



Sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático

Facultad de Estudios Superiores Aragón- - UNAM
Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIME

Carrera

Ingeniería Industrial

Autor

- Gilberto García Santamaría González

Revisores técnicos

- Nelly Rigaud Téllez
- Roberto Blanco Bautista

Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

Clave del proyecto: PAPIME PE112723

Fecha

19 de mayo de 2024

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

ÍNDICE

Consideraciones para una lección integradora	3
Lección formativa	6
Definiciones	7
Desarrollo	12
Actividades formativas	37
Tarea	37
Evaluación sumativa (solución de problemas)	37
Anexo de Reforzamiento	38
.	
Conclusiones	41
Bibliografía	41
Agradecimientos	43

Lección. Sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático. Consideraciones para una lección integradora

Objetivo del temario

Adquirir los conocimientos necesarios para resolver cualquier tipo de sistema de ecuaciones lineales.

Justificación

Esta lección se enfoca en uno de los conceptos fundamentales en álgebra lineal: los sistemas de ecuaciones lineales. Comprender cómo resolver estos sistemas es esencial para estudiantes de ingeniería que desean desarrollar una base sólida en matemáticas y ciencias. Además, los sistemas de ecuaciones lineales tienen aplicaciones en una variedad de campos, desde la física y la ingeniería hasta la economía y la informática.

Objetivos de Aprendizaje

Al final de la lección, los estudiantes podrán:

Adquirir los conocimientos necesarios para resolver cualquier tipo de sistema de ecuaciones lineales.

Explicar el concepto de ecuación lineal y su solución.

Ejemplificar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

Distinguir propiedades de Sistemas Equivalentes y su importancia en la resolución de sistemas de ecuaciones.

Definir la representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales. Aplicar los métodos de eliminación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Estructura de la Lección

Duración estimada de la lección: 110 minutos

Introducción (10 minutos):

Presentación del tema y su importancia.

Breve presentación sobre ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales en la vida real.

Definición y Clasificación (20 minutos):

Definición de sistemas de ecuaciones lineales.

Explicación de la clasificación en sistemas compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles.

Ejemplos ilustrativos.

Definición y Clasificación (20 minutos):

Explicación de los métodos de eliminación Gaussiana.

Ejemplos resueltos utilizando dichos métodos.

Resolución de Ejercicios (30 minutos):

Introducción a la representación de sistemas en forma matricial.

Cómo transformar un sistema en notación matricial.

Resolución de Ejercicios (30 minutos):

Los estudiantes resuelven ejercicios prácticos evaluados por la plataforma y bajo supervisión del instructor.

Método de Aprendizaje:

La lección se llevará a cabo de forma asincrónica, mediante los recursos habilitados se explicarán los conceptos clave y la propuesta de resolver ejemplos. Además, los recursos digitales, ejercicios interactivos y lecturas recomendadas para el aprendizaje autodirigido son concebidos para la integración de los conceptos teórico-prácticos de la lección. Los estudiantes también pueden realizar ejercicios prácticos adicionales durante la lección para aplicar lo que han aprendido. Tomaremos los fundamentos de la metodología de Pólya (1945), la cual se adapta a seis etapas: interpretación del problema (compresión y definición del problema), representación gráfica (generar el modelo matemático), búsqueda de estrategias, ejecución (desarrollo del modelo

matemático), valorar la solución (interpretación de resultados) y comunicación de la solución (evaluación de resultados).

Para esta lección se dará particular atención al planteamiento del problema, al modelo matemático y los métodos de solución.

Evaluación:

La evaluación de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales se llevará a cabo mediante los criterios:

Tarea (20%): Los estudiantes realizarán una tarea que incluirá preguntas sobre la definición, clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Examen (80%): Al final del módulo, los estudiantes completarán un examen que incluirá preguntas sobre la definición, clasificación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Consideraciones Importantes

Se animará a los estudiantes a buscar ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales en su vida diaria y a enriquecer sus observaciones durante la lección. Como sugerencia de plataformas con ejemplos de recursos que pueden ser consultados tenemos:

<https://www.mathplanet.com/education/algebra-2/matrices/using-matrices-when-solving-system-of-equations>

<https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra>

Se proporcionarán ejemplos con aplicaciones prácticas para ilustrar la relevancia de los sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas del mundo real.

Lección formativa

Objetivo de la lección

Esta lección comprende actividades formativas en el nivel de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS con los siguientes objetivos:

Explicar el concepto de ecuación lineal y su solución.

Ejemplificar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución.

Implementar una estrategia de solución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de determinantes y de eliminación Gaussiana.

Justificación temática

Los sistemas de ecuaciones lineales como modelo matemático son una parte fundamental del álgebra lineal y se utilizan para representar y resolver una variedad de problemas de matemáticas, ciencias e ingeniería, en especial:

Ingeniería de Control: Ayuda a determinar si un sistema es estable, inestable o marginalmente estable. Esto es esencial para el diseño y la optimización de controladores en sistemas como robots, procesos industriales y sistemas de navegación.

Física: Ayuda a determinar si un sistema físico tiene una solución única que describe su comportamiento o si puede tener múltiples soluciones. Esto es esencial para predecir y entender el movimiento de objetos y sistemas físicos.

Ingeniería Civil y Estructural: En el diseño de estructuras y edificios, la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales se utiliza para evaluar la estabilidad de las estructuras. Identificar si una estructura es estáticamente determinada o indeterminada es crucial para garantizar su seguridad y eficiencia.

Planeación de Transporte y Logística: En la gestión de flotas de vehículos y en la planificación de rutas de transporte, la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales es esencial para garantizar la eficiencia de las operaciones y la asignación de recursos.

Análisis de Datos: En estadística, la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales ayuda a determinar si un modelo estadístico tiene una solución única o si hay múltiples soluciones posibles. Esto es importante en análisis de regresión y en la interpretación de resultados.

Subtemas incluidos

1.1 Definiciones de ecuación lineal y de su solución

1.1.1 Definición de sistemas de ecuaciones lineales y su solución

1.3 Representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

1.4 El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas

Definiciones

Introducción

De manera conceptual tenemos que:

- Ecuación Lineal es una ecuación simple en la que las variables se relacionan linealmente, lo que significa que se pueden representar como una línea recta en un gráfico. Su solución implica encontrar valores de las variables del lado izquierdo de la ecuación que satisfagan el valor asignado en el lado derecho.
- La Solución de una Ecuación Lineal es el valor o conjunto de valores que hacen que la ecuación sea verdadera.

Definiciones

Una ecuación lineal es una ecuación algebraica de primer grado en una o más variables, donde cada término es una constante multiplicada por una variable elevada a la potencia de 1. Generalmente, tiene la siguiente forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Donde:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las variables
- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son los coeficientes de las variables
- b es el término constante

La solución de una ecuación lineal es el conjunto de valores de las variables que hacen que la ecuación sea verdadera. En otras palabras, es el conjunto de valores que satisface la ecuación dada.

Definiciones

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden clasificarse en tres tipos según la naturaleza de su solución:

1. Sistema Compatible Determinado: Tiene una única solución que satisface todas las ecuaciones en el sistema, es decir todas las líneas rectas del sistema se cortan en un solo punto.

2. Sistema Compatible Indeterminado: Tiene infinitas soluciones. Esto ocurre cuando las ecuaciones son linealmente dependientes y representan el mismo conjunto de rectas en el espacio y gráficamente es cuando las líneas rectas se enciman una sobre otra. Hay infinitos puntos de contacto.
3. Sistema Incompatible: No tiene solución. Esto significa que las ecuaciones son inconsistentes y no pueden satisfacerse simultáneamente, esto es, gráficamente cuando las rectas son paralelas, pues en este caso, jamás se cruzan.

Reducción de Sistemas

Introducción

Es el proceso de transformar un sistema de ecuaciones en uno equivalente pero más simple, en una forma escalonada o no, para facilitar la búsqueda de soluciones.

Definiciones

Hay tres operaciones básicas que se pueden realizar en un sistema de ecuaciones lineales para obtener sistemas equivalentes:

1. Intercambiar dos ecuaciones: Cambiar el orden de las ecuaciones en el sistema no cambia la solución.
2. Multiplicar una ecuación por un número no nulo: Multiplicar una ecuación por un número no nulo no cambia las soluciones del sistema. Si tienes una ecuación $ax + by = c$, se puede multiplicar toda la ecuación por $k \neq 0$ para obtener $kax + kby = kc$, lo cual representa la misma relación entre x e y .
3. Sumar o restar múltiplos de una ecuación de otra ecuación: Si se tienen dos ecuaciones $ax + by = c$ y $dx + ey = f$, se pueden sumar o restar múltiplos de estas ecuaciones para obtener una nueva ecuación que representa la misma relación lineal.

Los sistemas de ecuaciones lineales equivalentes son útiles porque permiten a los ingenieros, matemáticos y científicos trabajar con formas más convenientes de las ecuaciones para resolver problemas, sin cambiar la naturaleza del problema o su solución.

Aplicaciones de la reducción de sistemas de ecuaciones lineales:

- Análisis de circuitos eléctricos: En ingeniería eléctrica, se utilizan sistemas de ecuaciones lineales para modelar circuitos eléctricos. La reducción de ecuaciones permite analizar la corriente, el voltaje y la potencia en los componentes del circuito.
- Mecánica y dinámica de partículas: La reducción de sistemas de ecuaciones lineales se utiliza en problemas de física para determinar la posición, velocidad y aceleración de partículas en movimiento.
- Análisis de estructuras y vigas: En ingeniería civil y estructural, se aplican sistemas de ecuaciones lineales para determinar las fuerzas internas en

estructuras como vigas y puentes. La reducción simplifica estos sistemas y facilita su análisis.

- Estadística y análisis de datos: estadística, la reducción de sistemas de ecuaciones se utiliza para simplificar modelos de regresión y análisis de varianza, lo que facilita la interpretación de resultados.
- Economía y optimización: En economía, los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar relaciones económicas. La reducción simplifica estos modelos y facilita la toma de decisiones económicas.

En resumen, la reducción de sistemas de ecuaciones lineales es una herramienta esencial en matemáticas y en una variedad de disciplinas científicas e ingenieriles. Permite simplificar problemas complejos y resolver ecuaciones de manera más eficiente.

Concepto de la representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

Introducción

La representación matricial, consiste en transformar un sistema de ecuaciones en una notación de matriz, simplifica la resolución del sistema al permitir el uso de operaciones matriciales y la inversión de matrices.

Definición

La representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales es una técnica que simplifica la resolución de sistemas al utilizar matrices y álgebra lineal. Los sistemas se representan en forma matricial y se resuelven mediante operaciones matriciales. Aquí está la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales general:

$$Ax = b$$

O bien de manera explícita:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donde:

- A es la matriz de coeficientes del sistema
- x es el vector de incógnitas (las variables que estamos tratando de encontrar)
- b es el vector de términos constantes

El modelo nos indica que la multiplicación de la matriz A por el vector x , nos da como resultado el vector b .

Para resolver este sistema, podemos utilizar la inversa de la matriz A si es invertible, o aplicar métodos como la eliminación de Gauss-Jordan, el método de sustitución o el método de Cramer.

Método del máximo pivote

Introducción

El método del máximo pivote, también conocido como eliminación de Gauss con pivoteo parcial, es un algoritmo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la eliminación de variables. El objetivo es transformar el sistema en una forma de matriz diagonal para facilitar la resolución. Aquí están los pasos generales para explicar este método:

Definiciones

Supongamos que se tiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$, donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de incógnitas y b es el vector de términos constantes.

Paso 1: Inicialización

Comienza con la matriz aumentada $(A|b)$ y se elige un primer elemento (a_{ij}) como el "pivote inicial". Puede elegirse el elemento con el valor absoluto más grande en todas las columnas observadas como el pivote inicial.

Paso 2: Eliminación

Utilizar el pivote inicial escogido (a_{ij}) para eliminar todos los elementos debajo y/o arriba de él en la primera columna (la que le corresponda), de modo que todos los elementos debajo y/o arriba de (a_{ij}) se conviertan en ceros. Para hacer esto, se resta un múltiplo apropiado del renglón del pivote en la matriz, del segundo renglón a transformar y los subsecuentes. Esto se hace de manera que el(los) elemento(s) justo debajo y/o arriba del pivote se convierta(n) en cero.

Es recomendable que el elemento (a_{ij}) que es el pivote pueda transformarse a un valor numérico de uno lo que facilitará la obtención de las incógnitas del sistema.

Se repite el proceso para los demás elementos de la primera columna del pivote correspondiente, moviéndose hacia abajo y/o arriba según convenga.

Paso 3: Selección del próximo pivote

Después de completar la eliminación de los elementos perteneciente a la columna del primer pivote elegido, se busca el siguiente pivote. Se elige un nuevo elemento en otro renglón y otra columna como el nuevo pivote. Nuevamente, se elige el elemento con el valor absoluto más grande en la columna actual.

Paso 4: Eliminación

Se repite el proceso de eliminación para los elementos debajo y/o arriba del nuevo pivote en la segunda columna del pivote correspondiente. Asegurándose de que todos los elementos debajo y/o arriba del nuevo pivote se conviertan en ceros.

Paso 5: Repetición

Se continúa este proceso eligiendo y eliminando pivotes en orden hasta haber transformado la matriz en una forma reducida, con ceros por debajo de la diagonal principal.

Paso 6: Solución

Cuando se tiene una matriz reducida, se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales fácilmente. Como ya la diagonal principal consta de unos (1's) y hay ceros arriba y debajo de dicha diagonal, la solución es directa.

Paso 6 alternativo: Hacer transformaciones para obtener una matriz diagonal

Cuando se tiene una matriz diagonal, se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante transformaciones adicionales para obtener directamente los valores de las incógnitas restantes.

Este método permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera sistemática y eficiente. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el pivoteo parcial se utiliza para evitar divisiones entre cero o errores numéricos cuando se trabaja con matrices mal condicionadas.

Desarrollo

NOTAS

Presentación

Damos la bienvenida a estas notas, base de una lección de Álgebra Lineal, que se sumerge en el interesante mundo de los sistemas de ecuaciones lineales como modelo matemático y su aplicación práctica en la ingeniería. A lo largo de esta lección, profundizaremos en conceptos fundamentales que te proporcionarán la capacidad de resolver problemas de este tema y cómo se traduce en aplicaciones del mundo real.

Ecuación lineal y su solución

Problema 1

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

Un ejemplo que describe una ecuación lineal y su solución es el siguiente:

Un inversionista industrial dispone de un excedente en efectivo de 10 millones de dólares. En el mercado accionario se presenta la oportunidad de colocar su dinero en dos opciones para invertir: un portafolios diversificado que se valora en 2 millones de dólares y otro no diversificado de monto de 3 millones de dólares. ¿Cuál será la combinación de portafolios que podrá contratar el inversionista?

Sean:

x número de unidades del portafolios diversificado.

y número de unidades del portafolios no diversificado.

2. Generar el modelo matemático

Podemos considerar a la ecuación lineal que relaciona el costo del portafolios diversificado, el del portafolios no diversificado y la disponibilidad de dinero del inversionista:

$$2x + 3y = 10$$

Tiene una solución si podemos encontrar un par de valores para x e y que hagan que la ecuación $2x + 3y = 10$ sea verdadera.

3. Desarrollo del modelo matemático

Consideremos a: $x = 2$ e $y = 2$, como posibles soluciones.

Verificación

$$2x + 3y = 10$$

Ya que:

$$2(2) + 3(2) = 4 + 6 = 10, \text{ lo que satisface la ecuación.}$$

4. Interpretación de resultados

Sabemos que: $x = 2$ unidades del portafolios diversificado, $y = 2$ unidades del portafolios no diversificado, son posibles soluciones

5. Evaluación de resultados

Hay muchas otras combinaciones de valores de x e y que también satisfacen la ecuación. Por lo que, es recomendable hacer una amplia exploración de los posibles valores de las variables que satisfagan la ecuación. Por ejemplo, el inversionista podría contratar sólo cinco unidades del portafolios diversificado con su fondo de 10 millones de dólares, lo que también satisfaría la ecuación.

6. Comunicación de la solución

Los valores $x = 2$ unidades del portafolios diversificado, $y = 2$ unidades del portafolios no diversificado, satisfacen la ecuación $2x + 3y = 10$. Sin embargo, hay muchas otras combinaciones de valores de x e y que también satisfarían la ecuación.

Sistemas de ecuaciones lineales y su solución

Problema 2

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

Para ejemplificar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, nos valdremos del siguiente caso:

La compañía Makuoshita realiza el ensamblado de componentes electrónicos: para la planta de Osaka hay disponibilidad de 8 horas de producción, el proceso de ensamblado de microprocesadores en la placa lleva 2 horas y el de convertidores digitales 3 horas. En la planta de Ōizumi existen 6 horas de producción disponibles, el proceso de ensamblado de microprocesadores en la placa toma 4 horas y el de convertidores digitales tiene déficit de una hora. ¿Cuál es la asignación simultánea de horas de trabajo para los procesos de ensamblado de microprocesadores y de convertidores digitales en ambas plantas que satisfagan la disponibilidad de recursos fabriles?

Sean:

x número de horas de proceso de ensamblado de microprocesadores

y número de horas de proceso de ensamblado de convertidores digitales

8 horas de proceso disponibles en la planta de Osaka

6 horas de proceso disponibles en la planta de Ōizumi

2. Generar el modelo matemático

Para la planta de Osaka, tenemos esta expresión en los procesos de ensamblado:

$$2x + 3y = 8$$

Para la planta de Ōizumi, tenemos esta expresión en los procesos de ensamblado:

$$4x - y = 6$$

Como debemos saber cuál es la asignación simultánea de horas de trabajo para los procesos de ensamblado de microprocesadores y de convertidores digitales en ambas plantas que satisfagan la disponibilidad de recursos fabriles, debemos expresar las relaciones anteriores como un sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 3y = 8 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$4x - y = 6 \quad (\text{ecuación 2})$$

Para resolver este tipo de problemas se utilizan métodos como la eliminación, sustitución, matrices, determinantes y métodos numéricos.

En este caso, podemos utilizar el **método de eliminación**, en el sistema:

$$2x + 3y = 8$$

$$4x - y = 6$$

3. Desarrollo del modelo matemático

Primero, vamos a eliminar una de las variables, por ejemplo, eliminaremos la variable y . Para hacerlo, multiplicamos la ecuación (2) por 3, para que los coeficientes de y en ambas ecuaciones se cancelen cuando las sumemos:

Multiplicamos la ecuación (2) por 3:

$$12x - 3y = 18 \quad (\text{ecuación 2 multiplicada por (3)})$$

$$2x + 3y = 8 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$12x - 3y = 18 \quad (\text{ecuación 2})$$

Ahora, sumamos la ecuación (1) y la ecuación (2) para eliminar y , esto nos da:

$$14x = 26 \quad (\text{suma ecuación 1 + ecuación 2})$$

Ahora, resolvemos para x :

$$x = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

Ahora que tenemos el valor de x , podemos sustituirlo en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de y . Usaremos la ecuación (1):

$$2x + 3y = 8 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$2\left(\frac{13}{7}\right) + 3y = 8$$

$$\frac{26}{7} + 3y = 8$$

$$26 + 21y = 56$$

Restamos 26 de ambos lados:

$$21y = 30$$

Esto nos da:

$$y = \frac{30}{21}$$

Finalmente, simplificamos para y :

$$y = \frac{10}{7}$$

4. Interpretación de resultados

Entonces, la solución del sistema de ecuaciones es única: $x = \frac{13}{7}$, $y = \frac{10}{7}$.

Verificación

Sustituyendo: $x = \frac{13}{7}$, $y = \frac{10}{7}$, en el sistema:

$$2x + 3y = 8 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$12x - 3y = 18 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$2\left(\frac{13}{7}\right) + 3\left(\frac{10}{7}\right) = 8$$

$$12\left(\frac{13}{7}\right) - 3\left(\frac{10}{7}\right) = 18$$

$$\frac{26}{7} + \frac{30}{7} = 8$$

$$\frac{156}{7} - \frac{30}{7} = 18$$

$$\frac{56}{7} = 8 \text{ (ecuación 1)}$$

$$\frac{126}{7} = 18 \text{ (ecuación 2)}$$

5. Evaluación de resultados

Lo anterior demuestra que $x = \frac{13}{7}$ son horas destinadas al ensamblado de microprocesadores mientras que, $y = \frac{10}{7}$ son las horas destinadas al ensamblado de convertidores digitales que satisfacen el sistema de ecuaciones lineales.

6. Comunicación de la solución

Los valores en horas de $x = \frac{13}{7}$, $y = \frac{10}{7}$; hacen verdadero el sistema de ecuaciones lineales.

Representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

Problema 3

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

LATINCASA surte concreto premezclado a sus clientes. En sus instalaciones trabaja con tres unidades mezcladoras, de acuerdo con los controles de calidad se detecta la necesidad de mejorar la resistencia obtenida del concreto producido en las unidades. Un estudio físico químico recomienda la utilización de tres aditivos que modifican las propiedades del concreto de cada unidad mezcladora, los registros de calidad aportan lo siguiente:

Unidad mezcladora	Formulación requerida de aditivos en el concreto por mezcla			
	Aditivo 1 Inclisor de aire	Aditivo 2 Acelerante de resistencia	Aditivo 3 Disipador de calor	Índice de incremento de resistencia en la unidad
1	1	1	-1	0
2	2	1	1	6
3	-1	-1	2	1

¿Cuál es la asignación simultánea de aditivos de concreto para las tres unidades de mezclado que satisfagan el índice de incremento de resistencia requerido?

Sean:

x cantidad requerida de aditivo 1 inclisor de aire en la formulación

y cantidad requerida de aditivo 2 acelerante de resistencia en la formulación

z cantidad requerida de aditivo 3 disipador de calor en la formulación

Índice de incremento de resistencia en la unidad de mezclado 1=0

Índice de incremento de resistencia en la unidad de mezclado 2=6

Índice de incremento de resistencia en la unidad de mezclado 3=1

Como debemos saber cuál es la asignación simultánea de aditivos de concreto en las tres unidades de mezclado que satisfagan el índice de incremento de resistencia del concreto por cada unidad, podemos expresar las relaciones anteriores como un sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y + z = 6$$

$$-x - y + 2z = 1$$

2. Generar el modelo matemático

Para ejemplificar el concepto de representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales, podemos resolver el siguiente sistema:

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y + z = 6$$

$$-x - y + 2z = 1$$

Podemos representar el sistema de ecuaciones lineales de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Desarrollo del modelo matemático

Utilizaremos en este sistema el **método de Cramer** para encontrar su solución.

- Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$|A| = 1(2 + 1) - 1(4 + 1) - 1(-2 + 1) = 3 - 5 + 1 = -1$$

- Para obtener el valor de la variable x se sustituyen los valores de la columna de resultados (vector de resultados) por los que corresponderían a x , obteniendo un determinante en el numerador dividido entre el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-1} =$$

- Se simplifica y se obtiene x :

$$x = \frac{-1(12 - 1) - 1(-6 - 1)}{-1} = \frac{-1(11) - 1(-7)}{-1} = \frac{-11 + 7}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

- Para obtener el valor de la variable y se sustituyen los valores de la columna de resultados (vector de resultados) por los que corresponderían a y , obteniendo un determinante en el numerador dividido entre el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} =$$

- Se simplifica y se obtiene y :

$$y = \frac{1(12 - 1) - 1(2 + 6)}{-1} = \frac{1(11) - 1(8)}{-1} = \frac{11 - 8}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

- Para obtener el valor de la variable z se sustituyen los valores de la columna de resultados (vector de resultados) por los que corresponderían a z , obteniendo un determinante en el numerador dividido entre el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} =$$

- Se simplifica y se obtiene z :

$$z = \frac{1(1 + 6) - 1(2 + 6)}{-1} = \frac{1(7) - 1(8)}{-1} = \frac{7 - 8}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

4. Interpretación de resultados

Los valores obtenidos que resuelven el sistema son: $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$, los cuales satisfarán la formulación requerida de aditivos en el concreto por mezcla en las tres unidades.

5. Evaluación de resultados

Lo anterior demuestra que si sustituimos los valores: $x = 4$, $y = -3$ y $z = 1$ satisfarán el sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y - z = 0$$

$$2x + y + z = 6$$

$$-x - y + 2z = 1$$

Sustituyendo:

$$4 - 3 - 1 = 0$$

$$2(4) - 3 + 1 = 6$$

$$-4 + 3 + 2 = 1$$

6. Comunicación de la solución

Lo anterior demuestra que $x = 4$ (aditivo inclusor de aire), $y = -3$ (aditivo acelerante de resistencia) y $z = 1$ (aditivo disipador de calor) son los valores de la formulación simultánea de aditivos en las mezclas de concreto por unidad que satisfacen el sistema de ecuaciones lineales. Además, el método de Cramer es solo uno de los disponibles para obtener soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

Problema 4

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

Logística y Proyectos Especiales de Movilidad (LOPEM) provee a un nuevo cliente soluciones de transporte. Cuenta con cuatro tipos de vehículo para dar el servicio: camioneta panel, pick up, camión de 3.5 toneladas y camión de 10 toneladas. La infraestructura de LOPEM cuenta con cuatro centros de distribución donde se alberga el parque vehicular. Un estudio de origen destino detecta en los centros de distribución la disponibilidad de vehículos para servir al nuevo cliente, los registros del estudio muestran lo siguiente:

Centro de distribución	Parque vehicular en el centro de distribución.				
	Camioneta panel	Pick up	Camión 3.5 ton.	Camión 10 ton.	Vehículos disponibles en el centro de distribución
1	1	1	1	1	5
2	2	1	3	-2	6
3	4	3	1	-1	2
4	-2	-2	2	2	10

¿Cuántos vehículos se necesitan en los cuatro centros de distribución para dar el servicio de transporte requerido?

Sean:

x cantidad de camionetas

y cantidad de pick ups

z cantidad de camiones de 3.5 toneladas

t cantidad de camiones de 10 toneladas

Vehículos disponibles para el centro de distribución 1=5

Vehículos disponibles para el centro de distribución 2=6

Vehículos disponibles para el centro de distribución 3=2

Vehículos disponibles para el centro de distribución 4=10

Como debemos saber el número de vehículos para los cuatro centros de distribución que permitan dar el servicio de transporte requerido, podemos expresar las relaciones anteriores como un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x + y + z + t &= 5 \\2x + y + 3z - 2t &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x + 3y + z - t &= 2 \\ -2x - 2y + 2z + 2t &= 10\end{aligned}$$

2. Generar el modelo matemático

Realizaremos operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida de nuestro sistema, resolveremos por **eliminación Gaussiana** el sistema:

$$\begin{aligned}x + y + z + t &= 5 \\ 2x + y + 3z - 2t &= 6 \\ 4x + 3y + z - t &= 2 \\ -2x - 2y + 2z + 2t &= 10\end{aligned}$$

x	y	z	t	$=$
1	1	1	1	5
2	1	3	-2	6
4	3	1	-1	2
-2	-2	2	2	10

La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

3. Desarrollo del modelo matemático

Realizamos operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

Eliminaremos los elementos $a_{21} = 2$, $a_{31} = 4$ y $a_{41} = -2$.

Renglón pivote renglón 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Para eliminar $a_{21} = 2$, multiplicaremos el renglón 1 por -2 y luego lo sumaremos al renglón 2 para obtener un "nuevo" renglón 2.

	x	y	z	t	$=$
renglón 1	1	1	1	1	5
renglón 1 por (-2)	-2	-2	-2	-2	-10

renglón 2	2	1	3	-2	6
Suma	0	-1	1	-4	-4
“nuevo” renglón 2	0	-1	1	-4	-4

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Seguimos realizando operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

Eliminaremos los elementos $a_{31} = 4$ y $a_{41} = -2$.

Renglón pivote renglón 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Para eliminar $a_{31} = 4$, multiplicaremos el renglón 1 por -4 y luego lo sumaremos al renglón 3 para obtener un “nuevo” renglón 3.

	x	y	z	t	=
renglón 1	1	1	1	1	5
renglón 1 por (-4)	-4	-4	-4	-4	-20
renglón 3	4	3	1	-1	2
Suma	0	-1	-3	-5	-18
“nuevo” renglón 3	0	-1	-3	-5	-18

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -18 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Seguimos realizando operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

Eliminaremos el elemento $a_{41} = -2$.

Renglón pivote renglón 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -18 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

Para eliminar $a_{41} = -2$, multiplicaremos el renglón 1 por 2 y luego lo sumaremos al renglón 4 para obtener un “nuevo” renglón 4.

	x	y	z	t	$=$
renglón 1	1	1	1	1	5
renglón 1 por (2)	2	2	2	2	10
renglón 4	-2	-2	2	2	10
Suma	0	0	4	4	20
“nuevo” renglón 4	0	0	4	4	20

Sistema resultante:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Seguimos realizando operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

Eliminaremos el elemento $a_{23} = -1$.

Renglón pivote 2º. renglón

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Para eliminar $a_{23} = -1$, multiplicaremos el renglón 2 por -1 y luego lo sumaremos al renglón 3 para obtener un “nuevo” renglón 3.

	x	y	z	t	$=$
renglón 2	0	-1	1	-4	-4
renglón 2 por (-1)	0	1	-1	4	4
renglón 3	0	-1	-3	-5	-18
Suma	0	0	-4	-1	-14
“nuevo” renglón 3	0	0	-4	-1	-14

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Seguimos realizando operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

Eliminaremos el elemento $a_{43} = 4$.

Renglón pivote 3er. renglón

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \end{array} \right)$$

Para eliminar $a_{43} = 4$, sumaremos los renglones 3 y 4 para obtener un “nuevo” renglón 4.

	x	y	z	t	=
renglón 3	0	0	-4	-1	-14
renglón 4	0	0	4	4	20
Suma	0	0	0	3	6
“nuevo” renglón 4	0	0	0	3	6

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Podemos apreciar en el sistema resultante que hemos obtenido la matriz en forma escalonada reducida.

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Procedemos a despejar el valor de la variable t en el renglón 4 del sistema:

$$3t = 6$$

$$t = \frac{6}{3}$$

$$t = 2$$

Sabiendo que:

$$t = 2$$

Procedemos a sustituir el valor de la variable t en el renglón 3 del sistema, para obtener el valor de z :

$$-4z - t = -14$$

$$-4z - (2) = -14$$

$$-4z - 2 = -14$$

$$-4z = -12$$

$$z = \frac{12}{4} = 3$$

Habiendo obtenido:

$$t = 2 \text{ y } z = 3$$

Sustituiremos los valores de las variables t y z en el renglón 2 del sistema, para obtener el valor de y :

$$-y + z - 4t = -4$$

$$-y + (3) - 4(2) = -4$$

$$-y + 3 - 8 = -4$$

$$-y - 5 = -4$$

$$y = -1$$

Conociendo que:

$$y = -1, t = 2 \text{ y } z = 3$$

Sustituiremos los valores de las variables y , t y z en el renglón 1 del sistema, para obtener el valor de x :

$$x + y + z + t = 5$$

$$x - 1 + 3 + 2 = 5$$

$$x + 4 = 5$$

$$x = 1$$

4. Interpretación de resultados

Los valores obtenidos que resuelven el sistema son: $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$ y $t = 2$.

x 1, cantidad de camionetas

y -1, cantidad de pick ups., corresponden a la única cantidad negativa del resultado

z 3, cantidad de camiones de 3.5 toneladas

t 2, cantidad de camiones de 10 toneladas

5. Evaluación de resultados

Lo anterior demuestra que si sustituimos los valores: $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$ y $t = 2$, satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}x + y + z + t &= -5 \\2x + y + 3z - 2t &= -6 \\4x + 3y + z - t &= -2 \\-2x - 2y + 2z + 2t &= -10\end{aligned}$$

6. Comunicación de la solución

Lo anterior demuestra que $x = 1$ cantidad de camionetas, $y = -1$ es la cantidad de pick ups., corresponden a la única cantidad negativa del resultado., $z = 3$ cantidad de camiones de 3.5 toneladas y $t = 2$ cantidad de camiones de 10 toneladas, los valores obtenidos satisfacen el sistema de ecuaciones lineales. Además, el método de reducción de Gauss es solo uno de los disponibles para obtener soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

La representación y solución matricial simplifica el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, especialmente cuando se trabaja con sistemas más grandes y complejos. Finalmente hemos resuelto el sistema.

Representación y solución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales

Problema 5

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

Tres distritos de riego van a recibir un presupuesto de 9450 millones de pesos de manera directa y proporcional a su población. Los distritos de riego se denominan: Torreblanca, Lomas y Miraflores. La suma de las poblaciones de Torreblanca y Lomas excede en 3 mil habitantes el doble de la población de Miraflores. Se sabe que la suma de los habitantes de los tres distritos de riego es de 45 mil habitantes. Adicionalmente, la asignación presupuestal que Torreblanca recibe es de 420 millones más que Miraflores. La autoridad de irrigación desea saber la población de cada distrito de riego y la correspondiente asignación presupuestal.

Sean:

x habitantes de Torreblanca (en miles)

y habitantes de Lomas (en miles)

z habitantes de Miraflores (en miles)

La ecuación que indica la suma total de habitantes (en miles) para los tres distritos de riego es:

$$x + y + z = 45 \quad (1)$$

La ecuación que indica la suma de habitantes de Torreblanca y Lomas (en miles) que excede en 3 mil habitantes el doble de la población de Miraflores es:

$$x + y = 3 + 2z \quad (2)$$

$$x + y - 2z = 3 \quad (2)$$

El monto total por repartir de 9450 millones multiplicado por el número de habitantes de Torreblanca, dividido entre la suma de la población de los tres distritos de riego; corresponde a la ecuación que indica la razón de reparto proporcional a la población:

$$\frac{9450 x}{45} = 210 x$$

El monto total por repartir de 9450 millones multiplicado por el número de habitantes de Lomas, dividido entre la suma de la población de los tres distritos de riego; corresponde a la ecuación que indica la razón de reparto proporcional a la población:

$$\frac{9450 y}{45} = 210 y$$

El monto total por repartir de 9450 millones multiplicado por el número de habitantes de Miraflores, dividido entre la suma de la población de los tres distritos de riego; corresponde a la ecuación que indica la razón de reparto proporcional a la población:

$$\frac{9450z}{45} = 210z$$

Tomando en consideración la razón de reparto proporcional para Torreblanca, la ecuación que indica que recibe 420 millones más que Miraflores es:

$$210x = 420 + 210z \quad (3)$$

$$x - z = 2 \quad (3)$$

Nuestra tarea será encontrar la población de cada distrito de riego y la correspondiente asignación presupuestal, podemos expresar las relaciones anteriores como un sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + z = 45 \quad (1)$$

$$x + y - 2z = 3 \quad (2)$$

$$x - z = 2 \quad (3)$$

La matriz ampliada del sistema es:

x	y	z	$=$
1	1	1	45
1	1	-2	3
1	0	-1	2

2. Generar el modelo matemático

Resolver el sistema por el **método del máximo pivote**, realizaremos operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma diagonal reducida de nuestro sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

3. Desarrollo del modelo matemático

Paso 1: Inicialización

Se comienza con la matriz aumentada $(A|b)$ y se elige un primer elemento (a_{ij}) como el "pivote inicial". El pivote inicial será $a_{23} = -2$, por ser el elemento con el valor absoluto más grande en todas las columnas observadas.

Realizamos operaciones elementales por renglón para obtener la matriz en forma diagonal reducida.

Transformaremos al elemento $a_{23} = -2$ en $a_{23} = 1$.

pivote $a_{23} = -2$

$\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Para transformar $a_{23} = -2$ en 1, dividiremos el renglón 2 entre -2 para obtener un “nuevo” renglón 2.

	x	y	z	$=$
renglón 2	1	1	-2	3
renglón 2 entre (-2)	-1/2	-1/2	1	-3/2
“nuevo” renglón 2	-1/2	-1/2	1	-3/2

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \textcircled{1} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

pivote $a_{23} = 1$

Es recomendable que el elemento (a_{ij}) que es el pivote pueda transformarse a un valor numérico de uno lo que facilitará la obtención de las incógnitas del sistema.

Paso 2: Eliminación

Utilizar el pivote inicial escogido ($a_{23} = 1$) para eliminar todos los elementos arriba y abajo de él en la tercera columna, de modo que todos los elementos arriba y abajo de ($a_{23} = 1$) se conviertan en ceros.

Transformaremos al elemento $a_{13} = 1$ en $a_{13} = 0$.

Para hacer esto, se resta del primer renglón el segundo renglón. Esto se hace de manera que el elemento justo arriba del pivote se convierta en cero.

Para transformar $a_{13} = 1$ en 0, restaremos al renglón 1 el renglón 2 para obtener un “nuevo” renglón 1.

	x	y	z	$=$
renglón 1	1	1	1	45
menos renglón 2	+1/2	+1/2	-1	+3/2
“nuevo” renglón 1	3/2	3/2	0	93/2

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{93}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \textcircled{1} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Transformaremos al elemento $a_{33} = -1$ en $a_{33} = 0$.

Para hacer esto, se suma el tercer renglón con el segundo renglón. Esto se hace de manera que el elemento justo abajo del pivote se convierta en cero.

Para transformar $a_{33} = -1$ en 0, sumaremos al renglón 3 el renglón 2 para obtener un “nuevo” renglón 3.

	x	y	z	$=$
renglón 3	1	0	-1	2
más renglón 2	-1/2	-1/2	1	-3/2
“nuevo” renglón 3	1/2	-1/2	0	1/2

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{93}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \textcircled{1} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Paso 3: Selección del próximo pivote

Después de completar la eliminación de los elementos perteneciente a la columna del primer pivote elegido, se busca el siguiente pivote. Se elige un nuevo elemento en otro renglón y otra columna como el nuevo pivote. Nuevamente, se elige el elemento con el valor absoluto más grande de las columnas restantes. En este momento podemos escoger $a_{11} = \frac{3}{2}$, o bien $a_{12} = \frac{3}{2}$.

El nuevo pivote es el elemento $a_{12} = \frac{3}{2}$:

pivote $a_{12} = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & \textcircled{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{93}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$

Transformaremos al elemento $a_{12} = \frac{3}{2}$ en $a_{12} = 1$.

Para hacer esto, multiplicaremos el primer renglón por $2/3$. Esto se hace de manera que el elemento pivote se convierta en uno.

Para transformar $a_{12} = \frac{3}{2}$ en 1, multiplicaremos el primer renglón por $2/3$ para obtener un “nuevo” renglón 1.

	x	y	z	$=$
renglón 1	3/2	3/2	0	93/2

renglón 1 por 2/3	1	1	0	31
“nuevo” renglón 1	1	1	0	31

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 31 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Paso 4: Eliminación

Se repite el proceso para los demás elementos de la columna del pivote correspondiente, moviéndose hacia abajo. Asegurándose de que todos los elementos abajo del nuevo pivote se conviertan en ceros.

Transformaremos al elemento $a_{23} = -\frac{1}{2}$ en $a_{23} = 0$.

Para hacer esto, dividiremos el primer renglón entre 2 y lo sumaremos al renglón 2.

Para transformar $a_{23} = -\frac{1}{2}$ en 0, dividiremos el primer renglón entre 2 y lo sumaremos al renglón 2 para obtener un “nuevo” renglón 2.

	x	y	z	$=$
renglón 1	1	1	0	31
renglón 1 entre 2	1/2	1/2	0	31/2
Más renglón 2	-1/2	-1/2	1	-3/2
“nuevo” renglón 2	0	0	1	14

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Para transformar $a_{32} = -\frac{1}{2}$ en 0, dividiremos el primer renglón entre 2, luego lo sumaremos al renglón 3 para obtener un “nuevo” renglón 3.

	x	y	z	$=$
renglón 1	1	1	0	31
renglón 1 entre 2	1/2	1/2	0	31/2
Más renglón 3	1/2	-1/2	0	1/2
“nuevo” renglón 3	1	0	0	16

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \end{array} \right)$$

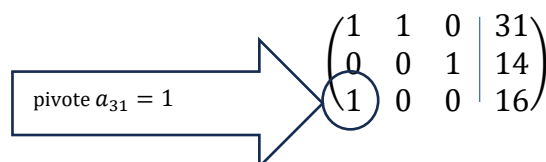
Paso 5: Repetición

Se continúa este proceso eligiendo y eliminando pivotes en orden hasta haber transformado la matriz en forma diagonal.

Selección del próximo pivote

Después de completar la eliminación de los elementos perteneciente a la columna del segundo pivote elegido, se busca el siguiente pivote. Se elige un nuevo elemento en otro renglón y otra columna como el nuevo pivote. Nuevamente, se elige el elemento con el valor absoluto más grande de las columnas restantes.

El nuevo pivote es el elemento $a_{31} = 1$:



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 16 \end{array} \right)$$

Transformaremos al elemento $a_{12} = 1$ en $a_{12} = 0$.

Para hacer esto, restaremos del tercer el renglón 1. Esto se hace de manera que el elemento arriba del pivote se convierta en cero.

Para transformar $a_{12} = 1$ en 0, restaremos del tercer el renglón 1. Esto se hace de manera que el elemento arriba del pivote se convierta en cero, para obtener un “nuevo” renglón 1.

	x	y	z	$=$
renglón 3	1	0	0	16
menos renglón 1	-1	-1	0	-31
“nuevo” renglón 1	0	-1	0	-15

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

Paso 6 alternativo: Hacer transformaciones para obtener una matriz diagonal

Cuando se tiene una matriz diagonal, se puede resolver el sistema de ecuaciones lineales mediante transformaciones adicionales para obtener directamente los valores de las incógnitas restantes.

Cambiaremos el renglón 3 al renglón 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -1 & 0 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

Y el renglón 2 lo multiplicaremos por menos uno.

Sistema resultante:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

4. Interpretación de resultados

Los valores obtenidos que resuelven el sistema son: $x = 16$, $y = 15$, $z = 14$, los cuales corresponden a la población de cada distrito de riego y con esos valores la asignación presupuestal.

5. Evaluación de resultados:

Lo anterior demuestra que si sustituimos los valores: $x = 16$, $y = 15$ y $z = 14$ satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$x + y + z = 45 \quad (1)$$

$$x + y - 2z = 3 \quad (2)$$

$$x - z = 2 \quad (3)$$

Sustituyendo:

$$16 + 15 + 14 = 45 \quad (1)$$

$$16 + 15 - 2(14) = 3 \quad (2)$$

$$16 - 14 = 2 \quad (3)$$

Finalmente, la asignación presupuestal será:

Distrito de riego:	Población en miles:	Expresión matemática de asignación presupuestal $210 * (\text{población})$
Torreblanca	16	3360 millones
Lomas	15	3150 millones
Miraflores	14	2940 millones
Suma	45	9450 millones

6. Comunicación de la solución

Lo anterior demuestra que $x = 16$ (población en miles de Torreblanca), $y = 15$ (población en miles de Lomas) y $z = 14$ (población en miles de Miraflores) son los valores de la asignación simultánea que permiten cumplir con las necesidades y condiciones planteadas.

El método del máximo pivote permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera sistemática y eficiente. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el pivoteo parcial se utiliza para evitar divisiones entre cero o errores numéricos cuando se trabaja con matrices mal condicionadas.

La representación y solución matricial simplifica el proceso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, especialmente cuando se trabaja con sistemas más grandes y complejos.

Sistema de ecuaciones lineales utilizado como un modelo matemático

Problema 6

Desarrollo

1. Compresión y definición del problema

Para ejemplificar el concepto de un sistema de ecuaciones lineales utilizado como un modelo matemático, es trascendente considerar que se pueden representar problemas del mundo real en los que se expresan relaciones lineales entre diferentes variables. En este contexto, las ecuaciones lineales son una forma de describir cómo una serie de cantidades están relacionadas entre sí. Aquí tienes un ejemplo numérico resuelto:

Imagina que tienes dos tipos de frutas: manzanas y plátanos. Quieres comprar algunas manzanas y plátanos, pero estás limitado por dos restricciones: el costo total de la compra y el número total de frutas que puedes comprar. Las manzanas cuestan \$0.50 cada una, los plátanos cuestan \$0.25 cada uno, y tienes un presupuesto de \$5 para gastar. Además, solo puedes comprar un total de 12 frutas.

2. Generar el modelo matemático

Para modelar este problema, primero definimos nuestras variables:

- x : el número de manzanas que compras
- y : el número de plátanos que compras

A continuación, escribimos las ecuaciones que describen las restricciones del problema:

1. Restricción del presupuesto: El costo total de las manzanas y los plátanos no debe superar \$5.

$$0.5x + 0.25y \leq 5$$

2. Restricción del número total de frutas: No puedes comprar más de 12 frutas en total.

$$x + y \leq 12$$

3. Desarrollo del modelo matemático

Estas dos ecuaciones forman el sistema de ecuaciones lineales. Ahora, vamos a **resolverlo gráficamente** para encontrar la solución.

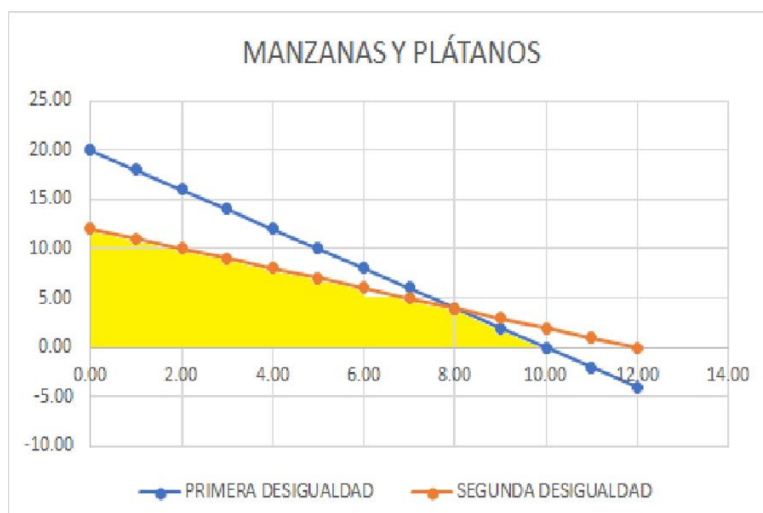
Graficamos las dos desigualdades en un plano cartesiano:

Primera desigualdad:

$$y \leq -2x + 20$$

Segunda desigualdad:

$$y \leq 12 - x$$



La región sombreada en amarillo del gráfico que está por debajo de ambas líneas representa las soluciones factibles. A continuación, encontramos los puntos de intersección de las dos líneas, que son (8, 4) y (8, 4). Ahora, evaluamos estas coordenadas en ambas desigualdades:

Para el punto (8, 4):

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 0.5x + 0.25y \leq 5 \\
 & 0.5(8) + 0.25(4) \leq 5 \\
 & 4 + 1 \leq 5 \text{ (Dentro del presupuesto)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & x + y \leq 12 \\
 & 8 + 4 \leq 12 \text{ (Cumple con el límite de frutas)}
 \end{aligned}$$

4. Interpretación de resultados

Los valores obtenidos que resuelven el sistema son: $x = 8$ (manzanas), $y = 4$ (plátanos).

5. Evaluación de resultados

Lo anterior demuestra que si sustituimos los valores: $x = 8$, $y = 4$, satisfacen el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 & 0.5(8) + 0.25(4) \leq 5 \\
 & 8 + 4 \leq 12
 \end{aligned}$$

6. Comunicación de la solución

El punto (8, 4) es la única solución factible. Esto significa que debes comprar 8 manzanas y 4 plátanos para cumplir con tus restricciones de presupuesto y cantidad de frutas.

Ejercicios Prácticos: Los estudiantes resolverán ejercicios durante la lección y se evaluará su capacidad para aplicar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Actividades formativas

Tarea

Tarea (20% de la lección): En la siguiente actividad podrás comprobar los conocimientos adquiridos anteriormente y su aplicación en la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

Evaluación sumativa (solución de problemas)

Examen (80% de la lección): Al final del módulo, los estudiantes completarán un examen que incluirá la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN. En la siguiente actividad pondrás comprobar los conocimientos adquiridos anteriormente y su aplicación en un caso práctico:

Problema de examen

50 reactivos= 100 PUNTOS

Anexo de Reforzamiento

En la siguiente actividad pondrás complementar los conocimientos adquiridos anteriormente recordando las siguientes definiciones:

1	Una ecuación lineal es:	Una ecuación algebraica de primer grado en una o más variables, donde cada término es una constante multiplicada por una variable elevada a la potencia de 1.
2	Un sistema de ecuaciones lineales es:	Un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que involucran las mismas variables. Estas ecuaciones se utilizan para describir relaciones lineales entre variables en situaciones en las que se requieren múltiples condiciones o restricciones para ser satisfechas simultáneamente.
3	Método de Eliminación (o Reducción) de Gauss consiste en:	Este método implica eliminar una de las variables en un sistema de ecuaciones lineales al sumar o restar múltiplos adecuados de las ecuaciones. El objetivo es convertir una o más ecuaciones en una forma en la que una variable pueda resolverse fácilmente. Luego, se repite el proceso para eliminar todas las variables, resolviendo así el sistema. El método de Gauss es especialmente útil para sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres ecuaciones.
4	Método de Eliminación por Sustitución:	En lugar de eliminar una variable sumando o restando ecuaciones, este método implica despejar una de las variables en términos de las otras variables en una ecuación y luego sustituir esta expresión en las otras ecuaciones. Esto reduce el número de incógnitas en el sistema, facilitando su resolución.
5	Método de Cramer:	Este método se basa en la regla de Cramer para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Requiere que se calcule el determinante de la matriz de coeficientes y determinantes auxiliares que se derivan de la matriz original. Es más adecuado para sistemas pequeños y cuadrados y permite

		encontrar las soluciones en términos de determinantes.
6	Método de Matriz Inversa:	Este método utiliza matrices y la inversa de la matriz de coeficientes del sistema. Se representa el sistema de ecuaciones en forma matricial $Ax = b$, donde A es la matriz de coeficientes, x es el vector de incógnitas y b es el vector de términos constantes. Si A es una matriz invertible, se puede encontrar la solución multiplicando ambos lados por la inversa de A , resultando que $x = A^{-1}b$.
7	Método de Reducción a la Forma Escalonada (o Forma Normal):	Este método busca simplificar el sistema reorganizando las ecuaciones para llevarlo a una forma escalonada o triangular superior. En esta forma, es fácil resolver el sistema mediante sustitución hacia atrás.
8	Método de Descomposición LU:	Este método descompone la matriz de coeficientes A en dos matrices L y U , donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. Luego, se resuelve el sistema en dos etapas: primero, se resuelve $Ly = b$ para encontrar y , y luego se resuelve $Ux = y$ para encontrar x . Este método es útil para sistemas de ecuaciones grandes y permite ahorrar tiempo al resolver sistemas similares con diferentes vectores de términos constantes.
9	Un sistema de ecuaciones lineales con n ecuaciones y n incógnitas. El sistema se puede representar en forma matricial de la siguiente manera:	$Ax = b$
10	Si en el sistema $Ax = b$, la matriz A es invertible (es decir, tiene determinante distinto de cero), entonces:	Podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por la inversa de A para aislar x : $x = A^{-1}b$. Donde A^{-1} es la inversa de la matriz A .

Recuerda lo siguiente de los métodos:

1. Sustitución:

Consiste en: Despejar una variable en una ecuación y sustituirla en la otra.

Ventajas: Sencillo y directo para sistemas pequeños.

Desventajas: Puede ser tedioso para sistemas grandes o con coeficientes complejos.

2. Igualación:

Consiste en: Igualar las expresiones de una misma variable en ambas ecuaciones.

Ventajas: Similar a la sustitución, pero puede ser más eficiente en algunos casos.

Desventajas: Requiere manipulación algebraica para obtener una ecuación con una sola variable.

3. Reducción:

Consiste en: Eliminar una variable sumando o restando múltiplos de una ecuación a la otra.

Ventajas: Eficiente para sistemas con coeficientes sencillos.

Desventajas: Puede ser complicado para sistemas con coeficientes complejos.

4. Regla de Cramer:

Consiste en: Usar determinantes para calcular los valores de las variables.

Ventajas: Útil para sistemas con cualquier número de variables y ecuaciones.

Desventajas: Requiere conocimientos de teoría de matrices y determinantes.

5. Métodos matriciales:

Consisten en: Representar el sistema como una matriz y utilizar operaciones matriciales para resolverlo.

Ventajas: Eficientes para sistemas grandes o con coeficientes complejos.

Desventajas: Requieren conocimientos de álgebra lineal y software especializado.

Conclusiones

Un buen modelo matemático:

Reduce un problema complejo a sus elementos esenciales, facilitando su comprensión. Ofrece una base para pronosticar el comportamiento futuro del sistema o fenómeno modelado.

Facilita la evaluación de diferentes opciones y la elección de la más adecuada.

Permite compartir información y conocimiento de forma precisa.

Para construir un buen modelo matemático, es fundamental tener en cuenta:

Objetivo: ¿Qué se quiere estudiar o predecir?

Variables: ¿Cuáles son los factores relevantes que influyen en el sistema?

Relaciones: ¿Cómo se interconectan las variables?

Validación: ¿El modelo refleja fielmente la realidad?

En esta lección, se han explorado los sistemas de ecuaciones lineales como modelo matemático. Estos conceptos son esenciales para comprender y trabajar con sistemas de ecuaciones lineales en álgebra lineal.

Bibliografía

Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia. Un enfoque del mundo real*. McGraw-Hill.

Bombelli, E. C. y Barberis, J. G. (2012). Importancia de la evaluación diagnóstica en asignaturas de nivel superior con conocimiento preuniversitario. *Revista Electrónica Gestión de las personas y Tecnología*, 5(13), 34-41.

Ceja Mena, L.I, (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I*. Instituto Politécnico Nacional.

Díaz-Barriga, A. (2008). *Temas de debate de la innovación educativa*. CESUE, UNAM.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Mc-Graw Hill.

Dorier, L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (págs.. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

Garcia, S. R., y Horn, R. A. (2023). *Matrix Mathematics: A Second Course in Linear Algebra*. Cambridge University Press.

Golovina, L.I. (1976) *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.

Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Holey, T. y Wiedemann A. Narcea. (2023). *Analysis and Linear Algebra*. Springer.

Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-20.
<https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.

Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.

Agradecimientos

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

Derechos de Autor

“Sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático”, Gilberto García Santamaría González, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es>, (CC-BY-NC-ND).