



# Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversas

Facultad de Estudios Superiores Aragón- UNAM  
Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIIME

## Carrera

Ingeniería Industrial

## Autores

- Nelly Rigaud Téllez
- Roberto Blanco Bautista

## Revisor técnico

- Gilberto García Santamaría González

## Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

**Clave del proyecto:** PAPIME PE112723

## Fecha

19 de mayo de 2024

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

# ÍNDICE

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Consideraciones para una lección integradora de Álgebra Lineal                  | 3  |
| Descripción de la lección                                                       | 3  |
| Justificación                                                                   | 4  |
| Evaluación                                                                      | 4  |
| Bases para el proceso de aprendizaje                                            | 5  |
| Estructura de la lección                                                        | 5  |
| Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversa | 6  |
| Ideas introductorias                                                            | 6  |
| Referencias temáticas                                                           | 8  |
| Preámbulo                                                                       | 9  |
| Definiciones                                                                    | 10 |
| Lección formativa                                                               | 14 |
| Conclusiones                                                                    | 32 |
| Anexo                                                                           | 33 |
| Bibliografía                                                                    | 34 |
| Agradecimientos                                                                 | 35 |

## Consideraciones para una lección integradora

### Título: Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversas

Propuesta didáctica: Actividad integradora para el aprendizaje de Álgebra Lineal

### Descripción de la lección

La elaboración de lecciones de matemáticas que integren prácticas de evaluación formativa, potencia el aprendizaje en dichas lecciones, también brinda un respaldo valioso para desarrollar propias estrategias de evaluación formativa en otras instancias matemáticas.

Aquí, se concibe que una lección es un componente esencial de la experiencia de aprendizaje. Se trata de una presentación estructurada y dirigida de conocimientos, actividades y recursos formativos diseñados para abordar un conjunto de subtemas de 'Matrices y Determinantes', específicamente, para el curso de Álgebra Lineal en la FES Aragón-UNAM. El objetivo principal es facilitar la adquisición y comprensión de conceptos en un contexto coherente y significativo para el campo de la ingeniería.

Esta lección representa el resultado de la identificación y establecimiento de un conjunto específico de actividades de aprendizaje. Su estructura proporciona herramientas para evaluar y mejorar la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas complejos y no rutinarios, extendiéndose hacia la formulación y abordaje de problemas del mundo real (Díaz Barriga, 2008; Schoenfeld, 1985).

## Justificación

---

El aprendizaje de Álgebra Lineal se reconoce en la literatura como difícil, de acuerdo con Dorier (2001), los estudiantes se ven abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con conocimientos previos, y por ello, suelen confiar en estrategias superficiales para encontrar soluciones a problemas. En forma simultánea, los docentes suelen sentirse frustrados por la falta de práctica en lógica básica y teoría de conjuntos, o la imposibilidad de que alumnos utilicen la intuición geométrica para abordar temas de esta asignatura.

En este sentido, la presente lección se ha construido bajo una perspectiva formativa, con apoyo de monitoreo al estudiantado sobre sus logros, deficiencias y oportunidades de mejora. Consecuentemente, los estudiantes pueden concientizarse en sus errores y corregirlos.

## Evaluación

---

Para la presente lección, el interés se centra en las evaluaciones formativa y sumativa.

Las evaluaciones formativas están desarrolladas a lo largo de la lección y su orientación se encuentra en el proceso de aprendizaje para mejorar algunos atributos, particularmente, los asociados a la comprensión de conceptos.

Por ello, en el desarrollo de la lección, se presentan módulos. El primero, está referido a la comprensión de transformaciones elementales, el segundo, sobre la definición y propiedades de la inversa de una matriz, y el tercero, el cálculo de la matriz inversa por transformaciones elementales.

La evaluación sumativa, usualmente caracterizada por un examen cerrado, se aplica al final del proceso de aprendizaje y evalúa el aprendizaje del estudiante versus algún estándar, es decir, lo indicado en el plan de estudios.

## Bases del proceso de aprendizaje

En la literatura académica, se ha empleado la perspectiva cognitiva, la cual promueve el razonamiento y el pensamiento crítico. Esto se lleva a cabo mediante actividades formativas diseñadas para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos, organizadas en tres etapas principales.

La primera etapa, conocida como la sección de apertura, tiene como objetivo preparar al estudiante para el proceso de aprendizaje. Aquí se presentan los conceptos fundamentales del tema en cuestión, en el apartado “definiciones”.

La segunda etapa, corresponde en sí, a la lección, en donde se encuentran contenidos y actividades formativas. Se trata de una lección conceptual que ofrece oportunidades de aprendizaje, incluyendo ejemplos prácticos y actividades para la comprensión de temas de la asignatura de Álgebra Lineal, los cuales están organizados por módulos: Concepto de transformaciones elementales, definición y propiedades de la inversa de una matriz y cálculo de la matriz inversa por transformaciones elementales

Finalmente, la tercera etapa comprende la evaluación sumativa de conceptos, que sirve como cierre del proceso. El objetivo es integrar los conocimientos adquiridos y realizar una síntesis del proceso de aprendizaje. Además, proporciona recursos adicionales para reforzar los conocimientos adquirido.

## Estructura de la lección

- a. Ideas introductorias
- b. Referencias temáticas de la lección
- c. Preámbulo
- d. Definiciones
- e. Lección formativa
- f. Conclusiones
- g. Bibliografía
- h. Agradecimientos

## Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversas

### Ideas introductorias

¡Hola!

Te damos la más cordial bienvenida a la lección de “Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversas”, que se sumerge en el fascinante mundo de las matrices y su aplicación práctica en la ingeniería. A lo largo de esta lección, profundizaremos en conceptos fundamentales que te proporcionarán una comprensión más sólida de este tema y cómo se traduce en aplicaciones del mundo real.

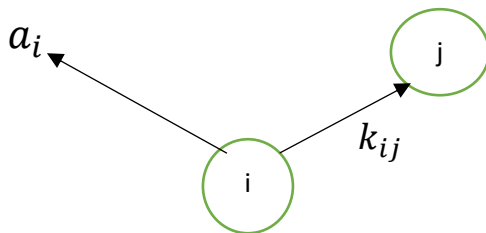
A continuación, te presentamos una visión sobre las matrices en el mundo de ingeniería.

**Interdependencia en la producción-** En procesos complejos de producción, por ejemplo, en la industria química, surge el problema de que, por un lado, se llevan al mercado productos intermedios, y por el otro, se utilizan también, como producto para su posterior procesamiento, en el seno de la industria, un proceso de producción.

Este entrelazamiento de productos a lo largo de varias etapas de producción se representa a menudo con un grafo llamado de Gozinto.

En este tipo de grafo se considera a dos nodos de producción  $i$  y  $j$ , a partir de los cuales, se producen las cantidades  $x_i$  y  $x_j$ .

El tamaño  $a_i$  especifica la cantidad del producto que se entrega. El coeficiente  $k_{ij}$  especifica cuántas unidades del producto  $i$  se requieren para producir una unidad del producto  $j$ .



Para los cálculos de  $x_i$ , entonces, aplica,

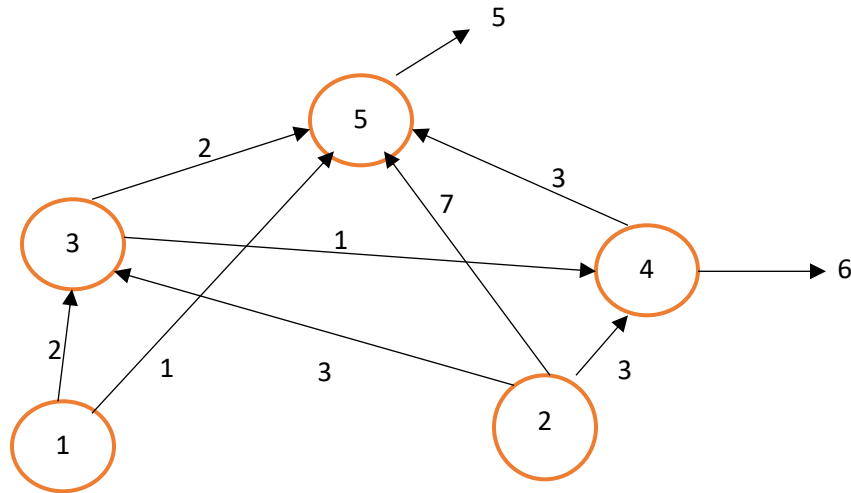
$$x_i = a_i + \sum_j k_{ij} x_j$$

Dadas las entregas  $a_i$  y los coeficientes de entrelazamiento  $k_{ij}$ , el vector de cantidades de producción

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Da como resultado un sistema de ecuaciones lineales.

Un ejemplo de esto lo describe el siguiente grafo de Gozinto, una representación simbólica, en donde cada nodo representa una variable  $x_i$ , las cuales están relacionadas por flechas o aristas que tienen un sentido y una magnitud.



Este entrelazamiento se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_1 = 2x_3 + x_5$$

$$x_2 = 3x_3 + 3x_4 + 7x_5$$

$$x_3 = x_4 + 2x_5$$

$$x_4 = 3x_5 + 6$$

$$x_5 = 5$$

En este caso, debido a que se cuenta con

$$x_5 = 5$$

La solución del sistema será de fácil obtención:

$$x_5 = 5$$

$$x_4 = 3(5) + 6 = 21$$

$$x_3 = 21 + 2(5) = 31$$

$$x_2 = 3(31) + (3)(21) + (7)(5) = 191$$

$$x_1 = (2)(31) + 5 = 67$$

El reto sería, ¿Podrías representar este grafo en forma de tabla?

## Referencias temáticas

### Ubicación de la lección integradora

| Licenciatura                                                                                                                                                           | Ingeniería Industrial        |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Referencias temáticas de la asignatura                                                                                                                                 | Asignatura                   | Álgebra Lineal                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                                                                                                                                                        | Ubicación curricular         | Segundo semestre                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|                                                                                                                                                                        | Asignatura subsecuente       | Métodos Numéricos, Investigación de Operaciones I                                                                                                                                                                                                                                  |
|                                                                                                                                                                        | Asignatura antecedente       | Álgebra, Geometría Analítica                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <i>Referencias temáticas y competencias de los temas incluidos en la lección, conforme al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Industrial de la FES Aragón</i> | Tema                         | Matrices y determinantes                                                                                                                                                                                                                                                           |
|                                                                                                                                                                        | Objetivo del tema 2          | Conocer e identificar las distintas propiedades de las matrices para ser capaz de calcular el valor de las determinantes.                                                                                                                                                          |
|                                                                                                                                                                        | Competencias por desarrollar | “El estudiantado deberá demostrar habilidades para: Conocer e identificar las distintas propiedades de las matrices para ser capaz de calcular el valor de los determinantes- El alumnado conoce, identifica y encuentra aplicación en las distintas propiedades de las matrices”. |
|                                                                                                                                                                        | Subtemas incluidos           | 2.2 Concepto de transformaciones elementales<br>2.2.1 Definición y propiedades de la inversa de una matriz<br>2.2.2 Cálculo de la matriz inversa por transformaciones elementales<br>2.3 Concepto de ecuación matricial y su solución                                              |

**Objetivo de la lección.** Esta lección comprende actividades formativas en el nivel de COMPRENSIÓN y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS con los siguientes objetivos:

Interpretar las transformaciones elementales aplicadas a matrices inversas  
Aplicar transformaciones elementales para resolver sistemas lineales

## Preámbulo

---

Una matriz es un conjunto de objetos relacionados y ordenados en filas y columnas, y un tipo particular de matrices, son las **invertibles** que, al mismo tiempo son **cuadradas**.

Para que este tipo de matrices sean invertibles, su determinante deberá ser **distinto de cero**, además, el producto de la matriz original por su inversa deberá generar una matriz identidad del mismo orden  $n \times n$ .

Una matriz inversa es una herramienta importante en el mundo ingenieril. Se utilizan en distintos ámbitos, tales, como para cifrar y descifrar códigos de mensajes. También se utilizan para medir la potencia de salida de una batería.

En términos de modelación matemática, una aplicación fundamental ocurre en el análisis estructural, donde se utilizan ampliamente: El análisis de una estructura en equilibrio implica escribir muchas ecuaciones con muchas incógnitas. A menudo estas ecuaciones son lineales, incluso cuando se considera la deformación del material, es decir, la flexión.

En el análisis estructural se usan las matrices de rigidez y de flexibilidad. La matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad y viceversa, siempre que en ambas ecuaciones se esté considerando el mismo conjunto de acciones y desplazamientos.

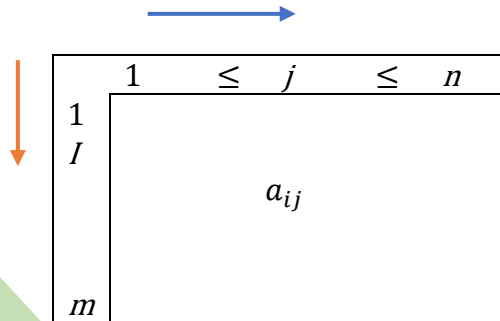
Una vez que esta generado el modelo, este se puede resolver con, ... ¡sí! Con un método directo para sistemas lineales llamado “**método por inversa de una matriz**”.

---

## Definiciones

**Matriz.** Es un conjunto de elementos que pueden ser números dispuestos en filas y columnas para formar una matriz rectangular.

Se puede decir que una matriz es una estructura. En una matriz de  $m \times n$ , implica que se tienen  $m$  renglones y  $n$  columnas:



El elemento  $a_{ij}$  es un número, ubicado en una fila  $i$  – ésima y en una columna  $j$  – ésima.

De esta forma, una matriz  $A$  contiene  $n$  **columnas**, ordenadas de una a una, y de izquierda a derecha  $\rightarrow$ . Cada columna contiene  $m$  elementos que están ordenados, en **filas o renglones**, de arriba hacia abajo  $\downarrow$ .

Se puede deducir que una matriz  $A$ , es de hecho un vector de  $n$  *dimensiones*, ubicadas en las columnas, cuyos recursos “ $m$ ”, se encuentran en las filas.

Los elementos de la matriz también se llaman **entradas**. Sus aplicaciones son muy amplias en ingeniería, física, economía y estadística, así como en diversas ramas de las matemáticas.

Las matrices también tienen aplicaciones importantes en gráficos por computadora, donde se han utilizado para representar rotaciones y otras transformaciones de imágenes.

**Inversa de una matriz.** El inverso multiplicativo de elementos tiene la propiedad de

$$(n) \left( \frac{1}{n} \right) = 1$$

Que es lo mismo que

$$(n)(n^{-1}) = 1$$

Así que el producto de un elemento  $n$  por su elemento inverso  $a^{-1}$ , lleva al elemento neutro de la multiplicación que tiene la propiedad:

$$(n)(1) = (1)(n) = n$$

Para el caso de matrices en multiplicación, un elemento neutro corresponde a la denominada **matriz identidad**.

De manera que,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n \times n}$$

Donde  $I_{n \times n}$ , representa a una matriz identidad.

Con lo anterior, se observa cómo el inverso de un número distinto de cero genera un increíble y poderoso uno.

En notación matricial, el uno, se llama matriz identidad, y dependerá del orden con el que se desee emplear,  $I_{n \times n}$ .

Ejemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Estas dos matrices cumplen la condición de que, si se multiplican, el producto es una matriz unitaria:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}$$

Las reglas que rigen a la inversa de una matriz son las siguientes:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Matriz cuadrada.** Para lograr la definición de este tipo de matriz, se le llamará  $m$  al número total de renglones, y  $n$  al número total de columnas.

Si  $m = n$ , se habla que la matriz es cuadrada, ya que el número de renglones es igual al número de columnas.

Asimismo, se observa que, en la diagonal de una matriz cuadrada, puede denotarse por los elementos:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$$

Se llaman elementos de la diagonal.

**Matriz transpuesta.** La transposición de filas por columnas de una matriz se llaman **transposición**. Dada una matriz:

$$A \text{ con elementos } a_{ij}$$

esto es,  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y las columnas con índices  $j$ , esto es,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Entonces, la transpuesta de la matriz está dada por:

$$A^T, \text{ con elementos } a_{ji}$$

donde  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  y las columnas con índices  $j$ , esto es,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Ejemplo 2. Dada la matriz  $A_{2 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Entonces, la transpuesta es una matriz de  $3 \times 2$ :

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Y se mantiene que

$$(A^T)^T = A$$

Dada esta propiedad, se dice que la transposición es idempotente.

**Funciones trigonométricas.** Algunas identidades trigonométricas más comúnmente usadas que se derivan del Teorema de Pitágoras son:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

**Matriz identidad:** La matriz identidad es una matriz simétrica y cuadrada ( $n \times n$ ), con la siguiente forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz identidad también se conoce como *matriz unitaria*, y puede escribir como

$$I_{n \times n} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 \text{ para las demás posiciones} \end{cases}$$

Nota: el símbolo  $\forall$ , significa “para todo”.

**Determinante.** Para una matriz de  $2 \times 2$ , el determinante de una matriz cuadrada es una función, cuyo dominio es el conjunto de matrices cuadradas  $n \times n$ , y su imagen, los números reales; esto es,  $\det A_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Operaciones comunes entre los determinantes ocurren para matrices de  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$ :

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es una matriz de  $2 \times 2$  y su determinante está dado por:

$$\det A = ad - bc$$

Si  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ , el determinante requiere de un mayor número de operaciones:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

## Lección formativa

### Módulo 1. Concepto de transformaciones elementales

Para este apartado, se trabajará sobre la interpretación de transformaciones elementales aplicadas a matrices inversas, a través de

**Deducción** a transformaciones elementales

**Notación** de operaciones elementales

**Análisis** de ejemplos ilustrativos de transformaciones elementales

**Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 1**

Como se mostró en la sección de **definiciones**, en una matriz identidad se pueden realizar diferentes operaciones elementales, donde solo exista una única operación.

Por ejemplo, en una matriz identidad de 3x3,

$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , algunas operaciones se presentan a continuación:

| Ejemplo 4. Presentación de matrices elementales                         | Análisis                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | Se observa que en la matriz elemental Q, se <b>sustituyó</b> de la diagonal principal al elemento 1, por un escalar distinto de cero, q. |
| $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | Se observa que en la matriz elemental R, se realizó una operación en la que se <b>intercambió</b> el primero por el segundo renglón.     |
| $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | Se observa que en la matriz S, se <b>sustituyó</b> del segundo renglón, a un elemento cero, por un escalar s.                            |

Estas operaciones elementales implican que de la matriz identidad, se ha reemplazado el  $i$  –ésimo elemento de la diagonal principal, por un escalar distinto de cero, lo que se observa en la matriz Q.

También se observa de R que se han intercambiado renglones en la matriz identidad.

Finalmente, se reemplaza un elemento cero de la matriz identidad por un escalar distinto de cero, como ocurre con la matriz S.

### Evaluación formativa- Concepto de transformaciones elementales (a)

Tomando en cuenta que en una **matriz elemental solo se realiza una única operación elemental**, indicar (a) si los siguientes ejemplos corresponden a matrices elementales, por ejemplo,

| Matriz                                          | ¿Elemental o no elemental? | Retroalimentación                                                                       |
|-------------------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ | ( x ) Si      ( ) No       | Es una matriz elemental porque en su elemento $a_{21}$ , se ha reemplazado el 0 por -3. |

| Matriz                                                         | ¿Elemental o no elemental? | Retroalimentación                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a.<br>$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$           | ( ) Si      ( x ) No       | No es una matriz elemental, porque han ocurrido dos operaciones elementales en forma simultánea, hay un intercambio de renglones, además, se ha reemplazado un elemento cero, por un número tres. |
| b.<br>$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$           | ( x ) Si      ( ) No       | Es una matriz elemental porque se han intercambiado renglones.                                                                                                                                    |
| c.<br>$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$           | ( x ) Si      ( ) No       | Es una matriz elemental porque se ha reemplazado de la diagonal principal un escalar 2, por un uno.                                                                                               |
| d.<br>$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ | ( ) Si      ( x ) No       | No es una matriz elemental porque se han realizado dos operaciones sobre la diagonal principal.                                                                                                   |
| e.<br>$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$           | ( ) Si      ( x ) No       | No es una matriz elemental porque hay varias operaciones elementales realizadas sobre la matriz.                                                                                                  |

Este tipo de matrices son útiles, ya que de ellas se pueden deducir transformaciones u operaciones elementales en una matriz. Si A es una matriz de 3x3:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

y se realiza la multiplicación con alguna de las matrices elementales, se observarán productos de llamar la atención.

| Realización de operaciones                                                                                                                 | Producto                                                                           | Análisis                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $QA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} a & b & c \\ qd & qe & qf \\ g & h & i \end{bmatrix}$             | La multiplicación por un escalar en un renglón determinado se refleja en el producto en ese mismo renglón.                                  |
| $RA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$                | El intercambio de renglones se refleja también en el producto de la multiplicación.                                                         |
| $SA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d + sg & e + sh & f + si \\ g & h & i \end{bmatrix}$ | Reemplazar un cero por s en un renglón, se manifiesta con la suma de los elementos de ese renglón más los correspondientes de otro renglón. |

Con lo anterior, se definen transformaciones elementales sobre renglones de una matriz.

Las transformaciones elementales son operaciones que normalmente se aplican a las filas de una matriz para simplificarla o llevarla a una forma específica. Las tres principales transformaciones elementales son:

- Intercambio de filas:** cambia la posición de dos filas en una matriz.
- Multiplicación de una fila por una constante no nula:** se multiplica una fila completa por una constante diferente de cero.

c. **Suma de un múltiplo de una fila a otra fila:** se multiplica una fila por una constante y se suma a otra fila.

Nota: Las transformaciones elementales se llevaron a cabo en renglones, pero también se pueden ejecutar sobre columnas, y se les llamará operaciones elementales sobre columnas. En el anexo uno, te presentamos su deducción

Sobre la notación de operaciones elementales, te podrás encontrar diferentes alternativas para describir en forma sintética a estas operaciones sobre renglones:

| Descripción de operación                                                             | Notación                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Intercambio de filas o Renglones (R): cambia la posición de dos filas en una matriz. | $R_i \leftrightarrow R_{i*}$ |
| Multiplicación de una fila por una constante no nula                                 | $sR_i$                       |
| Suma de un múltiplo de una fila a otra fila, que se refleja en $R_{i*}$              | $sR_i + R_{i*}$              |

Una aplicación directa de las matrices elementales se encuentra en la simplificación de sistemas de ecuaciones lineales.

Aunque, no es alcance de esta lección mostrar un procedimiento de eliminación, si es posible observar en forma directa cómo se emplean las tres operaciones elementales en forma simultánea:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} - 5R_1 + R_3$$

Lo que da lugar a

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Se observa que, en la primera columna es de tipo unitaria.

Otra operación elemental sobre el segundo renglón es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2} R_2$$

Lo que genera:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Si se aplica la operación  $-10R_2 + R_3$ . Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}$$

Se podría aplicar la operación de multiplicar el escalar  $\frac{1}{30}$  al renglón 3. Eventualmente, se pueden seguir aplicando operaciones elementales que podrían simplificar la matriz original a lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, ¿Qué se puede decir?

### Evaluación formativa- Concepto de transformaciones elementales (b)

Encuentra la operación elemental por renglón que permite (a) transformar la primera matriz en la segunda y (b) encontrar la operación inversa que transforma la segunda matriz en la primera.

|                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1.</p> $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ <p>Las operaciones elementales son:</p> $R_1 \leftrightarrow R_2$ $R_2 \leftrightarrow R_1$ | <p>2.</p> $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$ <p>Las operaciones elementales son:</p> $-\frac{1}{2}R_2$ $-2R_2$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>3.</p> $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$ <p>Las operaciones elementales son:</p> $-4R_1 + R_3$ $4R_1 + R_3$ | <p>4.</p> $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ <p>Las operaciones elementales son:</p> $-3R_2 + R_3$ $3R_2 + R_3$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Se puede concluir de manera preliminar que cada operación elemental por renglones es reversible.

## Módulo 2. Definición y propiedades de la inversa de una matriz

Para este apartado, se interpretan y aplican transformaciones lineales para resolver matrices inversas mediante lo siguiente:

**Defina** el concepto de inversa de una matriz

**Presenten propiedades** de las matrices inversas

Se realicen **ejemplos** de cálculo de la matriz inversa

Se presenta la **evaluación formativa** con orientación al aprovechamiento

¿Alguna vez has cometido un error, perdiste tu turno o te pasaste de una estación del metro? A veces en la vida necesitamos rehacer, revertir, dar un giro o tener una oportunidad de deshacer algo.

En matemáticas, se le llama inversa: La suma es la operación inversa de la resta, la multiplicación es la operación inversa de la división, la raíz cuadrada es la operación inversa del cuadrado de un número, y ..., una matriz inversa  $A^{-1}$  es la operación inversa de una matriz  $A$ .

Una matriz inversa se denota de la siguiente forma  $A^{-1}$  y permite resolver y manipular sistemas de ecuaciones lineales.

Es similar a la forma en que se usa el recíproco y el inverso multiplicativo de un número distinto de cero:

¿Por qué necesitamos de las matrices inversas?, ¿Por qué nos deben de importar?, ¿cuál es su punto?

Porque como **no existe la división de matrices**, se requiere de algún mecanismo, y la única herramienta que se puede usar es la inversa.

Ejemplo 5. ¿Cuál es la inversa de 5?  $\frac{1}{5}$

¿Cuál es la inversa de 10?  $\frac{1}{10}$

¿Cuál es la inversa de "a"?  $\frac{1}{a}$

¿Cuál es la inversa de  $\frac{1}{1000}$ ? 1000

Ahora, al determinar la multiplicación de lo siguiente, ¿qué sucede?

$$\begin{aligned}(5)\left(\frac{1}{5}\right) &= 1 \\ (10)\left(\frac{1}{10}\right) &= 1 \\ (a)\left(\frac{1}{a}\right) &= 1 \\ \left(\frac{1}{1000}\right)(1000) &= 1\end{aligned}$$

Pero, y en el caso de las matrices

$$(A^{-1})(A) = ?$$

Es la **matriz identidad**:

$$(A^{-1})(A) = I_{n \times n}$$

Entonces, el inverso multiplicativo de elementos tiene la propiedad de

$$(a)\left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

Que es lo mismo que

$$(a)(a^{-1}) = 1$$

Así que el producto de un elemento  $a$  con su elemento inverso  $a^{-1}$ , lleva al elemento neutro de la multiplicación que tiene la propiedad

$$(a)(1) = (1)(a) = a$$

Para el caso de matrices, requerirá obligadamente que estas sean cuadradas

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_{n \times n}$$

**Una matriz que no es invertible se le suele llamar matriz singular, y una matriz invertible se le llama matriz no singular.**

Se denota que la matriz inversa de  $A$ , es  $A^{-1}$ , de donde  $I_{n \times n}$ , representa a una matriz identidad.

Ejemplo 6. Se tienen las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Estas dos matrices cumplen la condición de:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}$$

Pero también;

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}$$

También es importante denotar que una  $A_{n \times n}$  que tiene inversa, también se le llama *invertibles*. Se presentan las **propiedades** que rigen a la inversa de una matriz son las siguientes:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

De aquí surgen teoremas, como el Teorema de la Unicidad:

**“Si B y C son matrices inversas de la matriz A, entonces B=C”**

Nota que para obtener la inversa de una matriz de 2x2, se pueden utilizar determinantes:

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si

$$ad - bc \neq 0$$

Entonces, A es invertible y

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Esta alternativa para obtener la inversa de una matriz, se le llama método del *Inverso multiplicativo*. Sin embargo, cuando se aumenta el orden de las matrices, los cálculos verdaderamente se complican. Aquí se procede a trabajar con matrices de 2x2 para que se vea cómo funciona este.

Para la obtención de la inversa, se considera la estructura de una matriz A.

Ejemplo 7. Observa la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El determinante es:

$$\det A = ad - bc$$

$$\det A = (0)(2) - (-1)(-3)$$

$$\det A = -3$$

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

El nombre del método indica la comprobación:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo cual cumple con la definición de una matriz inversa.

Ejemplo 8. Si  $A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , entonces, ¿cuál es su inversa  $A^{-1}$ ?

Recuerda que para la matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  con  $A \neq 0$  su inverso multiplicativo esta dado por

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right) \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde  $\det A = ad - bc$

En este caso, se tiene

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)(1) - (b)(0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Comprobar que  $AA^{-1} = I$ , para la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Revisa en la sección de definiciones, ya se para algunos ejercicios se requerirá de funciones trigonométricas.

Solución:

$$\det A = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\det A = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$A^{-1} = \cos^2 \theta \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\cos^2 \theta \tan \theta \\ \cos^2 \theta \tan \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \\ -\tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\cos^2 \theta \tan \theta \\ \cos^2 \theta \tan \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta & -\cos^2 \theta \tan \theta + \tan \theta \cos^2 \theta \\ -\tan \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \tan \theta & \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que,

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Evaluación formativa- Definición y propiedades de la inversa de una matriz

Ejercicio de evaluación formativa, con orientación a una evaluación de aprovechamiento.

Lee con atención cada ejercicio y contesta correctamente.

1. Si  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$  y  $A^{-1} + (A^T)^T = X$ , entonces la matriz X es

a.  $6I = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

b.  $10I = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

c. 0

d.  $3I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

#### Retroalimentación:

Recuerda que para una matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  con  $\det A \neq 0$ , su inverso multiplicativo esta dado por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Donde  $\det A \neq 0$ , así  $A = ad - bc$

En este caso,

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ , así se tiene que

$$\begin{aligned}\det A &= (2)(8) - (3)(5) \\ &= 16 - 15 \\ &= 1\end{aligned}$$

De aquí que,  $\det A \neq 0$ , así que  $A^{-1}$  existe y está dado por

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, recuerda que para una matriz  $A$  y su transpuesta  $A^T$ , al convertir las columnas de  $A$  en renglones, y la transpuesta de la transpuesta es la misma  $A$ , se tiene

$$\begin{aligned}X &= A^{-1} + (A^T)^T \\ &= A^{-1} + A \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \\ &= 10I\end{aligned}$$

2. ¿Cuál es el resultado  $\begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}^{-1}$ ?

- a.  $\text{sen}\theta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix}$
- b.  $\cos\theta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix}$
- c.  $\text{sen}\theta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix}$
- d.  $\cos\theta \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix}$

Retroalimentación:

La inversa de una matriz de 2x2 está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

De ahí que,

$$\begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ -1 & \tan\theta \end{bmatrix}$$

De funciones trigonométricas:

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}^{-1} = \cos^2 \theta \begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ -1 & \tan\theta \end{bmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{bmatrix} \sen\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sen\theta \end{bmatrix}$$

Otros ejercicios:

3. Si  $A = \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , entonces  $A^{-1}$  es

- a. I
- b. 0
- c. A
- d.  $A^T$

La respuesta es c.

4. Si  $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$  y  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 10 & 4 \end{bmatrix}$ , donde  $x > 0$ , entonces,  $x =$

- a. 10
- b. 25
- c. 5
- d. 8

La respuesta es c.

5. Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas tales que  $|A| \neq 0$ ,  $|B| \neq 0$ , y  $-B = -A^{-1}BA$ , entonces,  $(A - B)^2$  es:

- a.  $A^2 - B^2$
- b.  $A + B$
- c.  $A^2 + B^2$
- d. 0

La respuesta correcta es c.

No todas las matrices son invertibles, y el orden importa.

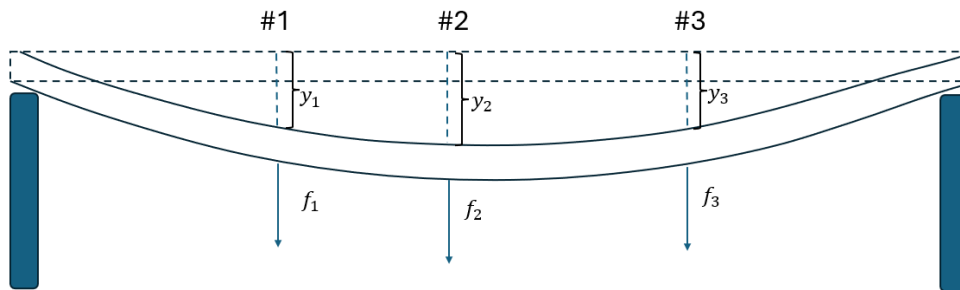
Las matrices no singulares tienen inversa y las matrices singulares no pueden invertirse.

### Módulo 3. Cálculo de la matriz inversa por transformaciones elementales

Describe cómo se puede calcular la **matriz inversa mediante transformaciones elementales**

Detalla **ejemplos y pruebas** de este proceso

Ejemplo 11. Una viga elástica horizontal está soportada en cada extremo y está sujeta a fuerzas en los puntos 1, 2 y 3. Sea  $f$ , una lista de las fuerzas en estos puntos, y sea  $y$ , una lista de cantidades de deflexión (es decir, movimiento) de la viga en tres puntos.



La Ley de Hooke puede ser mostrada así:

$$y = Df$$

Donde  $D$  es una matriz de flexibilidad. Su inversa se le llama matriz de rigidez.

Si  $D$  es una matriz, sus columnas indican las deflexiones de la viga debido a la fuerza, entonces la primera columna de  $D$  enumera las deflexiones de la viga debidas a una fuerza unitaria en el punto 1, y de manera similar, ocurre en las columnas 2 y 3.

Para estudiar la rigidez se requiere de obtener la inversa y un método comúnmente empleado, es a través de un algoritmo que aumenta una matriz, junto a una matriz identidad  $[A, I]$ .

El objetivo que se pretende de esa matriz aumentada es reducir filas de manera que se logre una transformación del siguiente tipo:

$$[A, I] \leftrightarrow [I, A^{-1}]$$

Encontrar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En el algoritmo, se inicializa el proceso aumentando a la matriz  $A$ , la identidad:

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posteriormente, se aplican operaciones fundamentales para transformar la matriz A, en I, como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad -R_1 + -R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad -\frac{2}{3}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad -\frac{3}{2}R_2 + R_1$$

Con estas operaciones la transformación ha permitido llegar a  $[I, A^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Se obtiene la inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12. Encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$[A \ I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora, es una buena idea comprobar el resultado;

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Evaluación formativa- una aplicación de las matrices inversas

El siguiente caso corresponde a un caso de criptografía.

Un criptograma es un mensaje escrito conforme a un código secreto. Las raíces griegas provienen de *kryptos* que significa “oculto”. La multiplicación de matrices puede ser usadas para codificar y las matrices inversas, para decodificar mensajes.

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 0  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| es | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J  | K  | L  | M  |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| N  | Ñ  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |

Se trata de codificar un mensaje: **ATACAREMOS AL AMANECER.**

- Lo primero que se debe realizar es contar con una matriz cuadrada e invertible que funcionará como *clave*:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Posteriormente, se elige la forma de dividir el mensaje en concordancia con el orden de la matriz para formar un vector:

$$\{ATAC\}\{AREM\}\{OSAL\}\{AMAN\}\{ECER\}$$

3. Se realiza una multiplicación, asignando a cada letra un valor correspondiente al alfabeto.

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.9 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0.8 \\ 0.7 & 0.1 & 0.6 & 0.2 \\ 0.8 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.6 \\ 7.4 \\ 4 \\ 1.3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I \\ G \\ D \\ A \end{bmatrix}$$

En este caso, se han tomado únicamente los números enteros para asociarlos con alguna letra del abecedario.

4. Se realiza el mismo procedimiento para el resto de los conjuntos de palabras. Con cada vector se forma una nueva matriz que, por las agrupaciones será una matriz de orden 5x5.

Te invitamos a que termines de codificar el mensaje y a decodificarlo con matrices inversas.

## Evaluación sumativa

Lee con atención y responde con Verdadero (V) o Falso (F)

|                                                                                                                                |   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Para que una matriz B sea la inversa de A, ambas formas $AB=I$ y $BA=I$ deben ser verdaderas                                   | V |
| Si A y B son de orden $n \times n$ e invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1}$ es la inversa de $AB$ .                              | F |
| Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ab - cd \neq 0$ , entonces A es invertible.                           | F |
| Si A es una matriz invertible de $n \times n$ , entonces la ecuación $Ax = b$ es consistente para cada $b$ en $\mathbb{R}^n$ . | V |
| Cada matriz elemental es reversible                                                                                            | V |
| Una matriz A de orden $n \times n$ que se eleva al cuadrado, ¿es invertible?                                                   | V |
| Si A es invertible, entonces la inversa de $A^{-1}$ es A misma                                                                 | V |
| Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ad = bc$ , entonces, A no es invertible.                              | F |
| Si A puede ser reducida a filas para llegar a la matriz identidad, entonces A debe ser invertible.                             | V |

|                                                                                                                                                                                     |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| S $A$ , es invertible, entonces, las operaciones elementales por renglones que pueden reducir a $A$ a la identidad $I_{n \times n}$ , también reducen $A^{-1}$ a $I_{n \times n}$ . | V |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|

## Conclusiones

---

Las actividades que se han presentado pueden adaptarse según las necesidades específicas del programa de estudio y de los objetivos de enseñanza, y es importante que se mantenga la actividad de proporcionar retroalimentación constructiva a los estudiantes para ayudar en su proceso de aprendizaje.

Para la evaluación se ha estructurado en la siguiente forma:

Evaluación de transformaciones elementales: se han incluido preguntas que evalúan la comprensión de conceptos y ejercicios prácticos que requieren la aplicación de transformaciones elementales para alcanzar un objetivo específico, como la diagonalización de una matriz.

En la inversa de una matriz, se han sugerido ejercicios que evalúan la capacidad de definir y calcular la inversa de una matriz, así como aspectos básicos en la aplicación del cálculo de la inversa de una matriz para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Para el caso de la evaluación de ecuaciones matriciales y su solución, las preguntas evalúan la comprensión de ecuaciones matriciales y cómo se relacionan con sistemas de ecuaciones lineales. Así también, como resolución de sistemas de ecuaciones lineales utilizando métodos matriciales, como la matriz aumentada y la matriz inversa.

Finalmente, se tiene una evaluación para aplicaciones, en donde en el contexto de las transformaciones elementales se tienen preguntas que evalúan la comprensión de propiedades de transformaciones elementales y su relevancia en el álgebra lineal, como problemas que demuestran la aplicabilidad de estos conceptos en situaciones prácticas o científicas.

En cada sección se incluyen retroalimentaciones.

Finalmente, se ha generado la evaluación sumativa, en la cual se genera un juicio que determina si un estudiante cuenta con conocimiento de los módulos, y que se basa en calificaciones.

## Anexo

### Inversiones por columna

Ahora, se observa cómo se deducen otras transformaciones elementales sobre columnas cuando se realizan las operaciones AQ, AR y AS.

| Realización de operaciones                                                                                                                 | Producto                                                                           | Análisis                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $AQ = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} a & bq & c \\ d & eq & f \\ g & hq & i \end{bmatrix}$             | La multiplicación por un escalar en una columna determinada se refleja también en el producto de esa misma columna.                          |
| $AR = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{bmatrix}$                | El intercambio de columnas se refleja también en el producto de la multiplicación.                                                           |
| $AS = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} a & b & bs + c \\ d & e & es + f \\ g & h & hs + i \end{bmatrix}$ | Reemplazar un cero por s en una columna, se manifiesta con la suma de los elementos de esa columna más los correspondientes de otra columna. |

## Bibliografía

Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia. Un enfoque del mundo real*. McGraw-Hill.

Bombelli, E. C. y Barberis, J. G. (2012). Importancia de la evaluación diagnóstica en asignaturas de nivel superior con conocimiento preuniversitario. *Revista Electrónica Gestión de las personas y Tecnología*, 5(13), 34-41.

Ceja Mena, L.I. (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I*. Instituto Politécnico Nacional.

Díaz-Barriga, A. (2008). *Temas de debate de la innovación educativa*. CESUE, UNAM.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Mc-Graw Hill.

Dorier, L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (págs.. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

Garcia, S. R., y Horn, R. A. (2023). *Matrix Mathematics: A Second Course in Linear Algebra*. Cambridge University Press.

Golovina, L.I. (1976) *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.

Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Holey, T. y Wiedemann A. Narcea. (2023). *Analysis and Linear Algebra*. Springer.

Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-20.  
<https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.

Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.

## Agradecimientos

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

### Derechos de autor

“Comprensión de transformaciones elementales y su aplicación en matrices inversas”, Nelly Rigaud Téllez y Roberto Blanco Bautista, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es>, (CC-BY-NC-ND).