



Comprensión de transformaciones lineales

Facultad de Estudios Superiores Aragón- - UNAM
Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIME

Carrera

Ingeniería Industrial

Autores

- Nelly Rigaud Téllez
- Roberto Blanco Bautista

Revisor técnico

- Gilberto García Santamaría González

Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

Clave del proyecto: PAPIME PE112723

Fecha

19 de mayo de 2024

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

ÍNDICE

Consideraciones para una lección integradora de Álgebra Lineal	3
Descripción de la lección	3
Justificación	4
Evaluación	5
Bases para el proceso de aprendizaje	6
Estructura de la lección	6
Comprensión de transformaciones lineales	7
Ideas introductorias	7
Referencias temáticas	10
Preámbulo	11
Definiciones	12
Lección formativa	15
Conclusión	37
Anexo 1	37
Bibliografía	39
Agradecimientos	40

Consideraciones para una lección integradora

TÍTULO: Comprensión de transformaciones lineales

Propuesta didáctica: Actividad integradora para el aprendizaje de Álgebra Lineal

Descripción de la lección

La investigación educativa ha mostrado que una estrategia efectiva para el aprendizaje de matemáticas implica entrelazar ejemplos con problemas prácticos.

En esta lección, se integran ejemplificaciones que incluyen diversas representaciones, ofreciendo ideas, comprensión y las posibilidades de formar conceptos globales sobre linealidad.

Aquí, se concibe que una lección es un componente esencial de la experiencia de aprendizaje. Se trata de una presentación estructurada y dirigida de conocimientos, actividades y recursos formativos diseñados para abordar un conjunto de subtemas de 'Transformaciones lineales', específicamente, para el curso de Álgebra Lineal en la FES Aragón-UNAM. El objetivo principal es facilitar la adquisición y comprensión de conceptos en un contexto coherente y significativo para el campo de la ingeniería.

Esta lección representa el resultado de la identificación y establecimiento de un conjunto específico de actividades de aprendizaje. Su estructura proporciona herramientas para evaluar y mejorar la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas complejos y no rutinarios, extendiéndose hacia la formulación y abordaje de problemas del mundo real, organizado en tres módulos: Las transformaciones lineales ante nuestra vista, transformaciones lineales en el plano, propiedades de las transformaciones lineales.

Justificación

Normalmente, cuando se comienza el estudio de Álgebra Lineal se resuelven sistemas de ecuaciones algebraicas, en forma sistemática.

Conforme se continúa el estudio de este campo, se analizan objetos de matrices y vectores, para proseguir con fundamentos, los cuales se presentan en una forma suficientemente general y abstracta que permiten estudiar objetos matemáticos, tales como ecuaciones, sistemas, matrices, vectores, funciones y, en general, objetos de dimensión n .

Lo anterior se refiere a que el concepto de linealidad se coloca en un marco general que permite comprender conceptos claves que gobiernan a cualquier objeto de tipo lineal que surja en matemáticas.

En este ámbito, la linealidad es un concepto matemático con profundo impacto en ingeniería, porque permite dos cosas:

La homogeneidad, o sea, escalabilidad en forma lineal:

$$f(ax) = af(x)$$

La adición:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Así que un objeto es lineal, cuando manifiestan las dos propiedades mencionadas. Muchas relaciones lineales que existen en el mundo físico respetan estas dos propiedades, por ejemplo:

$$\text{Velocidad: } v = \frac{d}{t}$$

$$\text{Fuerza: } F = ma$$

$$\text{Ley de Hooke: } F = -kx$$

$$\text{Trabajo: } W = Fd$$

$$\text{Ecuación de una recta que pasa por el origen: } y = mx$$

$$\text{Voltaje: } V = RI$$

Las transformaciones lineales juegan un papel vital en matemáticas, específicamente en álgebra lineal, ya que se convierten en una herramienta esencial para comprender y

trabajar con espacios en dimensiones superiores. Al estudiar las transformaciones lineales, los matemáticos pueden obtener información sobre el comportamiento de los espacios vectoriales y sus transformaciones.

Una de las aplicaciones clave de las transformaciones lineales es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Al representar el sistema como una ecuación matricial, el problema se puede transformar en una interpretación geométrica, donde la transformación lineal representa la relación entre las variables. Esta interpretación geométrica permite una comprensión más profunda del espacio de solución y proporciona un enfoque más intuitivo para resolver el sistema.

Evaluación

Las actividades diseñadas para esta lección se soportan por literatura especializada, en la cual se pretende evidenciar cuándo se percibe que se ha logrado la comprensión de un concepto. En este caso, existen varias operaciones mentales, sin embargo, destacan la de *identificación, representación, generalización y síntesis*.

En la lección, las actividades son del tipo formativo, ya que están orientadas a clasificar y definir objetos y estructuras matemáticas, así como a identificar y analizar estructuras dentro de situaciones no rutinarias y en un contexto real.

Se presentan ejemplos que plantean situaciones que ayudan al estudiantado, a ser conscientes de sus interpretaciones intuitivas, que se refuerzan con definiciones.

Además, cuentan con actividades formativas, cuyas consignas por resolver plantean retos a un pensamiento profundo y son del siguiente tipo: (a) clasificar y definir objetos matemáticos y sus estructuras, e (b) identificar y analizar estructuras matemáticas en una situación con tres evaluaciones formativas y un video.

Estas evaluaciones se encuentran insertadas en distintos momentos de la lección, bajo una estructura de **módulos**, como una posibilidad de que su rol formativo soporte la adquisición y desarrollo de nuevos conocimientos y habilidades.

Bases del proceso de aprendizaje

En una situación de aprendizaje como en una lección, se crean espacios deliberados que buscan promover la adquisición de conocimientos y especialmente su comprensión. En su diseño se deberá contemplar el aprendizaje, temario, objetivos y su enfoque, por mencionar los más relevantes.

En esta lección se favorece al pensamiento y procesamiento de información. Para lograr la comprensión de conceptos, la teoría que soporta a esta lección es la basada en la cognición, para organizar y adquirir nuevos significados, buscando la reconciliación integradora que implica también una diferenciación progresiva.

Por ello, se ha empleado la perspectiva cognitiva, la cual promueve el razonamiento y el pensamiento, para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos, y bajo una perspectiva de actividades formativas, esto es, centrarse en el análisis y discusión de diferentes interpretaciones de ideas matemáticas, en tres grandes etapas (Segura, 2018).

Estructura de la lección

- a. Ideas introductorias
- b. Referencias temáticas de la lección
- c. Preámbulo
- d. Definiciones
- e. Lección formativa
- f. Conclusiones
- g. Bibliografía
- h. Agradecimientos

Comprensión de transformaciones lineales

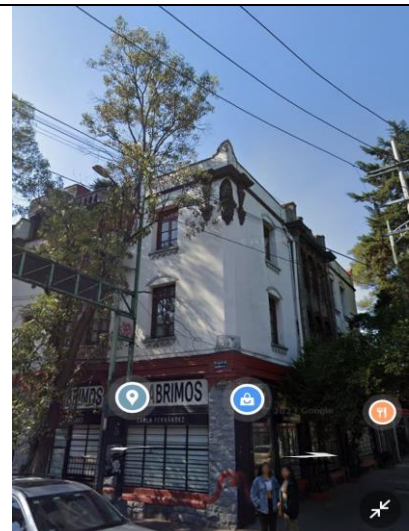
¡Hola!

Te damos la más cordial bienvenida a la lección de “Comprensión de transformaciones lineales”, que se sumerge en el fascinante mundo de la linealidad.

A continuación, te presentamos una visión de las transformaciones lineales en situaciones asociadas a la realidad que, hemos denominado “Transformaciones lineales a la esquina de tu casa”.

Te presento dos ejemplos:

El primero, es de un edificio en la emblemática colonia Roma Norte de la Ciudad de México.

Vista de referencia:	El mismo edificio, desde un ángulo distinto:
	

Ahora, digamos que la imagen de la izquierda corresponde a la “primera imagen de referencia”. Es una imagen alojada en una base de datos que tiene toda clase de información asociada con el edificio- su ubicación, historia, su distribución, etc. Se podría decir que la segunda imagen es una adquirida. Es una imagen que no se conocía *a priori*, pero al rotarse y trasladarse la imagen, hubo un cambio de ángulo y de traslación.

¿Qué significa tener una imagen del mismo objeto tomada con un ángulo diferente?

Se refiere a que ambas están relacionadas por una transformación lineal, en la cual la segunda fotografía representa una imagen de la primera y existe algún tipo de regla de correspondencia que, a cada elemento de la primera imagen le corresponde uno y solo

un elemento de la segunda imagen. Esa regla de correspondencia podría estar dada por una transformación ortogonal donde hay una combinación de una rotación con una reflexión. Por ejemplo, para una rotación se puede usar una operación como:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para que se pueda aplicar una traslación, o sea modificar la posición, una alternativa es usar una matriz como la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En esta matriz, en la cuarta columna, se almacena “la cantidad de traslación” para cada componente de la imagen de referencia.

En este sentido una transformación lineal se refiere a operaciones matemáticas que se usan para transformar y manipular datos.

Segundo ejemplo.

En ingeniería, uno de los desafíos clave es optimizar la eficiencia de los procesos de fabricación, como procesos de transformación. Si se tienen tres empresas, la primera de industria de fertilizantes, la segunda, del sector agrícola, y la tercera, de la industria molinera. El mapeo lineal de una empresa a otra empresa es una función en la que la salida de una es la entrada de otra.

Su representación en un diagrama se podría ver así:



Y la transformación T_i de la Entrada E_i es la salida S_i que, a su vez, corresponde a la siguiente E_i . Una manera de escribir las transformaciones lineales es la siguiente:

$$T_1(E_1) = S_1 = E_2$$

$$T_2(E_2) = S_2 = E_3$$

$$T_3(E_3) = S_3$$

Se observa, que la salida del bloque 1 (fertilizantes), entra al 2, y la salida de este (Agrícola), entra al bloque 3.

Sustituyendo estas condiciones en forma regresiva:

$$(T_3(T_2(T_1)(E_1))) = S_3$$

Hay muchas razones para estar interesados en transformaciones lineales: Las aplicamos a espacios vectoriales, como una alternativa para hacer un mapeo que preserve la estructura lineal del espacio, esto es, nos ayuda a reducir la complejidad de un problema al explotar únicamente las propiedades que son de nuestro interés.

En este sentido, pueden surgir muchas preguntas que son campo de las transformaciones lineales: ¿Puedo componer transformaciones lineales como funciones?, ¿cuál es el rango de una transformación lineal?, ¿si en matrices existe una matriz nula, ¿cómo se le llama a lo relativo al cero en transformaciones lineales?, si en matrices existe el concepto de matrices invertibles, ¿sucede lo mismo con transformaciones lineales?

Referencias temáticas

Ubicación de la lección integradora

Licenciatura	Ingeniería Industrial	
Referencias temáticas de la asignatura	Asignatura	Álgebra Lineal
	Ubicación curricular	Segundo semestre
	Asignatura subsecuente	Métodos Numéricos, Investigación de Operaciones I
	Asignatura antecedente	Álgebra, Geometría Analítica
<i>Referencias temáticas y competencias de los temas incluidos en la lección, conforme al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Industrial de la FES Aragón</i>	Tema	5. Transformaciones lineales
	Objetivo del tema 2	Comprender el concepto de transformación lineal y las aplicaciones que tiene sobre los espacios vectoriales.
	Subtemas incluidos	5.1 Definición de transformación entre espacios vectoriales, definiciones de dominio y codominio, y propiedad de linealidad 5.1.1 Definición de transformación lineal 5.3 Concepto y obtención de la matriz asociada a una transformación lineal con dominio y codominio de dimensión finita

Objetivo de la lección. Esta lección comprende actividades formativas en el nivel de COMPRENSIÓN con los siguientes objetivos:

Utiliza gráficos y representaciones visuales para ilustrar transformaciones lineales en el plano o en el espacio bidimensional

Relaciona transformaciones lineales con operaciones de escalamiento y rotación en imágenes digitales

Visualiza cómo los vectores se transforman bajo la acción de una función o un mapeo

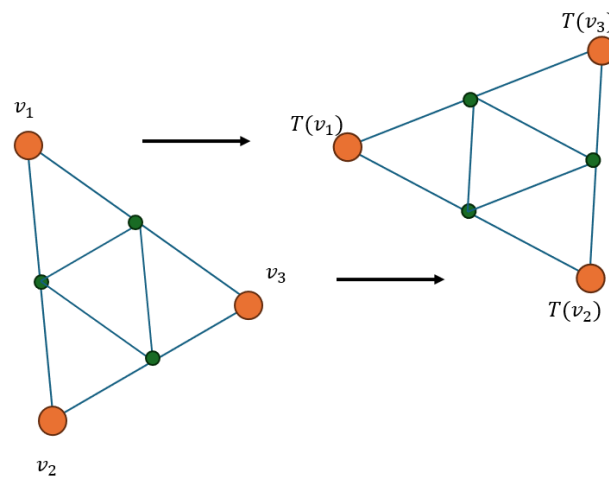
Preámbulo

Cuando una matriz A multiplica por un vector v , “se transforma” en otro vector w . La entrada es v , la salida es $T(v) = w$.

Como se puede observar T sigue la misma idea de una función. La variable independiente se suele denominar x , la salida es $f(x)$.

Para un vector v o una variable x , se multiplica por la matriz o se evalúa en la función. En transformaciones lineales se transforma todo el espacio V , cuando se multiplica cada A por v .

En la siguiente figura, la *linealidad* dice esto: cada punto de una línea, de un triángulo u otro objeto genera una salida de una línea, un triángulo u otro objeto.



En esta figura del triángulo, el reto se encuentra en percibir a todos los vectores v a la vez, cuya salida es otro triángulo.

Definiciones

Transformación- Una transformación es una operación o aplicación matemática entre dos espacios vectoriales, V y W , que preserva las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalares.

A las transformaciones lineales también se les llama *funciones* o *mapeos* denotados por las letras T o f , como una regla que asigna a cada vector x , en un espacio real una transformación.

Formalmente, una función

$$T: V \rightarrow W$$

Se considera una transformación lineal si, para cualquier par de vectores u y v en V y cualquier escalar c ; se cumplen dos propiedades fundamentales:

- a. Aditividad: $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- b. Homogeneidad: $T(cu) = cT(u)$

El conjunto en $\mathbb{R}^n$, se le llama **dominio de T** , y $\mathbb{R}^m$, se le llama **codominio**.

Dominio y codominio- Estos conceptos describen conjuntos de entrada y salida, respectivamente.

El dominio de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada, para los cuales la función está definida, esto es, el conjunto de valores sobre los cuales la función opera y produce un resultado.

Por ejemplo, en

$$f(x) = x^2$$

El dominio son los todos los números reales, ya que la función está definida para cualquier número real.

El codominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles que la función podría generar como salida.

En el contexto de las transformaciones lineales, estas representan el conjunto de valores a los que la función podría mapear los elementos del dominio.

Es importante puntualizar que el codominio no necesariamente incluye a todos los valores posibles que la función podría producir. Particularmente, destaca un subespacio del codominio que se llama **rango o imagen** y representa a todos los valores que la función realmente produce.

Reflexión- Una *reflexión* es una aplicación de transformación geométrica que invierte la posición de puntos, vectores o figuras respecto a un plano o hiperplano, esto es, voltea cada punto de una forma sobre la misma línea. Por ejemplo, en un espejo la imagen se *refleja* simétricamente, es decir a 180 grados.

Rotación- Una *rotación* es una transformación que rota (gira) puntos, vectores o una imagen en un espacio vectorial alrededor de un punto fijo llamado “centro de rotación”. La rotación en el espacio tridimensional se describe a menudo mediante matrices de rotación. La rotación alrededor de eje i -ésimo (donde i puede ser x, y, z) por un ángulo θ se puede expresar mediante la siguiente matriz de rotación.

Para una rotación alrededor del eje x :

$$R_x\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para una rotación alrededor de eje y :

$$R_y\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Para una rotación alrededor del eje z :

$$R_z\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

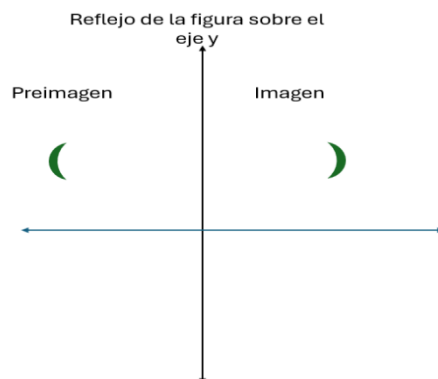
Aquí, $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ son funciones trigonométricas que dependen del ángulo de rotación θ . La aplicación de estas matrices de rotación a un vector v rota al vector alrededor del eje correspondiente por el ángulo θ . La elección del eje y el ángulo determina la naturaleza específica de la rotación.

Aumento de tamaño- El aumento de tamaño, también conocido como *escalamiento*, se refiere a la transformación lineal que modifica la magnitud de un vector por un factor escalar. Esta operación se puede representar mediante la multiplicación de un escalar por una matriz o un vector.

Imagen- La imagen de toda transformación lineal es un subespacio del codominio, esto es, si un elemento $v_1 \in V$, pasa por una función de transformación, encuentra su imagen en $w_1 \in W$.

Esto es, una imagen se refiere al conjunto de todos los vectores a los que se puede llegar aplicando una transformación lineal a partir de un conjunto dado de vectores iniciales. Este conjunto de vectores iniciales se conoce como el espacio de entrada, y el conjunto de vectores resultantes después de aplicar la transformación lineal se llama la imagen de la transformación.

En una transformación, la figura original se llama preimagen y la figura final se llama imagen. Por ejemplo, en la siguiente figura, la preimagen muestra la forma sin alteración, y en la imagen, el reflejo del objeto representa la transformación.



Vector- Un vector es un elemento de un espacio vectorial, que es una estructura matemática compuesta por un conjunto de elementos, junto con dos operaciones algebraicas: la suma de vectores y la multiplicación por escalares.

Formalmente, un vector puede ser representado como una secuencia ordenada de números reales o complejos. Por ejemplo, en un espacio vectorial V , entonces un vector v en V , se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Donde $v_1, v_2, \dots, v_n$ son los componentes del vector. Estos componentes dependen del contexto específico en el que se está trabajando. Por ejemplo, en un plano tridimensional se denota por las coordenadas (x, y, z) .

Lección formativa

Módulo 1. Las transformaciones lineales ante nuestra vista

Utiliza gráficos y representaciones visuales para ilustrar transformaciones lineales en el plano o en el espacio tridimensional.

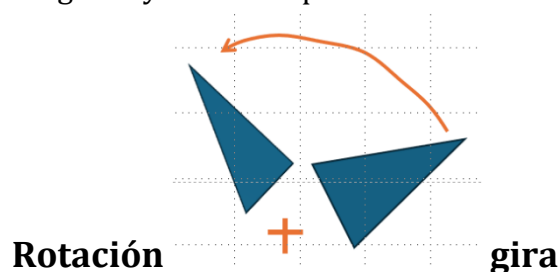
Los resultados de aprendizaje son:

Representar objetos usando gráficos, tablas y notaciones algebraicas.

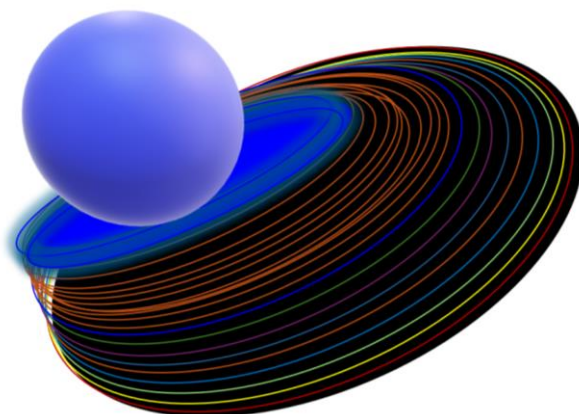
Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 1.

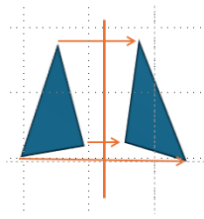
Para comenzar el estudio de las transformaciones lineales, por simplicidad nos concentraremos en objetos geométricos reales, para extendernos posteriormente, con construcciones más abstractas.

Observa las siguientes imágenes y sus descripciones:



Rotación significa girar alrededor de un eje. La distancia desde el eje a cualquier punto del objeto permanece constante. En este sentido, cada punto del objeto forma un círculo alrededor del centro.

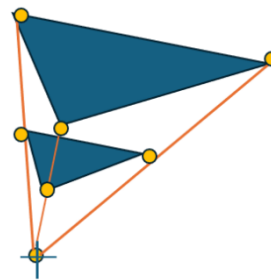




Reflexión

voltea

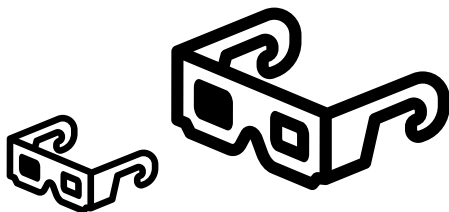
Una reflexión es un giro sobre una línea, en donde cada punto está a la misma distancia de la línea central y la reflexión tiene el mismo tamaño que la imagen original. Cabe mencionar que se cumple un principio de simetría.



Cambio de tamaño

$kf(x)$

Te presentamos las siguientes representaciones gráficas de los objetos de Windows que hemos modificado, para facilitar tu aprendizaje:

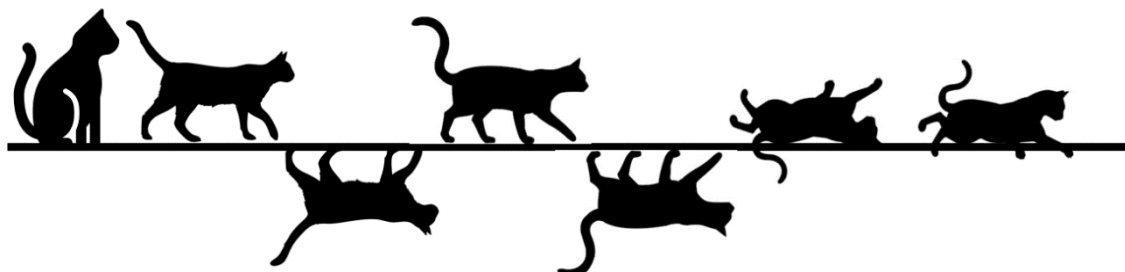
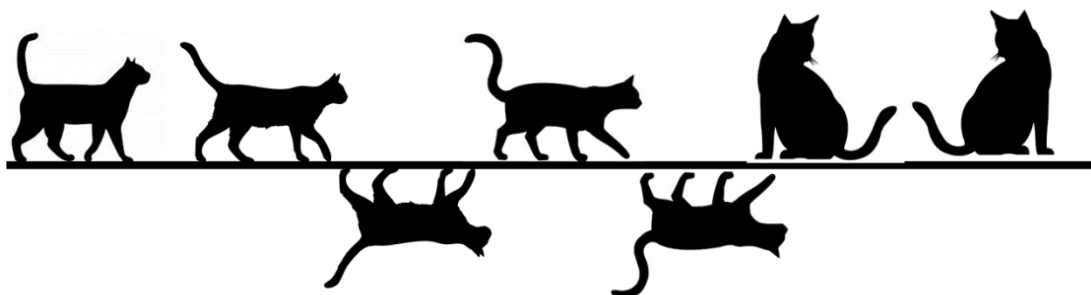


La siguiente secuencia de imágenes muestra movimientos que producen las transformaciones lineales, más la [traslación](#) (Véase Anexo 1).



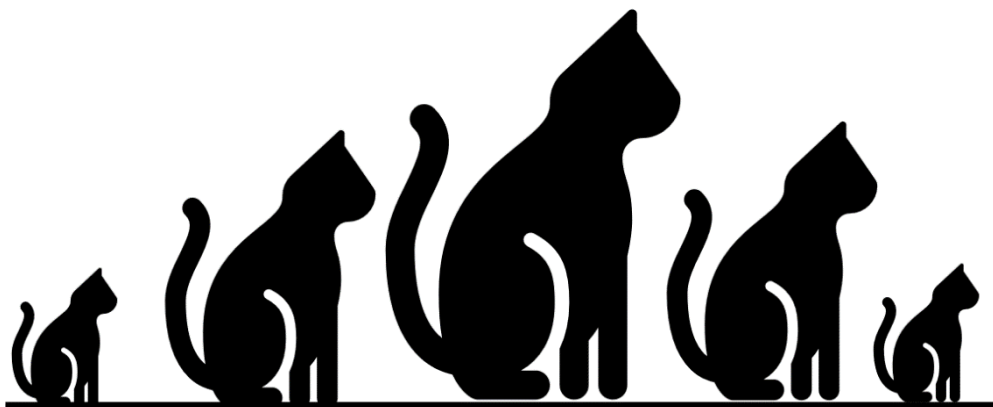
¿Puedes describir con palabras los movimientos lineales que observas?

¿Qué te parecen estas?

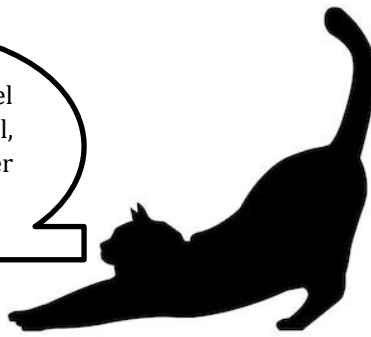


¿Qué transformaciones lineales ocurrieron?

Y, ¿en estas?



Si no fuera por el
Álgebra Lineal,
no podría hacer
esto.

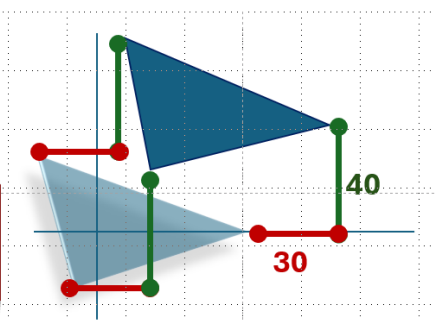


Evaluación formativa 1

Observa, lee con atención y elige la respuesta correcta.

Por ejemplo, ¿qué tipo de movimiento se presenta?

NOTA: Revisa el anexo 1.

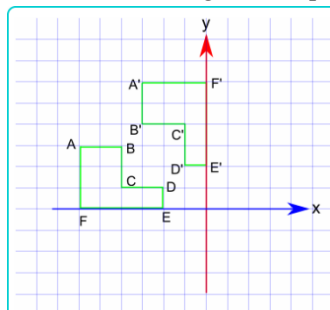


El objeto claro se ha movido 30 unidades en dirección positiva del eje x y 40 unidades en la dirección positiva del eje y.

Solución. Esto se puede escribir así:

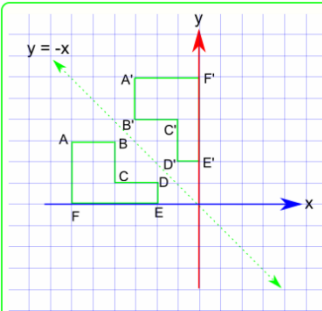
$$(x, y) \rightarrow (x + 30, y + 40)$$

1. La forma L con puntos en A'B'C'D'E'F' es la imagen de la forma ABCDEF después de una reflexión, ¿sobre qué eje o línea ha ocurrido la reflexión?



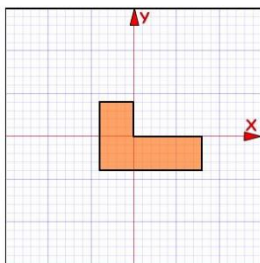
a. El eje y

b. La línea $x = -3$

c. La línea $y=x$	d. La línea $y=-x$
Retroalimentación  Cada punto es su imagen que debe estar a la misma distancia de la línea del reflejo, la cual es $y=-x$	

2. Cuando la forma L se rota sobre el origen $(0, 0)$, por 90° en contra de las manecillas del reloj, ¿cómo se verá el producto?

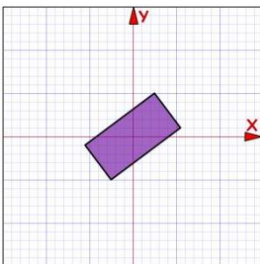
Nota: observa la figura sombreada.

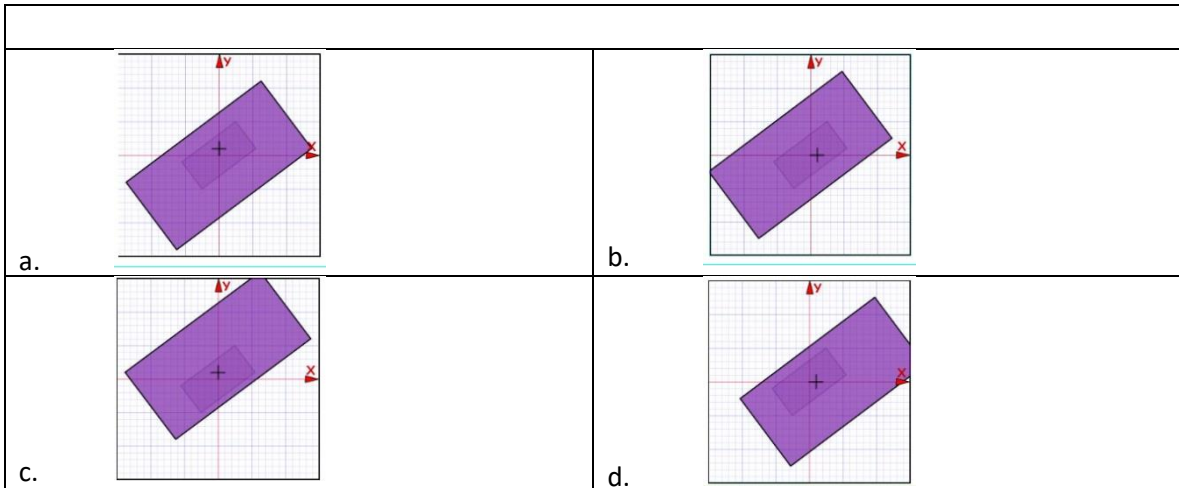


a.	b.
c.	d.

La respuesta es c.

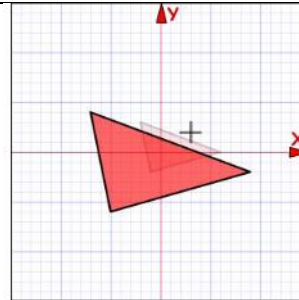
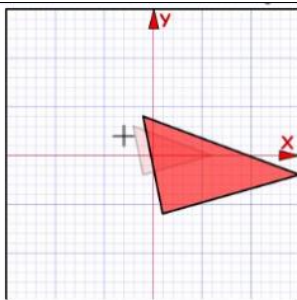
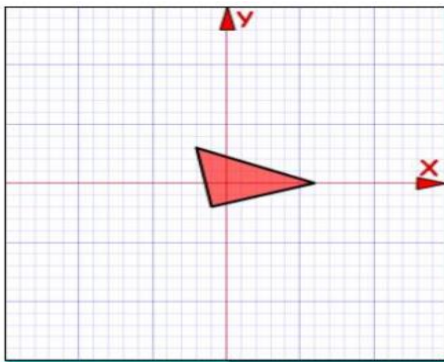
3. El rectángulo ha cambiado su tamaño con un factor de 2.5 y con un punto central en $(0, 1)$. ¿Cuál es la imagen correcta?

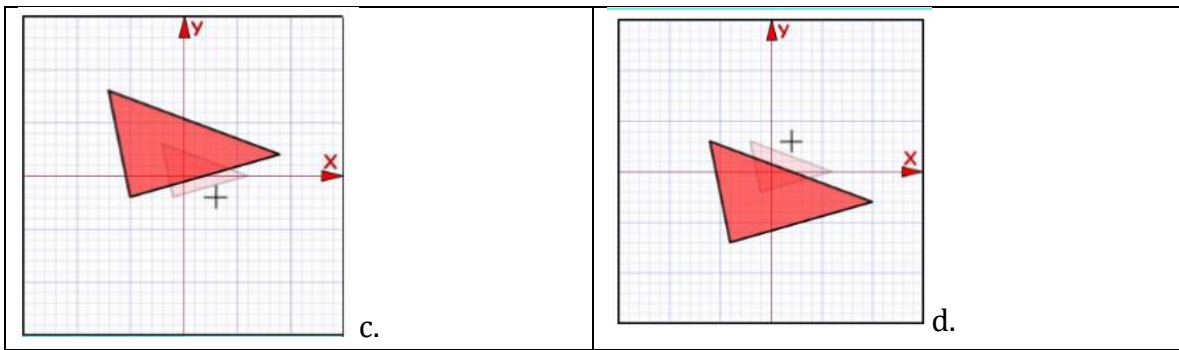




La respuesta es a.

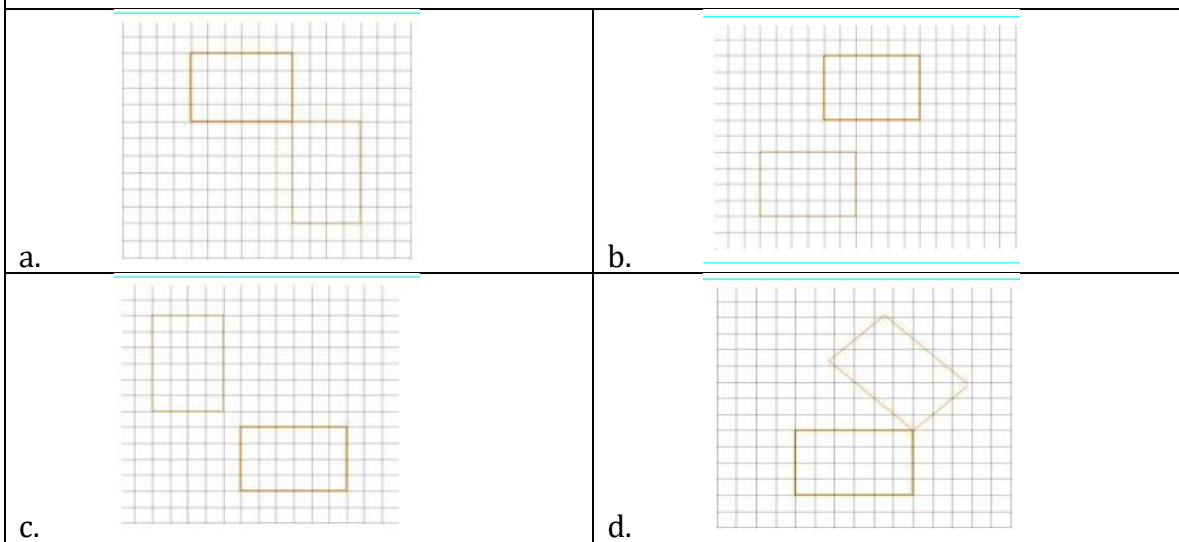
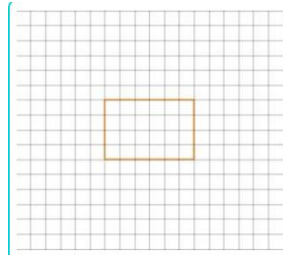
4. Se ha cambiado el tamaño del triángulo por un factor de 2 con punto central en (3, 2). ¿Cuál es la imagen correcta?



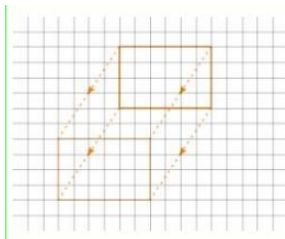


La respuesta es b.

5. El rectángulo se desliza a una nueva posición, ¿Cuál de las siguientes opciones muestra la nueva posición del rectángulo?



Retroalimentación. Para el traslado cada esquina del rectángulo debe moverse en la misma distancia en la misma dirección, como se muestran en las flechas:



Las transformaciones lineales son una forma de asignar una operación a un objeto, de tal forma que algunas no cambian al objeto, tales como, las rotaciones, reflexiones, cortes o proyecciones. Otras transformaciones cambian el tamaño de la forma después de su transformación.

Módulo 2. Transformaciones lineales en el plano

En el siguiente módulo, se estudiará cómo comprender transformaciones lineales desde la perspectiva de álgebra lineal, en dos formas: desde una perspectiva geométrica y desde una perspectiva de solución de sistemas lineales.

Los resultados de aprendizaje son:

Relaciona transformaciones lineales con operaciones de escalamiento y rotación en imágenes

Distingue cómo la definición de transformación lineal genera cambios en cuerpos geométricos

Generaliza aplicaciones de transformaciones lineales mediante el empleo de multiplicaciones

Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 2

En forma intuitiva se han visualizado vectores que forman un objeto, y su representación geométrica cuando “pasan” por una transformación lineal. De manera que, si se tiene ese objeto o esa figura en el plano xy , entonces se puede aplicar una función T , para obtener una figura transformada.

Resulta que todas las transformaciones lineales se construyen combinando procesos geométricos simples como rotación, estiramiento, contracción, corte, reflexiones o proyecciones. Como consecuencia, las transformaciones lineales son importantes cuando se grafica por computadora, como se ha podido apreciar con el módulo anterior.

Tal es el caso de si se quiere representar un objeto tridimensional en un plano bidimensional, y se pretende observar al objeto desde varios ángulos, entonces, las proyecciones y rotaciones entran en juego.

Otro ejemplo es cuando se pretende que el espectador tenga una impresión de alejamiento, bastará con reducir un objeto en 3D.

Para controlar estos movimientos, las transformaciones lineales emplean matrices y vectores. Una forma de estudiar transformaciones lineales es aplicando la

multiplicación de matrices, lo cual permite ver como la operación, por ejemplo, de un cuadrado unitario se ve afectada.

Ejemplo 1. Sea un cuadrado unitario, con coordenadas $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Cada coordenada representa los puntos que forman un cuadrado que también se pueden ver como un vector

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, se considera a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

¿Qué sucede si se realiza la multiplicación de la matriz por cada uno de los vectores?

Nota: Recuerda que existe una regla para la multiplicación de matrices, asimismo, no hay conmutatividad en esta operación.

En caso de querer facilitar las operaciones se pueden integrar los vectores, en una matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

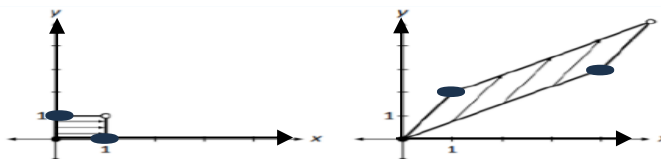
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al resolver en esta forma, se ahorra tiempo:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz A ha generado transformaciones en cada uno de los vectores, donde los vértices han sido marcados para facilitar su visualización, y de un cuadrado unitario queda ahora un paralelogramo.

Al observar con mayor detalle los vértices, se puede observar que el de color verde ha intercambiado lugar con el de color azul. Así que, la matriz de A no solo **transformó** al cuadrado unitario a la forma de un **cuadrilátero**, también lo **giró**.



Veamos ahora otra aplicación de otra matriz que funcionará como herramienta para transformar nuevamente al cuadrado unitario.

Ejemplo 2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

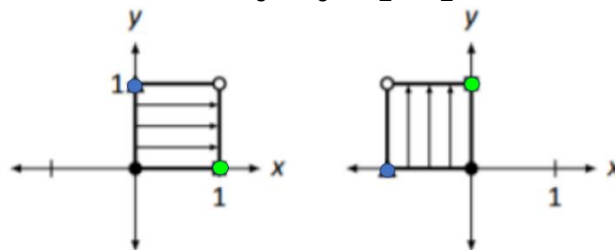
De nuevo se tienen los vectores integrados en la matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se procede a realizar la multiplicación:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



De nuevo con la transformación, el cuadrado se ha movido, se rotó 90 grados en contra de las manecillas del reloj.

Con los dos ejemplos, nuestra intuición indica que los objetos se transforman vía la multiplicación.

Antes de proseguir conviene que vuelva a observar los dos ejemplos y analice sobre lo que ha ocurrido:

(a) El vector cero $\vec{0}$, no se mueve. Por lo tanto, $A\vec{0} = \vec{0}$.

(b) El vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ del cuadrado unitario al ser transformado, ¿se convierte en la segunda columna de A!

(c) El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ del vector unitario al ser transformado, ¿se convierte en la tercera columna de A!

(d) El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, al ser transformado, se convierte en la suma de las dos columnas de la columna A.

Ahora, volvemos a reflexionar acerca de esos cuatro puntos.

El primero, $\bar{0}$, siempre se transforma a $\bar{0}$ a través de la multiplicación de matrices. Sobre los incisos (b) y (c), veamos lo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De ahí que,

$$A\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

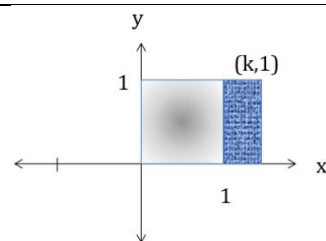
$$A\bar{e}_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Con ello se puede explicar por qué el vector se transforma en el primero o segunda de la matriz A.

A continuación, se presentan algunas transformaciones comunes y el tipo de matrices que realizan esas operaciones. En las siguientes figuras se proporcionará una matriz de transformación junto con una imagen del cuadrado unitario transformado. El cuadrado unitario original se dibuja en color gris y también como referencia.

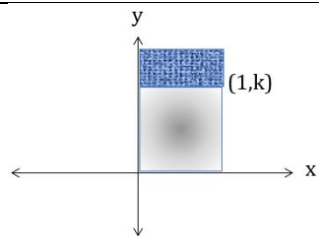
Estiramiento horizontal por un factor k

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



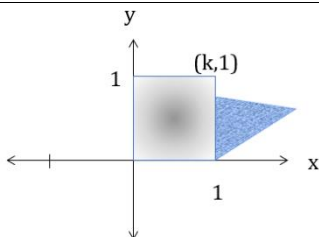
Estiramiento vertical por un factor k

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



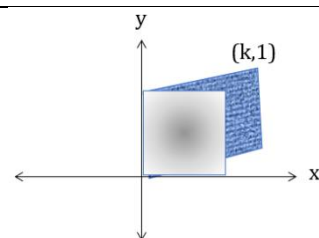
Corte horizontal por un factor k

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



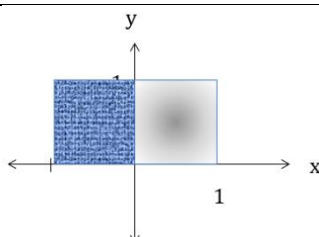
Corte vertical por un factor k

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



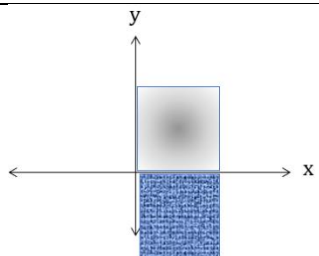
Reflexión horizontal sobre el eje y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



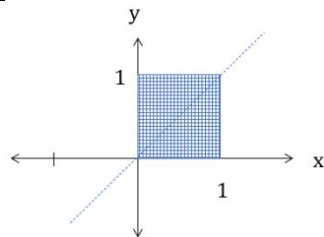
Reflexión vertical sobre el eje x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



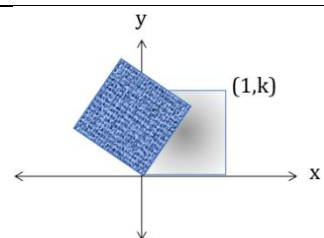
Reflexión diagonal sobre la recta $y=x$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



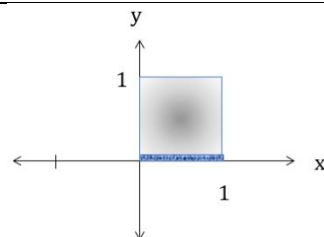
Rotación alrededor del origen por un ángulo θ

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



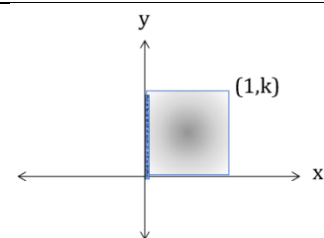
Proyección sobre el eje x-Notar que el cuadrado está aplastado sobre el eje x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Proyección sobre el eje y-Notar que el cuadrado está aplastado sobre el eje y

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ahora se ha conocido una lista de transformaciones que se pueden realizar en el plano cartesiano, se presenta un ejemplo en el que se define la transformación deseada.

Ejemplo 3. Encuentre una matriz A que transforme un objeto conforme las operaciones, en el siguiente orden:

- Corte vertical por un factor de 0.5
- Rotación en contra las manecillas del reloj con un ángulo de $\theta = 30^\circ$
- Estiramiento horizontal por un factor de 2
- Reflexión diagonal alrededor de la recta $Y=x$

Solución. Se requerirán vectores unitarios y la definición de las matrices de transformación.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de esto, se define la rotación en sentido antihorario:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Se respeta el orden de las multiplicaciones

$$A_2 A_1$$

Asimismo, se definen las operaciones

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

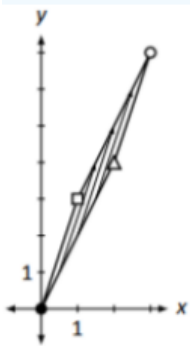
Las operaciones

$$A_4 A_3 A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 0.9333 & 0.866 \\ 1.232 & -1 \end{bmatrix}$$

Actividad formativa 2

Lee con atención y elige la respuesta correcta.

1. El siguiente cuadro unitario ha sido transformado. Determine cuál ha sido la matriz que ha permitido dicha transformación.



a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$	b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	d. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

La respuesta es b.

2. Se presenta una lista de operaciones, determine la matriz A que realiza tales operaciones en el plano cartesiano. + Un corte vertical por un factor de 2 + Un corte horizontal por un factor de 2	
a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	d. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

La respuesta es a.

3. Se presenta una lista de operaciones, determine la matriz A que realiza tales operaciones en el plano cartesiano. + Un corte horizontal por un factor de 2 + Un corte vertical por un factor de 2	
a. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$
c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$	d. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

La respuesta es c.

4. A continuación, se dan dos transformaciones. Dibuje el cuadro unitario bajo el conjunto de transformaciones. ¿Son lo mismo? Reflexiones su respuesta. a. Una reflexión horizontal sobre el eje y, seguida de una reflexión vertical sobre el eje x, en comparación con b. Una rotación en contra de las manecillas del reloj, por 180°.	
a. Si son lo mismo	b. No son lo mismo

La respuesta es b.

5. A continuación, se dan dos transformaciones. Dibuje el cuadro unitario bajo el conjunto de transformaciones. ¿Son lo mismo? Reflexiones su respuesta. a. Una reflexión sobre la recta y=x, seguida de una reflexión sobre el eje x, en comparación con b. Una reflexión sobre el eje y, seguida por una reflexión sobre el eje y=x	
a. Si son lo mismo	b. No son lo mismo

La respuesta es b.

Módulo 3. Propiedades de las transformaciones lineales

Los resultados de aprendizaje son:

Visualiza cómo los vectores se transforman bajo la acción de una función o un mapeo

Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 3.

Con los módulos anteriores se ha visto que una matriz funciona como “el elemento transformador” sobre un vector.

Por ejemplo, si se tiene a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

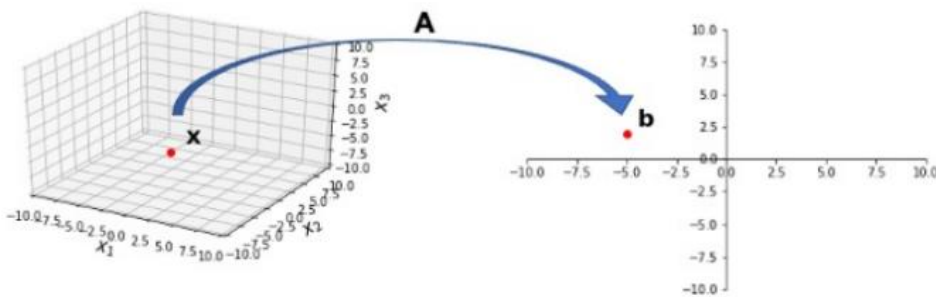
Y se tiene, además, a un vector

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Y se multiplican

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En otras palabras, si $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces, *a transformó a x en b.*



Asimismo, si se tiene en cuenta lo que A ha realizado sobre un vector x que tiene coordenadas (x, y, z) y lo ha transformado en un vector b , en $\mathbb{R}^2$, con coordenadas xy .

Al realizar un análisis más profundo de esta situación, A es una matriz de orden 2×3 , o sea,

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

Esto puede dar una nueva noción para abordar, por ejemplo, en funciones que transforman un vector a otro vector.

En la sección previa se discutieron transformaciones estándar sobre el plano cartesiano.

Se ha usado el término “transformación” para describir como cambian los vectores. De hecho, “transformación” es un sinónimo de “función”. De la misma forma que usamos

$$f(x) = x^2$$

Si A es una matriz de transformación, entonces, se puede crear una función de la forma

$$T(x) = Ax$$

Esto es, un vector es la entrada y la salida es x multiplicado por A .

Cuando se define $f(x) = x^2$, se deja que el lector asuma que la entrada de hecho es un número. Pero si se deseara establecer completamente la relación, entonces se tendría

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = x^2$$

f representa a la función de transformación. En ocasiones, se utiliza la siguiente notación $T: V \rightarrow W$, donde T y f hacen referencia a un concepto similar.

Los dos puntos “:” se refieren a “tal que”, y/o también a “es”, esto es, una condición necesaria.

Posteriormente, se indica que la entrada fue un número real (esto corresponde a la primera $\mathbb{R}$).

$\rightarrow$, significa el proceso de transformación y se lee “en”.

Luego, con la segunda $\mathbb{R}$, se da a indicar que la salida es también un número real.

Ejemplo 4. Definir una transformación, donde el objeto en 2D se transforme en otro objeto en 3D, vía la multiplicación de una matriz A .

Solución.

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ donde } T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ 2x_1 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}$$

Observe que la entrada fue un vector en 2D y la salida genera un vector 3D. Una muestra es

$$T \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Definición:

Una transformación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es una transformación lineal si satisface las siguientes dos propiedades:

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \text{ para todos los vectores } \mathbf{x} \text{ y } \mathbf{y}.$$

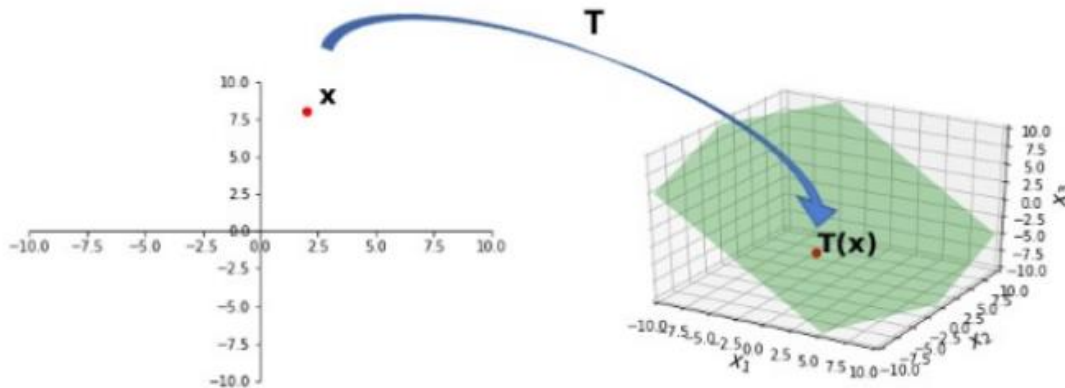
$$T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x}) \text{ para todos los vectores } \mathbf{x} \text{ y } y.$$

Si T es una transformación lineal, a menudo se dice que T es lineal.

La notación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, como se ha mencionado indica que el dominio de T es $\mathbb{R}^n$, y el codominio es $\mathbb{R}^m$.

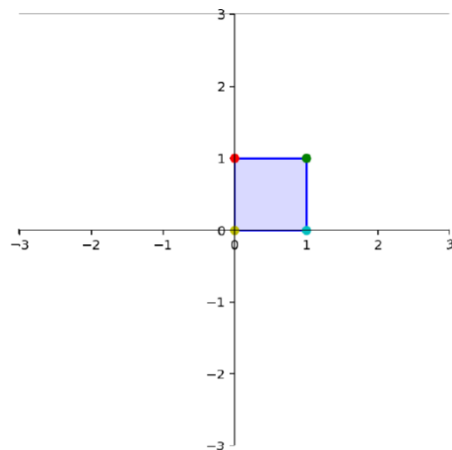
Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, el vector $T(\mathbf{x})$ se le llama **imagen** de $\mathbf{x}$ sobre T .

El conjunto de todas las imágenes $T(\mathbf{x})$ se llama el **rango** de T .



Se observa que lo mostrado en el plano verde es el conjunto de todos los puntos que son salida de la T para algunas entradas de $\mathbf{x}$. De manera que el dominio de T está en $\mathbb{R}^2$, y el codominio está en $\mathbb{R}^3$, y el rango de T es el plano verde.

Considérese ahora, que se tiene de nuevo el cuadro unitario como con el que se trabajó en el módulo 2.



$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se aplica un corte horizontal de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

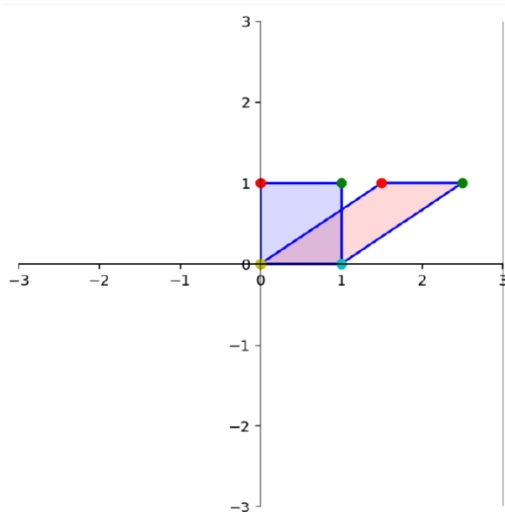
Se define que $T(x) = Ax$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

La imagen queda así:

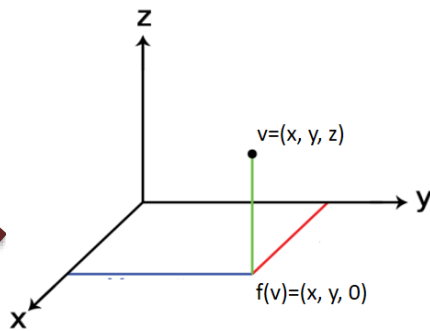
$$imagen = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 4. Sea la función de mapeo lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Calcular la imagen de f en el plano xy .

Solución:



El punto (x, y, z) en el espacio 3D, se proyecta sobre el plano xy en 2D.

La función de transformación debe ser inyectiva, ya que se trata con puntos en 3D.

Ahora, su imagen (codominio) es $(x, y, 0)$, la cual es una transformación de la coordenada original (dominio).

Ejemplo 5. Considere la matriz de 2×3 , $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Determine el siguiente mapeo

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

¿Qué operación define la posibilidad de la transformación de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

Solución. En el problema se solicita transformar la matriz de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, por medio de una función de mapeo.

Para transformar la matriz de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$ aplicando la función de mapeo, se utiliza la siguiente estructura:

$$M_{R3} * f(m) = M_{R2}$$

Se procede a proponer un vector cualquiera como función de mapeo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} f(m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

De acuerdo con el orden de la matriz propuesta y al orden del vector solución, se infiere que $f(m)$ debe ser un vector de orden 3×1 .

Se propone un vector de ese orden, por ejemplo, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Para valorar la generalidad de las transformaciones lineales, se presenta a continuación un ejemplo en el ámbito de ingeniería.

Ejemplo 6. Una compañía fabrica dos tipos de productos, B y C. Al respecto, requiere de materiales, mano de obra, y los denominados, gastos generales.

Por el valor de \$100.00 pesos del producto B, se gastan \$45.00 en materiales, \$25.00 en mano de obra y \$15.00 en gastos generales.

Asimismo, por el valor del \$100.00 del producto C, existe un gasto de \$40.00 en materiales, \$30.00 en mano de obra y \$15.00 en gastos generales.

Se trata de determinar si existe linealidad en este caso.

Solución.

Se construye una matriz de costo unitario.

$$U = \begin{bmatrix} 45 & 40 \\ 25 & 30 \\ 15 & 15 \end{bmatrix}$$

En donde, el primer renglón, representa los materiales, tanto para los productos B y C, posteriormente, el segundo renglón, denota la mano de obra, y el tercero, los gastos generales.

Ahora, sea $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ un vector de producción, donde x_1 corresponde a los pesos del producto B, y x_2 , los pesos del producto C.

Con ello, se puede definir la transformación

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Esto es,

$$T(x) = U(x)$$

$$\begin{bmatrix} \text{Costo total de materiales} \\ \text{Total de costo de mano de obra} \\ \text{Gastos totales} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 15 \end{bmatrix}$$

El mapeo de T transforma una lista de cantidades de producción en una lista de total de costos.

La linealidad de este mapeo se refleja en dos formas:

- Si la producción aumenta por un factor, por ejemplo, de 4, entonces esto se verá de x a $4x$, entonces los costos aumentarán con el mismo factor, de $T(x)$ a $4T(x)$.
- Si x y y son vectores de producción, entonces el costo total del vector asociado con la producción combinada de $x + y$ es precisamente la suma de los vectores de costos $T(x)$ y $T(y)$.

Evaluación formativa

Sobre los siguientes ejemplos, determinar si las transformaciones son lineales o no.
Sobre los siguientes ejemplos, determinar si las transformaciones son lineales o no.

1. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

a. Es transformación lineal

b. No es transformación lineal

2. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

a. Es transformación lineal

b. No es transformación lineal

3. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 + 1 \end{bmatrix}$

a. Es transformación lineal

b. No es transformación lineal

4. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a. Es transformación lineal

b. No es transformación lineal

5. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

a. Es transformación lineal

b. No es transformación lineal

Hay más cosas que explorar con las transformaciones lineales. Obviamente, siguen los espacios en 3D, así como en otras dimensiones.

Conclusiones

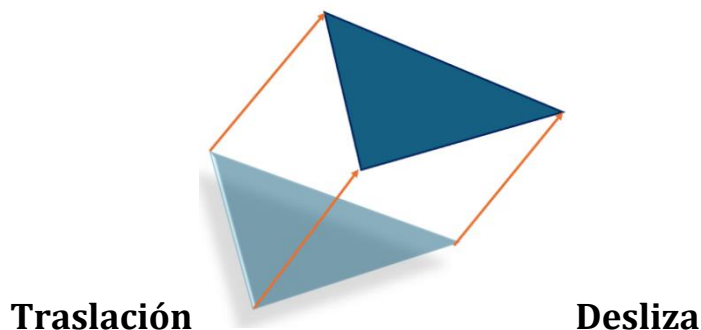
En resumen, la comprensión del concepto de transformación lineal es esencial en álgebra lineal, ya que proporciona un marco matemático para analizar y manipular vectores en espacios vectoriales. La linealidad de estas transformaciones, expresada a través de propiedades como la adición y la homogeneidad, permiten simplificar el estudio de funciones entre espacios vectoriales. A través de ejemplos visuales, aplicaciones prácticas y conexiones con diversas disciplinas, los estudiantes pueden interiorizar cómo las transformaciones lineales impactan la geometría, la programación, el análisis de datos y muchas otras áreas. Como docente, fomentar un enfoque visual, la resolución de problemas prácticos y la participación en discusiones puede mejorar la comprensión y aplicación de estos conceptos, preparando a los estudiantes para abordar desafíos más avanzados en álgebra lineal y disciplinas relacionadas.

Anexo 1

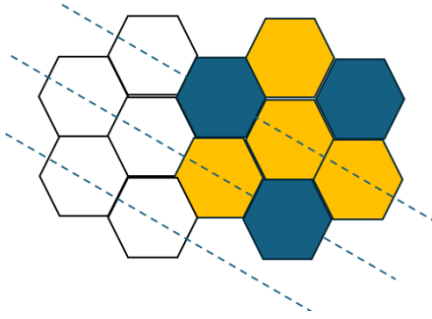
LAS TRASLACIONES NO SE REPRESENTAN COMO TRANSFORMACIONES LINEALES, ya que no satisfacen las propiedades de homogeneidad y de adición.

Esto sucede, porque no se preserva la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

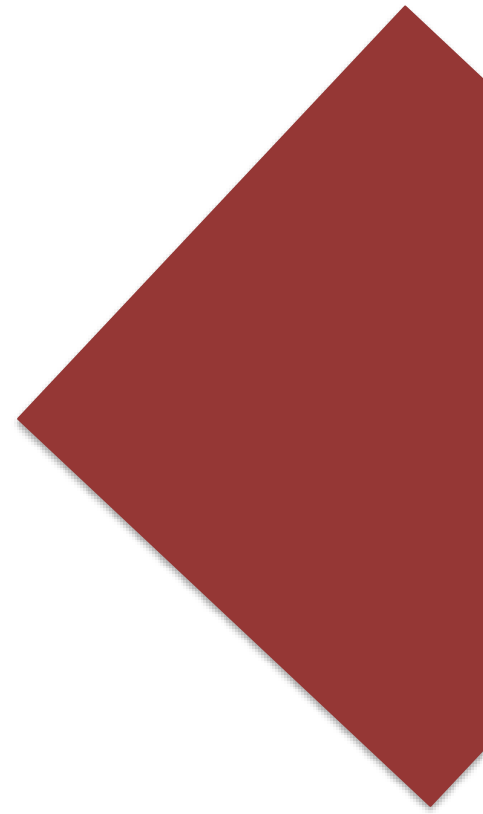
Sin embargo, se han incluido en esta lección porque permiten estudiar de una mejor forma superficies de objetos en forma dinámica.



Para que ocurra la traslación de un objeto, cada punto de la forma debe moverse: (a) en la misma dirección, (b) sin rotarse, y (c) sin cambiar su tamaño.



La traslación ocurre en dos direcciones: $\rightarrow$ y $\downarrow$.



Bibliografía

- Anton, H. (2011). *Introducción al Álgebra Lineal*. Limusa-Wiley
- Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia. Un enfoque del mundo real*. McGraw-Hill.
- Bombelli, E. C. y Barberis, J. G. (2012). Importancia de la evaluación diagnóstica en asignaturas de nivel superior con conocimiento preuniversitario. *Revista Electrónica Gestión de las personas y Tecnología*, 5(13), 34-41.
- Ceja Mena, L.I. (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I*. Instituto Politécnico Nacional.
- Díaz-Barriga, A. (2008). *Temas de debate de la innovación educativa*. CESUE, UNAM.
- Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Mc-Graw Hill.
- Dorier, L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (págs.. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.
- Golovina, L.I. (1976). *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.
- Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.
- Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.
- Holey, T. y Wiedemann A. Narcea. (2023). *Analysis and Linear Algebra*. Springer.
- Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-20. <https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.
- Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.
- Strang, G. (2023). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley Cambridge.

Agradecimientos

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

Derechos de autor

“Comprensión de transformaciones lineales”, Nelly Rigaud Téllez y Roberto Blanco Bautista, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es>, (CC-BY-NC-ND).