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\
 c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 11\Delta r + -4\Delta s &= 7 \\ -14\Delta r + 11\Delta s &= -4 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ -14 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{(7)(11) - (-4)(-4)}{(11)(11) - (-4)(-14)} = \frac{77 - 16}{121 - 56} = \frac{61}{65} = 0.938462$$

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 7 \\ -14 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -4 \\ -14 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{(11)(-4) - (7)(-14)}{(11)(11) - (-4)(-14)} = \frac{-44 - (-98)}{121 - 56} = \frac{54}{65} = 0.830769$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas

$$r^* = r + \Delta r = -1 + 0.938462 = -0.061538$$

$$s^* = s + \Delta s = -1 + 0.830769 = -0.169231$$

A continuación, se indica como calcular el error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{\Delta r}{r} \right| * 100; \quad \epsilon_s = \left| \frac{\Delta s}{s} \right| * 100$$

por lo que

$$\epsilon_r = \left| \frac{0.938462}{-0.061538} \right| * 100 = 1525\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{0.830769}{-0.169231} \right| * 100 = 490.909091\%$$

Para la segunda iteración se utilizarán los valores de r^* y s^* , con el objeto de encontrar los nuevos valores de b_0 y b_1 . Realizando la doble división sintética y utilizando los valores del polinomio inicial obtenemos:

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	1	-2	6	-2	5
$r^* = -0.061538$	*	-0.061538	0.126864	-0.366624	0.124169
$s^* = -0.169231$	*	*	-0.169231	0.348876	-1.008215
	1	-2.061538	5.957633	-2.017748	4.115954
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0

Como se puede observar los valores de b_0 y b_1 son:

$$\mathbf{b_0 = -2.017748 \quad y \quad b_1 = 4.115954}$$

Ahora se obtendrán los valores de c_1 , c_2 y c_3 , realizaremos nuevamente la doble división sintética con los mismos valores de r y s , utilizando los números hallados los cuales son:

	b_4	b_3	b_2	b_1
	1	-2.061538	5.957633	-2.017748
$r^* = -0.061538$	*	-0.061538	0.130651	-0.364249
$s^* = -0.169231$	*	*	-0.169231	0.359290
	1	-2.123077	5.919053	-2.022707
	c_4	c_3	c_2	c_1

Ya realizadas las operaciones correspondientes los valores de c_1 , c_2 y c_3 son:

$$c_1 = -2.022707; \quad c_2 = 5.919035; \quad c_3 = -2.022707$$

Para encontrar los nuevos valores de r y s se deberá plantear el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} c_2 \Delta r + c_3 \Delta s &= -b_1 \\ c_1 \Delta r + c_2 \Delta s &= -b_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 5.919053\Delta r + (-2.022707)\Delta s &= 2.017748 \\ -2.022707\Delta r + 5.919053\Delta s &= -4.115954 \end{aligned}$$

Se recomienda resolver el sistema de ecuaciones por el Método de Cramer:

$$\Delta s = \frac{\begin{vmatrix} 2.017748 & -2.022707 \\ -4.115954 & 5.919048 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5.919048 & -2.022707 \\ -2.022707 & 5.91905 \end{vmatrix}} = 0.104248$$

$$\Delta r = \frac{\begin{vmatrix} 5.919048 & 2.017748 \\ -2.022707 & -4.115954 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5.919048 & -2.022707 \\ -2.022707 & 5.91905 \end{vmatrix}} = -0.659749$$

Ya que se obtuvieron Δr y Δs , ahora se procederá a obtener los nuevos valores para r y s , para ello se utilizarán las siguientes fórmulas:

$$r^* = r + \Delta r = -0.0615385 + 0.104248 = 0.04271$$

$$s^* = s + \Delta s = -0.169231 + (-0.659749) = -0.82898$$

Ahora verifiquemos que tan cerca se está del error:

$$\epsilon_r = \left| \frac{0.104248}{0.04271} \right| * 100 = 244.08604\%$$

$$\epsilon_s = \left| \frac{-0.659749}{-0.82898} \right| * 100 = 79.585664\%$$

Para saber cuando dejar de iterar, se debe cumplir que:

$$\epsilon_r \leq 0.00001\% \quad \epsilon_s \leq 0.00001\%$$

esto se cumple en la iteración 7.

Las iteraciones se muestran en el Cuadro 69:

Cuadro 69. Ejemplo del Método de Bairstow

n	r	s	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	c_3	c_2	c_1
1	-1	-1	1	-3	8	-7	4	-4	11	-14
2	-0.061538	-0.169231	1	-2.061538	5.957633	-2.017748	4.115954	-2.123077	5.919053	-2.022707
3	0.042710	-0.828980	1	-1.957290	5.087425	-0.160164	0.775786	-1.914581	4.176674	1.605369
4	0.002923	-0.999430	1	-1.997077	4.994733	0.010537	0.008145	-1.994154	3.989475	2.015215
5	-0.000001	-0.999995	1	-2.000001	5.000007	-0.000014	0.000019	-2.000002	4.000014	1.999974
6	0.000000	-1.000000	1	-2.000000	5.000000	0.000000	0.000000	-2.000000	4.000000	2.000000
7	0.000000	-1.000000	1	-2.000000	5.000000	0.000000	0.000000	-2.000000	4.000000	2.000000

n	Δr	Δs	r^*	s^*	εr	εs
1	0.938462	0.830769	-0.061538	-0.169231	1525.000000	490.909091
2	0.104248	-0.659749	0.042710	-0.828980	244.086040	79.585664
3	-0.039787	-0.170450	0.002923	-0.999430	1361.254878	17.054704
4	-0.002924	-0.000565	-0.000001	-0.999995	356577.355793	0.056493
5	0.000001	-0.000005	0.000000	-1.000000	30718775.112378	0.000523
6	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000	21233120.704169	0.000000
7	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000	0.000000	0.000000

De acuerdo con el Algoritmo del Método de Bairstow

$$g(x) = x^2 - rx - s$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

Se realiza una división entre el polinomio original $f(x)$ y el obtenido $g(x)$ para encontrar las raíces:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5}{x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 5 \\
 x^2 + 1 \overline{) \begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \\ -x^4 - x^2 \\ \hline 2x^3 + 5x^2 - 2x + 5 \\ - 2x^3 + 2x \\ \hline 5x^2 5 \\ - 5x^2 5 \\ \hline 0 \end{array} }
 \end{array}$$

Por lo tanto, con el polinomio encontrado con la forma $x^2 - rx - s$, podemos hallar todas las raíces del polinomio. Observe lo siguiente:

$$(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 1) = 0$$

Usando la fórmula general para los polinomios anteriores a fin de encontrar las raíces, se obtiene:

Para $x^2 - 2x + 5 = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \\x &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\x_1 &= \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i \\x_2 &= \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i\end{aligned}$$

Para $x^2 + 1 = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Implica

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\x &= \frac{\sqrt{-4}}{2} \\x_3 &= \frac{2i}{2} = i \\x_4 &= \frac{-2i}{2} = -i\end{aligned}$$

Concluyendo el ejercicio, podemos observar que las raíces complejas encontradas son:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + 2i \\x_2 &= 1 - 2i \\x_3 &= i \\x_4 &= -i\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos

Método de Bisección

1. Usar el Método de Bisección para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación: $f(x) = e^{x-1} - x^3 - 2$, en $[-1,1]$, con una tolerancia de 10^{-5} utilizar 6 decimales.

Solución: $x_{17} = -1.2364252$

2. Encuentre una aproximación a $\sqrt[3]{25}$ usando el Método de Bisección, en el intervalo en $[2,3]$, con una tolerancia de 10^{-4} .

Solución: $x_{16} = 2.924057$

3. Utilice el Método de Bisección para determinar las raíz mas pequeña de $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ en el intervalo $[0,1]$

Solución: $x_{12} = 0.417725$

4. La función $f(x) = 2\text{sen}(x) - \frac{e^x}{4} - 1$ tiene dos raíces cercanas a -5 , usar el Método de Bisección para localizarlas en los intervalos $[-7, -5]$ y $[-5, -3]$ con una tolerancia de 10^{-5}

Solución: $x_{16} = -5.758820$ y $x_{16} = -3.758820$

5. Use el teorema 2 para obtener el número de iteraciones necesarias que se requieren para alcanzar un aproximación con una exactitud de 10^{-4} , a la solución de $x^3 + x - 1 = 0$, que se encuentra en el intervalo $[1,2]$, también obtenga una aproximación de la raíz con este grado de exactitud.

Solución: $n \geq 14$, $x_{14} = 1.32477$

Método de Falsa Posición

1. Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = e^{-x}(3.2\text{sen}(x) - 0.5\cos(x))$; en $[3,4]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: Raíz aproximada: 3.296593

2. La empresa "Down the Toilet Company" fabrica flotadores para cajas WC. La bola flotante tiene un radio de 0.055 cm. Se solicita encontrar la profundidad en la que la bola esta sumergida cuando flota en el agua. Sabiendo que la ecuación que da la profundidad "s" a la que la bola está sumergida es:

$$f(s) = s^3 - 0.165s^2 + 3.993s$$

Utiliza el Método de Falsa Posición para encontrar la raíz de la ecuación, para así encontrar la profundidad s a la que la bola esta sumergida. Realiza tres iteraciones utilizando 6 decimales, después compara el resultado cuando la tolerancia sea de 10^{-5} .

Solución: Raíz aproximada: 0.062390

3. Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = (x - 4)^2(x + 2)$; con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: Raíz aproximada: en el intervalo $[-2.5, -1]$; -1.999999

4. Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación, $f(x) = 2x^3 - 2x - 5$ en $[1,2]$; con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: Raíz aproximada: 1.600597

5. Usar el Método de Falsa Posición para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación del Ejemplo 2 $f(x) = 3x^2 - e^x$; en $[3,4]$, con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: Raíz aproximada: 3.733078

Método de Newton

Usar el Método de Newton para encontrar una aproximación de la raíz de la siguientes ecuaciones; con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

1. $f(x) = x^2 - 8, \quad x_0 = 3$

Solución: 2.828

2. $x^3 - 4x^2 - 11x + 30, \quad x_0 = 0$

Solución: 5

3. $x^3 - 3x - 1, x_0 = 0$

Solución: -0.347296

4. $x^3 - 2x - 5, x_0 = -5$

Solución: 2.09455

5. $\ln(x) - 1x, x_0 = 2$

Solución: 1.76

Método de la Secante

1. Usar el Método de la Secante para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación $f(x) = x^3 - x - 1$; en un intervalo de $[1,2]$ con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: 1.324718

2. Usar el Método de la Secante para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación $f(x) = x^2 - 12$; en un intervalo de $[3,4]$ con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: 3.464102

3. Usar el Método de la Secante para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación $f(x) = 10\cos(3x) - 8x$; en un intervalo de $[-1,0]$ con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: -0.732207

4. Usar el Método de la Secante para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación $f(x) = x - \cos(x)$; en un intervalo de $[0,1]$ con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: 0.739085

5. Usar el Método de la Secante para encontrar una aproximación de la raíz de la siguiente ecuación $f(x) = x^2 - 3x - 1$; en un intervalo de $[0,1]$ con una tolerancia de 10^{-5} ; utilizar 6 decimales.

Solución: -0.302776

Método de Bairstow

1. Usar el Método de Bairstow para encontrar una aproximación de las raíces de la siguiente ecuación $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$; tomando como valores iniciales $r = 0.1$ y $s = 0.1$ con una tolerancia de 0.00001%.

Solución: $x_1 = i$, $x_2 = -i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $r = 0$, $s = -1$

2. Usar el Método de Bairstow para encontrar una aproximación de las raíces de la siguiente ecuación $f(x) = x^3 - 3.7x^2 + 6.2x - 4.069$; tomando como valores iniciales $r = 0.1$ y $s = 0.1$ con una tolerancia de 0.00001%.

Solución: $x_1 = 1.18041 - 1.2826i$, $x_2 = 1.18041 + 1.2826i$, $x_3 = 1.33917$,
 $r = 2.36083$, $s = -3.03845$

3. Usar el Método de Bairstow para encontrar una aproximación de las raíces de la siguiente ecuación $f(x) = x^4 - x - 10$; tomando como valores iniciales $r = 0.1$ y $s = 0.1$ con una tolerancia de 0.00001%.

Solución: $x_1 = -1.69747$, $x_2 = 1.85558$, $x_3 = -0.0790563 - 1.78004i$,
 $x_4 = -0.0790563 + 1.78004i$, $r = 0.158113$, $s = 3.1498$

4. Usar el Método de Bairstow para encontrar una aproximación de las raíces de la siguiente ecuación $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 10$; tomando como valores iniciales $r = 1$ y $s = 1$ con una tolerancia de 0.00001%.

Solución: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1 - 2i$, $x_4 = 1 + 2i$, $r = 1$, $s = 2$

5. Usar el Método de Bairstow para encontrar una aproximación de las raíces de la siguiente ecuación $f(x) = 0.7x^3 - 4x^2 + 6.2x - 2$; tomando como valores iniciales $r = -1$ y $s = -1$ con una tolerancia de 0.00001%.

Solución: $x_1 = 0.435732$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3.27855$, $r = 2.43573$, $s = -0.871464$

Los ejercicios propuestos, fueron recuperados de Chapra (2011), Cheney (2011), Wheatley (2011), Lial (2013), Puig (1996), Gerald (2011) y Luthe (1986).

Referencias

- Burden R. L., J. D. (2017). Análisis Numérico. México: Compañía de Cengage Learning.
- Chapra, S. C. (2011). Métodos numéricos para ingenieros. México: McGraw Hill.
- Cheney, F. W. (2011). Métodos numéricos y computación. México: Cengage Learning.
- Gerald, C. F. (2011). Análisis Numérico con aplicaciones. México: Pearson Educación.
- Grossman, S. I. (2012). Algebra Lineal. México: McGraw Hill.
- Leithold, L. (1998). El cálculo con geometría analítica. México: Harla.
- Lial, L. M. (2013). Student Solutions Manual for College Algebra and Trigonometry and Precalculus. Nueva Orleans: Pearson.
- Luthe R., Olvera A., Schutz F. (1986). Métodos Numéricos. México: Limusa.
- Manterola, M. (2009). Apuntes de Análisis Numérico. -: s/e.
- Nieves, H. A. (2014) Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. México: Patria.
- Noguera M. (2001). Calculo Numérico. Barcelona: Ediciones UPC.
- Puig, E. L. R. (1996). Elementos de resolución de problemas. España: Comares.
- Sánchez V. C., (2007). Material de apoyo a la decencia, para la asignatura de Métodos Numéricos I del plan de estudios 2006, de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación. Facultad de Estudios Superiores Acatlán.
- Tucci Kay. (2008). Análisis Numérico. Mérida: ULA.
- Wheatley, G. (2001). Análisis numéricos con aplicaciones. México: Alhambra Mexicana.