



Comprensión de matrices en un contexto de ingeniería

Facultad de Estudios Superiores Aragón- - UNAM
Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIME

Carrera

Ingeniería Industrial

Autores

- Nelly Rigaud Téllez
- Roberto Blanco Bautista

Revisor técnico

- Gilberto García Santamaría González

Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

Clave del proyecto: PAPIME PE112723

Fecha

19 de mayo de 2024

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

ÍNDICE

Consideraciones para una lección integradora de Álgebra Lineal	3
Descripción de la lección	3
Justificación	3
Evaluación	4
Bases para el proceso de aprendizaje	5
Estructura de la lección	5
 Comprensión de matrices en un contexto de ingeniería	 8
Ideas introductorias	8
Referencias temáticas	9
Preámbulo	10
Definiciones	10
Lección formativa	13
 Conclusiones	 29
 Bibliografía	 29
 Agradecimientos	 30

Consideraciones para una lección integradora

Título: Comprensión de matrices

Propuesta didáctica: Actividad integradora para el aprendizaje de Álgebra Lineal

Descripción de la lección

Descripción de la lección

El diseño de lecciones de matemáticas que incorporan prácticas de evaluación formativa podría conducir a un mejor aprendizaje de esas lecciones, y también podría contribuir a apoyar a docentes en desarrollar sus propias prácticas de evaluación formativa en otras lecciones de matemáticas.

Para el documento, una lección es un soporte a la experiencia de aprendizaje que consiste en una exposición articulada y guiada de conocimientos, actividades y recursos formativos para un conjunto de subtemas de “Matrices y Determinantes” para la asignatura de Álgebra Lineal, con un alcance en la adquisición y comprensión de conceptos, en un contexto coherente y significativo al campo de ingeniería.

Justificación

La justificación de la lección se ubica en fortalecer conocimientos de estudiantes en Álgebra Lineal. Además, se considera que la evaluación formativa es esencial para un efectivo aprendizaje y enseñanza, lo cual representa un reto en asignaturas de matemáticas, cuando se trata de monitorizar el progreso del aprendizaje, con la finalidad de proporcionar retroalimentación al estudiante sobre sus logros, deficiencias y oportunidades de mejora. Consecuentemente, los estudiantes pueden concientizarse en sus errores y corregirlos.

Evaluación

Las actividades diseñadas para esta lección se soportan por literatura especializada, en la cual se pretende evidenciar cuando se percibe que se ha logrado la comprensión de un concepto. En este caso, existen varias operaciones mentales, sin embargo, destaca la de *identificación*, es decir; reflejada en que se distingue el concepto, se puede nombrar y se puede describir, sin menoscabo de otras operaciones.

En la lección, las actividades son del tipo formativo, ya que están más orientadas a clasificar y definir objetos y estructuras matemáticas, así como a identificar y analizar estructuras dentro de situaciones no rutinarias y en un contexto real.

Se presentan ejemplos que plantean situaciones que ayudan al estudiantado, a ser conscientes de sus interpretaciones intuitivas y que se refuerzan con definiciones.

Además, cuentan con actividades formativas, cuyas consignas plantean retos a un pensamiento profundo y son del siguiente tipo: (a) clasificar y definir objetos matemáticos y sus estructuras, e (b) identificar y analizar estructuras matemáticas en una situación:

Evaluaciones formativas

Recursos de apoyo: videos, formularios de Google, uso de internet, aplicación “Multiplicación de matrices”.

Nota: Destaca, que se ha generado exclusivamente para esta lección una aplicación con código propio de cuarta generación en ambiente gráfico, cuya característica formativa es que el usuario (estudiante) perciba la dimensión correcta que deben tener las matrices cuando se multiplican.

Estas evaluaciones se encuentran insertadas en distintos momentos de la lección, como una posibilidad de que su rol formativo soporte la adquisición y desarrollo de nuevos conocimientos y habilidades.

Al final de la lección aplica una evaluación orientada a conceptos de la lección y cuya rúbrica ubica al estudiante por nivel de comprensión. Además, siguiendo su rol

formativo, presenta recomendaciones de estudio para reforzar los conceptos conforme al desempeño:

Evaluación del desempeño

La evaluación se utiliza para medir la comprensión de conocimiento al final de las sesiones, la cual se refleja en las actividades de cierre, al aplicar un ejercicio de relación de columnas.

Recurso de apoyo: Formulario de Google auto evaluable

Criterios en lista de cotejo:

Precisión en la relación de conceptos

Aplicación adecuada de conceptos

Capacidad de relacionar conceptos

Bases del proceso de aprendizaje

En una situación de aprendizaje, como en una lección, se diseñan deliberadamente espacios que fomentan la adquisición de conocimientos y, especialmente, su comprensión. Este diseño debe considerar aspectos como el aprendizaje, el temario, los objetivos y el enfoque, entre otros.

En esta lección, se prioriza el estímulo del pensamiento y el procesamiento de información. Para lograr la comprensión de conceptos, se estructura la información de manera que la estructura cognitiva pueda organizarse y adquirir nuevos significados, buscando así una integración que implica también una diferenciación progresiva.

Por consiguiente, se ha adoptado una perspectiva cognitiva que promueve el razonamiento y el pensamiento crítico, con el fin de fomentar la comprensión de conceptos matemáticos. Desde una perspectiva de actividades formativas, se enfoca en el análisis y la discusión interpretaciones de ideas matemáticas, dividiendo el proceso en tres grandes etapas.

La primera, es una sección de apertura. Su objetivo es preparar al estudiante para el aprendizaje, mediante la presentación de conceptos fundamentales del tema, lo que corresponde al apartado de “**definiciones**”.

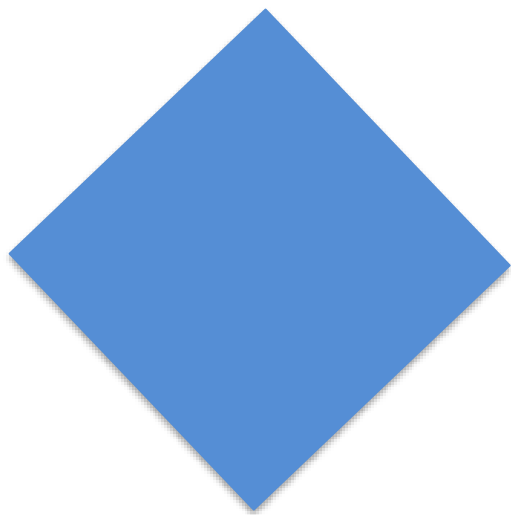
La segunda etapa, denominada, “**lección**”, presenta los contenidos y actividades formativas. Es una lección conceptual que brinda oportunidades, incluye ejemplos, y

breves actividades formativas para evaluar la comprensión de los temas de interés de Álgebra Lineal.

La tercera etapa, es la **evaluación de comprensión de conceptos**. Es una etapa que corresponde al cierre, y se pretende que el estudiante integre los conocimientos y pueda hacer una síntesis del proceso y del aprendizaje desarrollado. Asimismo, cuenta con recursos para reforzar sus conocimientos.

Estructura de la lección

- a. Ideas introductorias
- b. Referencias temáticas de la lección
- c. Justificación
- d. Definición de conceptos
- e. Lección formativa
- f. Conclusiones
- g. Referencias bibliográficas
- h. Agradecimientos



Comprensión de matrices en un contexto de Ingeniería

Ideas introductorias

¡Hola!

Te damos la más cordial bienvenida a la lección de “Comprensión de matrices en un contexto de Ingeniería”, que se sumerge en el fascinante mundo de las matrices y su aplicación práctica en la ingeniería. A lo largo de esta lección, profundizaremos en conceptos fundamentales que te proporcionarán una comprensión más sólida de este tema y cómo se traduce en aplicaciones del mundo real.

A continuación, te invitamos a enriquecer tu visión de las matrices en el mundo de ingeniería.

Para entender mejor estos conceptos, permíteme mostrarte ejemplos concretos de cómo se aplican en la ingeniería.

Ejemplo 1: Definición de una matriz y la igualdad de matrices

Imagina que eres un ingeniero eléctrico trabajando en el diseño de un circuito electrónico para un dispositivo. Necesitas representar las relaciones entre las corrientes y los voltajes en diferentes partes del circuito. Aquí es donde las matrices entran en juego. Cada fila y columna de la matriz puede representar un componente del circuito, y los números en la matriz pueden representar las relaciones entre ellos. La igualdad de matrices es esencial aquí, ya que cualquier error en la representación podría llevar a un diseño defectuoso y a problemas de seguridad.

Ejemplo 2: Propiedades de las matrices triangulares y diagonales

Ahora, supongamos que trabajas en la industria aeroespacial y estás diseñando un sistema de navegación para una aeronave. Las matrices diagonales son tus aliadas aquí. Cada componente del sistema de navegación se representa en una matriz diagonal, lo que facilita el cálculo de las interacciones entre los diferentes sistemas. Esta representación simplifica enormemente la resolución de problemas complejos de navegación y contribuye a la seguridad y eficiencia del vuelo.

Ejemplo 3: Transposición de una matriz y sus propiedades

Por último, considera un ingeniero de software que trabaja en el procesamiento de imágenes para un dron de exploración. La transposición de matrices es esencial aquí.

Cuando capturas una imagen, se almacena en una matriz donde las filas y columnas representan píxeles. La transposición te permite cambiar la orientación de la imagen, lo que es valioso para la visualización y el procesamiento de datos. Esta operación es fundamental para garantizar que la imagen se procese de manera adecuada antes de su análisis.

Estos ejemplos ilustran cómo los conceptos de matrices y sus propiedades son cruciales en diversas áreas de la ingeniería. Desde la electrónica hasta la construcción de puentes, desde la navegación aeroespacial hasta el procesamiento de imágenes, las matrices son herramientas esenciales que permiten a los ingenieros abordar problemas complejos de manera efectiva y precisa.

Gracias por acompañarnos en este recorrido a través de la comprensión de matrices y sus aplicaciones en el emocionante mundo de la ingeniería.

Referencias temáticas Ubicación de la lección integradora

Licenciatura	Ingeniería Industrial	
Referencias temáticas de la asignatura	Asignatura	Álgebra Lineal
	Ubicación curricular	Segundo semestre
	Asignatura subsecuente	Métodos Numéricos, Investigación de Operaciones I
	Asignatura antecedente	Álgebra, Geometría Analítica
<i>Referencias temáticas y competencias de los temas incluidos en la lección, conforme al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Industrial de la FES Aragón</i>	Tema	2. Matrices y determinantes
	Objetivo del tema 2	Conocer e identificar las distintas propiedades de las matrices para ser capaz de calcular el valor de las determinantes.
	Competencias por desarrollar	“El estudiantado deberá demostrar habilidades para: Conocer e identificar las distintas propiedades de las matrices para ser capaz de calcular el valor de los determinantes- El alumnado conoce, identifica y encuentra aplicación en las distintas propiedades de las matrices”.
	Subtemas incluidos	2.1 Definiciones de matriz y de igualdad de matrices 2.4 Matrices triangulares, diagonales y sus propiedades 2.5 Definición de transposición de una matriz y sus propiedades

Objetivo de la lección. Esta lección comprende actividades formativas en el nivel de COMPRENSIÓN con los siguientes objetivos:

- Explicar el concepto de una matriz y comprender la igualdad de matrices
- Distinguir propiedades de las matrices triangulares y diagonales
- Definir la transposición de una matriz y conocer sus propiedades

Preámbulo

Las matrices desempeñan un papel fundamental en el álgebra lineal, siendo herramientas esenciales para representar y resolver una diversidad de problemas en matemáticas, ciencias e ingeniería, especialmente, cuando existe una relación lineal entre al menos dos entidades. En esta lección, se profundiza en los conceptos fundamentales de las matrices y se destacan algunas de sus propiedades clave.

Para comenzar con la lección, te proporcionamos definiciones de conceptos clave, con la finalidad de que tengas los conceptos necesarios para su estudio.

Definiciones

Matriz cuadrada. Para lograr la definición de este tipo de matriz, se le llamará m al número total de renglones, y n al número total de columnas.

Si $m = n$, se habla que la matriz es cuadrada, ya que el número de renglones es igual al número de columnas.

Los elementos

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

Se llaman elementos de la **diagonal**.

Matriz transpuesta. La transposición de filas por columnas de una matriz se llaman **transposición**. Dada una matriz

$$A \text{ con elementos } a_{ij}$$

esto es, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y las columnas con índices j , esto es, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Entonces, la transpuesta de la matriz está dada por

$$A^T, \text{ con elementos } a_{ji}$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y las columnas con índices j , esto es, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Ejemplo, dada la matriz $A_{2 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Entonces, la transpuesta es una matriz de 3×2 :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Se mantiene que

$$(A^T)^T = A$$

Dada esta propiedad, se dice que la transposición es idempotente.

Matrices simétricas. Para matrices cuadradas (o sea, $m=n$), puede suceder que

$$A^T = A$$

Cuando esto llega a ocurrir, se les llama matrices simétricas. Por ejemplo, la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Observa las posiciones

$$a_{21} = a_{12} = 3$$

$$a_{31} = a_{13} = 5$$

$$a_{32} = a_{23} = 7$$

Se observa que en esta matriz simétrica de 3×3 ,

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Matrices antisimétricas: De nuevo para matrices cuadradas, sucede que

$$A^T = -A$$

A es antisimétrica. Para los elementos de la matriz, esto significa que

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa

$$a_{21} = -a_{12}$$

Vectores: Los vectores son matrices especiales. Un vector de la forma

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Es una matriz con n filas y una sola columna, esto es, una matriz $n \times 1$, y se llama **vector columna**.

En un **vector renglón**:

$$a^T = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Es una matriz con una fila y n columnas, esto es, una matriz de $1 \times n$.

Matriz cero: La matriz cero está definida como una matriz de $m \times n$ con todos los elementos $a_{ij} = 0$ para toda $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

De manera que, para la matriz cero, se escribe

$$0_{m \times n}$$

Matriz identidad: La matriz identidad es una matriz simétrica y cuadrada ($n \times n$), con la siguiente forma

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad también se conoce como *matriz unitaria*, y puede escribir como

$$I_{n \times n} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 \text{ para las demás posiciones} \end{cases}$$

Nota: el símbolo $\forall$, significa “para todo”.

Matrices triangulares y diagonales: Al respecto, existen de varios tipos.

a. **Matriz triangular superior:** es una matriz cuadrada en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal es cero.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

b. **Matriz triangular inferior:** Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

c. **Matriz diagonal:** Una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

Por ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Lección formativa

Una matriz es una disposición rectangular de números, símbolos o expresiones dispuestas en filas y columnas, cuyos componentes, todos, se encuentran interrelacionados entre sí.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

La representación bidimensional muestra m filas y n columnas. En el ejemplo, este arreglo tiene dos renglones y tres columnas, y el elemento de la matriz a_{21} , se encuentra en la segunda fila y en la primera columna.

En una generalización la matriz se ve así:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En la matriz, los elementos a_{ij} están definidos por la fila con índice i , esto es, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ y las columnas con índices j , esto es, $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Las matrices se denotan por letras romanas y **mayúsculas** (A, B, C, ...) y sus elementos por letras itálicas y **minúsculas** (a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , ...).

De manera que una matriz A de orden $m \times n$, se puede denotar,

- a) por la letra **A** diciendo su orden,
- b) $A_{m \times n}$
- c) En este formato, se definen sus elementos a_{ij} para $i = 1, 2, 3, \dots, m$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1. En la siguiente matriz, identificar los elementos a_{13} , a_{21} , a_{32} , a_{34} , a_{42}

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 35 \\ 3 & 6 & -5 & 7 \end{bmatrix}$$

Respuesta: $a_{13} = 0$, $a_{21} = 5$, $a_{32} = -1$, $a_{34} = 35$, $a_{42} = 6$

Ejemplo 2. En el caso de la aplicación de matrices en economía, se considera coeficientes de materia prima para consumo. Estos indican cuantas unidades de diferentes materiales son necesarios para producir una unidad de diferentes productos:

	PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	PRODUCTO 3
MATERIAL PRIMA 1	1	2	3
MATERIAL PRIMA 2	0	3	1

La representación matricial permite mostrarla así:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz R de orden 2×3 , tiene r componentes, tal es el caso del componente $r_{23} = 1$, que representa lo siguiente: por cada unidad del producto 3, se requiere 1 unidad de la materia prima 2. Esto también se puede expresar como el producto 3 requiere una unidad de la materia prima 2.

De este mismo ejemplo, el elemento $r_{21} = 0$, significa que el producto 1 no requiere ninguna unidad de la materia prima 2.

Igualdad de matrices: Dos matrices son iguales si tienen el mismo número de filas y columnas, y cada elemento correspondiente es igual, es decir, **A** y **B** son iguales si (**A=B**) si y solo si

$$a_{ij} = b_{ij}, \forall i \text{ y } j$$

Ejemplo 3. Es este ejemplo, observa el orden y los elementos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se nota que son iguales, porque tienen el mismo orden de 2×2 , y sus elementos uno a uno, también, son iguales, por tanto, $A=B$.

Te invitamos a consultar y resolver las siguientes actividades formativas, en donde se valorará tu capacidad de análisis para determinar el orden de matrices y para que distinguir arreglos matriciales.

Actividad formativa A. Determina el orden las matrices

¿Qué tipo de matriz es?

a. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

Respuesta: Matriz cuadrada de 3×3

b. $[1 \quad 6 \quad 3 \quad 7]$

Respuesta: Matriz renglón de 1×4

c. $\begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

Respuesta: Matriz columna de 4×1

d. $\begin{bmatrix} 1000 & 2 & a & \frac{dy}{dx} \\ 80 & a & 5 & 30 \end{bmatrix}$

Respuesta: Matriz rectangular de 2x4

e. $\begin{bmatrix} 1000 & 80 \\ 2 & a \\ 1 & 5 \\ \frac{dy}{dx} & 30 \end{bmatrix}$

Respuesta: Matriz rectangular de 4x2

Un arreglo es matricial cuando se puede determinar exactamente el número de renglones y columnas para cada uno de ellos.

De los ejemplos, también se deduce que una matriz no necesariamente debe tener un valor numérico, es simplemente una manera conveniente de representar arreglos bidimensionales, como se observa en este ejemplo, donde se aprecia que es un vector columna de orden 2x1.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \\ \sqrt{x} \end{bmatrix}$$

Suma de matrices. Dada dos matrices $m \times n$ A y B, entonces la suma de estas dos matrices es una nueva de orden $m \times n$

$$C = A + B$$

Donde la suma se genera

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Donde $i = 1, 2, \dots, m$ y $j = 1, 2, \dots, n$, considerando que la restricción es que las matrices **deberán ser del mismo orden.**

Ejemplo 4. Para la producción de productos P_1 y P_2 , la cantidad de pedidos para los clientes C_1 , C_2 y C_3 es decisiva.

Para la planificación de la producción se considera la producción de dos trimestres Q_1 y Q_2 .

	Producto 1	Producto 2	Producto 1	Producto 2
Ciente 1	1	2	2	1
Ciente 2	0	1	0	1
Ciente 3	3	2	0	2
	Q_1		Q_2	

Así la matriz B_1 se mantiene para el primer trimestre Q_1

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

En el segundo trimestre Q_2 . Se tiene

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

En este sentido, la suma total es

$$B_1 + B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior es posible tener un estimado de los requerimientos de productos para los clientes para los próximos dos trimestres.

Del ejemplo 4, surgen las leyes que aplican a la adición de matrices:

1. Ley asociativa:

$$(A + B) = A + (B + C)$$

2. Ley conmutativa

$$A + B = B + A$$

3. Linealidad de la transposición:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Multiplicación por un escalar: La definición indica lo siguiente:

Sea $k \in R$, que es un escalar real y sea una matriz A de orden $m \times n$. Entonces, la multiplicación se representa así:

$$kA = (s)(a_{ij}), \forall i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

De ahí, que las leyes que aplican a la multiplicación de una matriz por un escalar indiquen lo siguiente

1. Conmutatividad:

$$sA = As$$

2. Asociatividad:

$$(k_1)(k_2)A = (k_1)(k_2A)$$

3. Distribución con respecto a la suma de matrices

$$k(A + B) = kA + kB$$

4. Distribución con respecto a la multiplicación por un escalar

$$(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$$

Surge un tópico de gran interés en el de tema de matrices **la multiplicación de matrices.**

Multiplicación de matrices

La definición indica lo siguiente. El producto de dos matrices A y B con

$$A, a_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$B, b_{ij} \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Se define como

$$C = AB$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad k = 1, 2, 3, \dots, l$$

el índice $j = 1, 2, 3, \dots, n$ se suma

Se enfatiza en este punto que el producto de matrices solo está definido si **el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones** de la segunda matriz B. El orden de la matriz resultante C corresponde **al número de renglones de la primera matriz A y al número de columnas de la segunda matriz B.**

Entonces, el producto de estas dos matrices está dada por una matriz de 2×3 .

$$A_{2 \times 2} \quad B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

¡Los números en color rojo deben ser iguales!

En el orden de la matriz resultante, el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz B.

$$A_{2 \times 2} \quad B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

¡Es el orden de la nueva matriz, se forma con los números en color verde!

Ejemplo 5. Sean dos matrices de 2x2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La multiplicación SÍ está definida:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 * 4 + 3 * 2 & 2 * 3 + 3 * 1 \\ 4 * 4 + 3 * 2 & 4 * 3 + 3 * 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Entonces, el producto de estas dos matrices está dado por una matriz de 2 x2.

Recurso formativo

En ocasiones, las operaciones con multiplicación de matrices pueden ser complicadas, especialmente, por la necesidad de determinar la dimensión de la matriz resultante.

Para disipar tus dudas, te invitamos a acceder al siguiente recurso didáctico: Aplicación para multiplicación de matrices, así como a revisar la siguiente secuencia de imágenes para acceder al recurso.

Nota: La aplicación, al ser un programa ejecutable, genera advertencias de seguridad, pero es una aplicación que no contiene código fuente. Así que puedes descargarla sin temor.

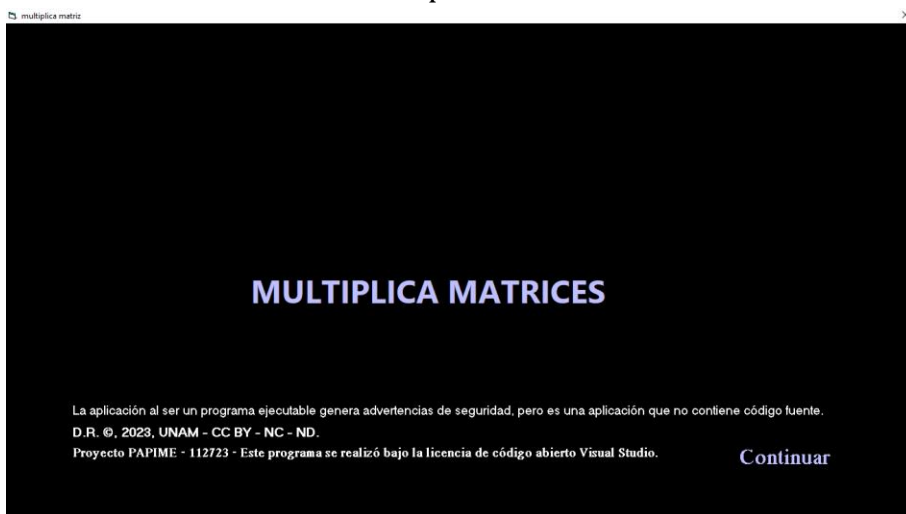
Para usar la aplicación, se presenta una secuencia de imágenes de la aplicación “Multiplica matrices” y descriptores.

Aplicación: Multiplicación de matrices

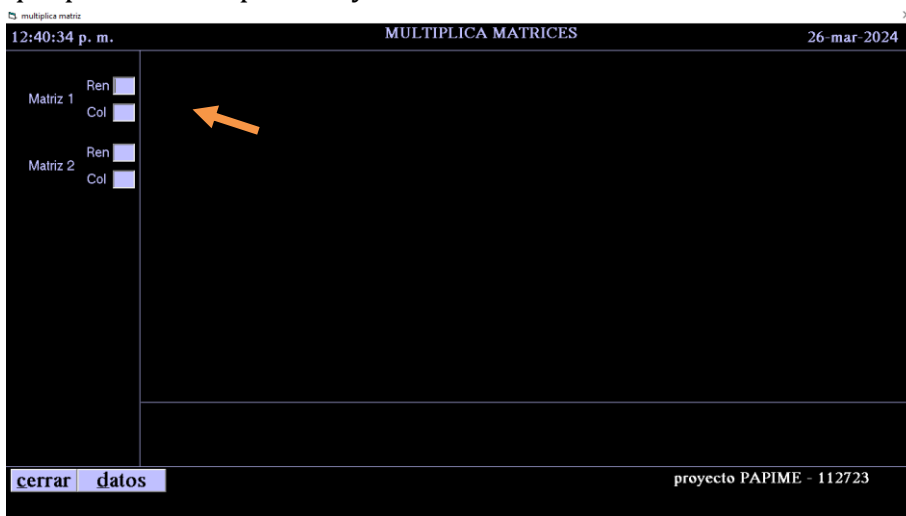
Disponible en:

<https://www.rua.unam.mx/portal/Descargas/index/88271>

Hacer clic sobre el título “multiplica matrices”.



Se debe definir el número de renglones (ren) y columnas (col) para las dos matrices que podrás multiplicar A y B.



En esta imagen se observa que las dos matrices que se desean multiplicar tienen el orden de $A_{1 \times 2}$ y $B_{2 \times 3}$. A través de pulsar el botón de “datos” se proporcionan los valores para cada elemento y según su posición a_{ij} y b_{ij} .

multiplica matriz

MULTIPLICA MATRICES

27-mar-2024

04:40:52 a. m.

Matriz 1

Ren 1

Col 2

Matriz 2

Ren 2

Col 3

cerrar

datos

proyecto PAPIME - 112723

Por ejemplo:

multiplica matriz

MULTIPLICA MATRICES

27-mar-2024

04:42:05 a. m.

Matriz 1

Ren 1

Col 2

Matriz 2

Ren 2

Col 3

a(1 , 2) = 2

cerrar

datos

proyecto PAPIME - 112723

Una vez proporcionados los valores para la matriz 1 y la matriz 2, hacer clic en “multiplica”.

multiplica matriz

04:43:14 a. m.
MULTIPLICA MATRICES
27-mar-2024

Matriz 1

Ren 1

Col 2

Matriz 2

Ren 2

Col 3

b(2 , 3) = 5

cerrar

multiplica

proyecto PAPIME - 112723

Si el orden de matrices es correcto aparecerá una leyenda como la mostrada.

multiplica matriz

04:47:11 a. m.
MULTIPLICA MATRICES
27-mar-2024

Matriz 1

Ren 1

Col 2

Matriz 2

Ren 2

Col 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

A(1 . 2) x B(2 . 3) = C(1 . 3)

Se multiplica elemento por elemento de todo el renglón 'i' de la primera matriz con elemento por elemento de toda la columna 'j' de la segunda matriz se suman y el resultado de la suma se coloca en la posición C(i . j) de la matriz resultado.

cerrar

otro

proyecto PAPIME - 112723

Definición de transposición de una matriz y sus propiedades:

a. **La transposición de una matriz:** La transposición de una matriz A se representa como A^T y se obtiene intercambiando filas por columnas. Si A es una matriz de dimensión $m \times n$, entonces A^T será una matriz de dimensiones $n \times m$.

b. **Propiedades de la transposición:**

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(kA)^T = kA^T$$

Evaluación formativa

En la siguiente actividad pondrás a prueba todos los conocimientos anteriores en un caso práctico.

La compañía ACME de deportes manufactura dos tipos de mesas de ping pong: Regulares (R) y de Lujo (L).

Cada uno de estos modelos requiere de Pernos (P), Abrazaderas (A) y Tornillos (T), como se muestra en la tabla.

Modelo	Regular	Lujo
Materiales		
P	5	3
A	2	4
T	7	10

Tomar en cuenta que la tabla se puede organizar así:

5	3
2	4
7	10

Puedes continuar la actividad formativa, accede al siguiente enlace:

i. Para producir cinco mesas de cada modelo, ¿cuántos materiales se requerirán en total?

i.
$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 10 & 20 \\ 35 & 50 \end{bmatrix}$$

ii.
$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 35 & 30 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

iii.
$$\begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ 35 & 30 \end{bmatrix}$$

ii. En el turno matutino se ensamblan seis mesas de cada modelo y en el vespertino, cinco mesas, ¿cuáles serán los requerimientos de materiales de cada turno y para el día completo?

i.
$$\begin{bmatrix} 55 & 33 \\ 22 & 44 \\ 77 & 110 \end{bmatrix}$$

ii.
$$\begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 12 & 24 \\ 42 & 60 \end{bmatrix}$$

iii.
$$\begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 10 & 25 \\ 35 & 30 \end{bmatrix}$$

iii. Juana y Jaime trabajan en ACME. Juana tienen por función el ensamble de 18 mesas regulares por día. Jaime, 16 de lujo por día. ¿Cuáles son las necesidades de pernos, abrazaderas y tornillos que satisfacen la producción de ambos trabajadores?

i.
$$\begin{bmatrix} 138 \\ 100 \\ 286 \end{bmatrix}$$

ii.
$$\begin{bmatrix} 286 \\ 138 \\ 100 \end{bmatrix}$$

iii.
$$\begin{bmatrix} 100 \\ 286 \\ 138 \end{bmatrix}$$

P- 138, A-100, T-286

P-286, A-138, T-100

P-100, A-286, T-138

Nota: P, pernos, A, abrazaderas, T, tornillos.

iv. Tomando en cuenta la producción de hoy, (18 mesas regulares y 16 de lujo), y para mañana, 10 regulares y 20 de lujo, ¿cuáles son los requerimientos totales para los dos días?

i.
$$\begin{bmatrix} 248 \\ 200 \\ 556 \end{bmatrix}$$

ii.
$$\begin{bmatrix} 180 \\ 258 \\ 420 \end{bmatrix}$$

iii.
$$\begin{bmatrix} 249 \\ 199 \\ 557 \end{bmatrix}$$

v. El costo de materiales para ensamblar una mesa es: Pernos-\$4.00 cada uno, abrazaderas-\$14.00 cada uno y tornillos \$5.00 cada uno. Encuentre el costo de producción de los dos días. (del ejercicio anterior y transponiendo como se considere)

i.
$$[6572]$$

ii.
$$[6582]$$

iii.
$$[6562]$$

vi. La empresa generó una proyección de su producción a 5 meses, de julio a noviembre, para los dos tipos de mesa de la siguiente manera:

Meses Modelo	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
Regular	100	200	300	400	300
Lujo	50	100	200	200	300

Genere un programa de requerimientos de los materiales para los 5 meses proyectados (Llene la siguiente tabla)

Nota: A continuación, se proporcionan resultados parciales. Completa la tabla.

Meses Materiales	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre
Pernos	650				
Abrazaderas		800			
Tornillos			4100		

i.

Meses Materiales	Julio	Agosto	Sept.	Oct	Nov.
Pernos	650	1300	2100	2600	2400
Abrazaderas	400	800	1400	1600	1800
Tornillos	1200	2400	4100	4800	5100

ii.

Meses Materiales	Julio	Agosto	Sept.	Oct	Nov.
Pernos	650	1200	2000	2500	2500
Abrazaderas	410	800	1500	1610	1810
Tornillos	1220	2390	4100	4750	5200

iii.

Meses Materiales	Julio	Agosto	Sept.	Oct	Nov.
Pernos	650	900	3000	1750	2530

Abrazaderas	390	800	1500	1430	1790
Tornillos	4200	1130	4100	5100	5240

Con lo anterior, las reglas que rigen a la **multiplicación entre matrices** son las siguientes:

Asociatividad:

$$(AB)C = A(BC)$$

En el caso de un **escalar s**:

$$s(AB) = (sA)B$$

Distribución:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Multiplicación por la matriz identidad

$$A I_{n \times n} = I_{n \times n} A = A$$

Nota: Tener cuidado que la matriz identidad $I_{n \times n}$, sea del mismo orden que la matriz A.

Multiplicación por la matriz cero:

$$A 0_{n \times n} = 0_{n \times n} A = 0$$

Transpuesta en la multiplicación:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Recuerda que **no hay conmutatividad entre la multiplicación de matrices**.

$$AB \neq BA$$

Nota: Recuerda que en las multiplicaciones debes verificar el orden de cada matriz.

Evaluación sumativa de comprensión de conceptos

Relaciona las dos columnas siguientes:

1	Una matriz es	Un arreglo rectangular de elementos dispuestos en renglones y columnas.
2	Dos matrices A y B son iguales si:	Son del mismo orden y además elemento a elemento son iguales.
3	La suma de dos matrices está definida si:	Son del mismo orden.
4	La matriz A es idempotente si:	$A^n = A$
5	La matriz A es nilpotente si	$A^n = 0, n \in \mathbb{Z}^+$
6	El producto de un escalar cualquiera por una matriz está definido	Siempre y en cualquier circunstancia
7	El producto de dos matrices AB está definido si:	El número de columnas de A es igual al número de renglones en B .
8	Si AB=0 , implica que:	No necesariamente A=0 o B=0
9	Una matriz elemental es aquella que:	Una matriz identidad a la cual se le haya realizado una operación elemental.
10	Una matriz A es simétrica si:	$A = A^T$
11	Una matriz A es asimétrica si:	$A = -A^T$
12	Una matriz cuadrada A es triangular superior si:	$a_{ij} = 0, \forall i < j$
13	Una matriz cuadrada A es triangular inferior si:	$a_{ij} = 0, \forall i > j$
14	La transpuesta de una matriz A está definida por:	El intercambio de renglones a columnas y viceversa
15	$(A^T)^T$ es igual a:	A
16	La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a:	La suma de las transpuestas.
17	Si k es un escalar cualquiera, $(kA)^T$ es igual a:	kA^T
18	La transpuesta del producto AB es igual a:	El producto de las transpuestas en sentido contrario.
19	Se dice que la matriz B es la inversa de A si:	$AB = BA = I$

Rúbrica

Puntaje obtenido	Nivel de comprensión	Recomendaciones
------------------	----------------------	-----------------

18-21	Bueno. Demuestra un buen dominio de conceptos relacionados con matrices y sus propiedades. Usa representaciones y determina operaciones.	1. https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra 2. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/
12-17	Intermedio. Demuestra entendimiento de conceptos relacionados con matrices y sus propiedades. Proporciona definiciones razonablemente precisas y demuestra comprensión de operaciones y sus propiedades básicas	1. https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-introduction.html 2. https://www.purplemath.com/modules/mtrxadd.htm 3. https://www.youtube.com/c/ProfessorLeonard
0-11	Bajo. Presenta una comprensión limitada de conceptos relacionados con matrices y sus propiedades. Las definiciones pueden ser vagas o inexactas, y su comprensión de operaciones y propiedades puede ser superficial. Sin embargo, se reconoce que ha participado en la evaluación.	1. https://www.mathplanet.com/education/algebra-2/matrices

Conclusiones

Esta lección ha abordado de manera integral los conceptos fundamentales asociados a las matrices, abarcando desde su definición hasta aspectos avanzados como la igualdad entre matrices, las propiedades de las matrices triangulares y diagonales, así como las matrices simétricas y la transposición. La comprensión de estos fundamentos resulta esencial para desenvolverse con solidez en el ámbito del álgebra lineal, proporcionando las bases necesarias para el análisis y la manipulación efectiva de matrices en diversos contextos matemáticos y aplicaciones prácticas en disciplinas como la ciencia y la ingeniería.

Bibliografía

Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia. Un enfoque del mundo real*. McGraw-Hill.

Blanco Bautista, R. y Rigaud Téllez, N. (2024). Multiplicación de matrices (Versión 1.1). [Software], bajo licencia de código abierto Visual Studio.

Bombelli, E. C. y Barberis, J. G. (2012). Importancia de la evaluación diagnóstica en asignaturas de nivel superior con conocimiento preuniversitario. *Revista Electrónica Gestión de las personas y Tecnología*, 5(13), 34-41.

Ceja Mena, L.I. (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I* (1ª Ed.). Instituto Politécnico Nacional.

Díaz-Barriga, A. (2008). *Temas de debate de la innovación educativa*. CESUE, UNAM.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Mc-Graw Hill.

Dorier, L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (págs.. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

Garcia, S. R., y Horn, R. A. (2023). *Matrix Mathematics: A Second Course in Linear Algebra*. Cambridge University Press.

Golovina, L.I. (1976). *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.

Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Holey, T. y Wiedemann A. Narcea. (2023). *Analysis and Linear Algebra*. Springer.

Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-20.
<https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.

Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.

Agradecimientos

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

Derechos de autor

“Comprensión de matrices en un contexto de ingeniería”, Nelly Rigaud Téllez y Roberto Blanco Bautista, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es> , (CC-BY-NC-ND).