



Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$

Facultad de Estudios Superiores Aragón- - UNAM

Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIME

Carrera

Ingeniería Industrial

Autores

- Roberto Blanco Bautista
- Nelly Rigaud Téllez

Revisor técnico

- Gilberto García Santamaría González

Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

Clave del proyecto: PAPIME PE112723

Fecha

19 de mayo de 2024

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

ÍNDICE

Consideraciones para una lección integradora de Álgebra Lineal	3
Descripción de la lección	3
Justificación	3
Bases para el proceso de aprendizaje	4
Estructura de la lección	5
Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$	6
Ideas introductorias	6
Referencias temáticas	7
Preámbulo	9
Definiciones	10
Lección formativa	13
Conclusiones	23
Anexo	24
Bibliografía	28
Agradecimientos	29

CONSIDERACIONES PARA UNA LECCIÓN INTEGRADORA

TÍTULO: Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$

Propuesta didáctica: Actividad integradora para el aprendizaje de Álgebra Lineal

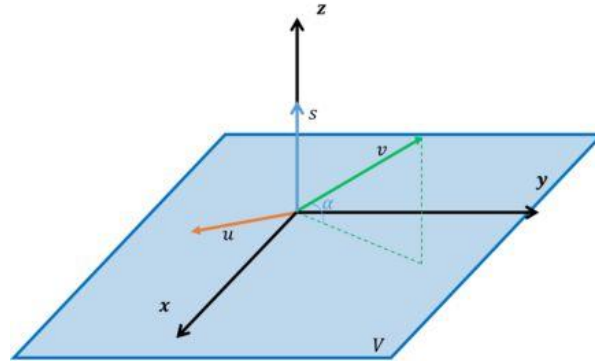
Descripción de la lección

La integración de prácticas de evaluación formativa en el diseño de lecciones de matemáticas puede redundar en un aprendizaje más efectivo. Además, esta estrategia puede ser un respaldo valioso para los educadores, al desarrollar sus propias metodologías de evaluación formativa en otras lecciones de matemáticas.

En el contexto de este documento, una lección se define como un componente fundamental de la experiencia de aprendizaje. Consta de una exposición estructurada y dirigida que abarca conocimientos, actividades y recursos formativos relacionados con los subtemas de 'Espacios con producto interno y proyecciones' dentro del marco de la asignatura de Álgebra Lineal. El objetivo principal de estas lecciones es facilitar la adquisición y comprensión de conceptos específicos.

Justificación

1. Para que el estudiante obtenga un conocimiento más completo del curso de Álgebra Lineal, es necesario que comprenda el significado de producto interno de dos vectores para su estudio en espacios vectoriales y transformaciones lineales.
2. Sumamente importante la comprensión de producto interno cuando es ortogonal o no, en la aplicación de conceptos en geometría y trigonometría aplicados a problemas de ingeniería.
3. Su importancia radica en que el producto interno de dos vectores reafirma sus conocimientos de importantes leyes de geometría y trigonometría.



<https://www.calculisto.com/topics/producto-interno/summary/788>

Bases del proceso de aprendizaje

La lección se diseñó utilizando un enfoque geométrico basado principalmente en el teorema de Pitágoras.

El tema de producto interno en espacios vectoriales es posible abordarlo desde un enfoque matemático básicamente, pero dada la complejidad del tema se prefirió abordar el tema de producto interno de dos vectores bajo un enfoque netamente geométrico y dado que uno de los subtemas de mayor importancia es el cálculo del ángulo entre dos vectores, se hace mención en la lección, de la desigualdad de Schwarz que nos ayuda a la comprensión.

De esta forma, el enfoque se fue conformando hacia una línea geométrica proporcionando al estudiante los medios y recursos geométricos necesarios básicos para comprender la importancia que representa el producto interno de dos vectores en los problemas en que el ingeniero se verá involucrado cuando realice aplicaciones en cálculos de diferente índole.

El desarrollo de la lección se conformó de tal manera, que se inicia con conceptos que el estudiante ya conoce y domina y en forma gradual se introduce, con ayuda de la geometría y la trigonometría al concepto de producto interno vectorial, a su aplicación y comprensión del comportamiento de dichos elementos.

La lección trata de evitar el desarrollo y demostración de algunas de las fórmulas tratadas aquí, pero sin perder la seriedad matemática requerida en este tipo de lecciones, se “platican” algunas fórmulas que son inevitables, debido a la naturaleza del tema. La lección se enriquece con ejemplos característicos que ayudan a la mejor comprensión de la aplicación de los vectores y sus productos internos en la solución de algunos temas relacionados.

El curso está estructurado con el desarrollo de la lección y ejemplos representativos de los temas tratados en la lección. Se incluyen 14 ejemplos que muestran cómo se aplican los temas tratados en situaciones geométricas y matemáticas, de productos internos.

Destaca, que se ha generado exclusivamente para esta **lección una aplicación** con código propio de cuarta generación en ambiente gráfico, cuya característica formativa es que el usuario (estudiante) sepa cómo probar los axiomas del producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$.

En el **anexo 1**. Se agrega un tutorial para su uso.

En esta lección se trata de que el estudiante, comprenda y aprenda a distinguir cuando es necesaria la aplicación del producto interno de dos vectores. Lo formativo de la lección consiste en que se le invita al estudiante a comprobar los resultados anotados en los ejemplos, ya que en algunos se le presenta la respuesta correcta a lo solicitado, más no se muestra el desarrollo completo de la solución, lo que da pie para que el estudiante trate de comprobar si la solución mostrada es realmente correcta.

Estructura de la lección

- a. Ideas introductorias
- b. Referencias temáticas de la lección
- c. Justificación
- d. Definición de conceptos
- e. Lección formativa
- f. Conclusiones
- g. Referencias bibliográficas
- h. Agradecimientos

Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$

Ideas Introdutorias

¡Hola!

Te extendemos una cálida bienvenida a la lección sobre “Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$ ”, la cual presenta de manera concreta, tanto matemática como geoméricamente, la premisa de que la distancia más corta entre vectores es una recta perpendicular.

A continuación, te animamos a leer las ideas introductorias, en donde se ofrece perspectiva sobre vectores y su definición.

Vectores y Tuplas

Un vector es un elemento que tiene magnitud, dirección y sentido. Entonces, pensemos en un ejemplo de lo que no sería y lo que sería un vector. Si alguien te dice que un carrito se mueve a 20 km/h, esta información en sí misma no es una cantidad vectorial. Sólo está especificando una magnitud. No sabemos en qué dirección se mueve ese carrito que avanza a 20km/h. Así que, la velocidad no adquiere un sentido vectorial, hasta que se especifica la dirección y el sentido

Si, el carrito se mueve a 20 km/h con 35 grados hacia el este, ahora el concepto de velocidad es un vector. Sucede que se está operando en dos dimensiones. Esto se puede ampliar a tantas dimensiones como queramos.

$\langle \text{carrito} | \text{magnitud} | \text{dirección} | \text{sentido} \rangle$

Otro ejemplo, un investigador llamado Shannon (1916-2001) dijo lo siguiente: Si ya sabes la respuesta, entonces “eso” no es información. Hoy en día, se suele trabajar con formularios de información personal. A continuación, se presenta la de un paciente de un centro de salud:

Edad: 27	Género: M
Altura: 1.70 m	Peso: 80 kg
Presión arterial: 110 sobre 90	Nombre: Joel Toledo

En apariencia esta tabla presenta cierta información, independientemente, de la forma que se elijan las etiquetas “edad”, “nombre”, “altura”, etc., las cuales parecen ser innecesarias, pero, además, los datos requerirían presentarse en forma ORDENADA, como te lo presentamos aquí:

Joel Toledo	M	27	1.70	80	110 sobre 90
--------------------	----------	-----------	-------------	-----------	---------------------

Esto conduce a que se podría generar un listado compacto, y mejor aún, si el arreglo permite colocar etiquetas generales por orden de importancia:

Nombre	Género	Edad	Altura (m)	Peso (kg)	Presión arterial
Joel Toledo	M	27	1.70	80	110 sobre 90

Ahora sí, se tiene un tipo de vector, al que se le llama tupla, el cual está constituido de 6 valores: el nombre del paciente, su género, edad, altura, peso y presión arterial.

Así que, las tuplas se usan habitualmente para representar colecciones de datos o secuencias ordenadas de objetos de distintos tipos en una determinada estructura.

Recuerda que para estudiar vectores y/o tuplas, debemos estructurarlos para que verdaderamente representen estructuras de datos, los cuales pueden ser cantidades, cadenas de texto, o arreglos de datos.

En esta lección te introducimos a la comprensión y manejo de los vectores. ¡Bienvenidos!

Referencias temáticas

Ubicación de la lección integradora

Licenciatura	Ingeniería Industrial	
Referencias temáticas de la asignatura	Asignatura	Álgebra Lineal
	Ubicación curricular	Segundo semestre
	Asignatura subsecuente	Métodos Numéricos, Investigación de Operaciones I
	Asignatura antecedente	Álgebra, Geometría Analítica
<i>Referencias temáticas y competencias de los temas incluidos en la lección, conforme al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Industrial de la FES Aragón</i>	Tema	4. Espacios con producto interno
	Objetivo del tema 4	Definir y entender el concepto de producto interno que presentan algunos espacios vectoriales.
	Subtemas incluidos	4.1 Definición de producto interno en un espacio vectorial 4.2 Definición de ortogonalidad y ángulo entre vectores de un espacio con producto interno 4.2.1 Definición de conjuntos ortogonales y ortonormales 4.2.2 Obtención de las coordenadas de un vector respecto a una base ortogonal y una base ortonormal
Objetivo de la lección. Esta lección se ha orientado a la comprensión del tema con el siguiente objetivo: El objetivo de este módulo es que el estudiante adquiera una comprensión profunda del significado del producto interno entre dos vectores en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Al finalizar, se espera que el estudiante haya desarrollado la capacidad de comprender y aplicar este concepto de manera efectiva en diversos contextos matemáticos.		

Preámbulo

El producto interno en $\mathbb{R}^n$ tiene una historia rica y diversa en el desarrollo de matemáticas.

El primer uso del concepto de espacio vectorial con producto interno se debe a matemáticos como René Descartes, Carl Friedrich Gauss, Hermann Grassman y otros quienes trabajaron en el campo de álgebra lineal y geometría analítica.

Uno de los hitos importantes en la historia del producto interno en $\mathbb{R}^n$ fue la introducción del concepto de producto escalar en geometría analítica por Descartes en el siglo XVII, en donde se estableció la noción de producto escalar como una forma de medir la relación entre dos vectores.

Gauss y Grassmann contribuyeron significativamente a la teoría de espacios vectoriales y productos internos, en donde se estableció que un espacio con producto interno es un espacio vectorial real o complejo con una operación llamada producto interno. El producto interno de dos vectores en el espacio es un escalar, a menudo indicado con corchetes angulares como en $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Los espacios de productos internos generalizan los espacios vectoriales euclidianos, en los que el producto interno es el producto escalar de coordenadas cartesianas que, luego son sumadas, generando un escalar.

Los productos internos permiten definiciones formales de nociones geométricas intuitivas, como longitudes, ángulos y ortogonalidad (producto interno cero) de vectores.

En el siglo XX, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ encontró aplicaciones en diversos campos de las matemáticas y la física. Además, se desarrollaron técnicas sofisticadas para estudiar y calcular productos internos en espacios vectoriales de dimensión finita, lo que condujo a importantes avances en áreas como la geometría diferencial y el análisis diferencial.

Definiciones

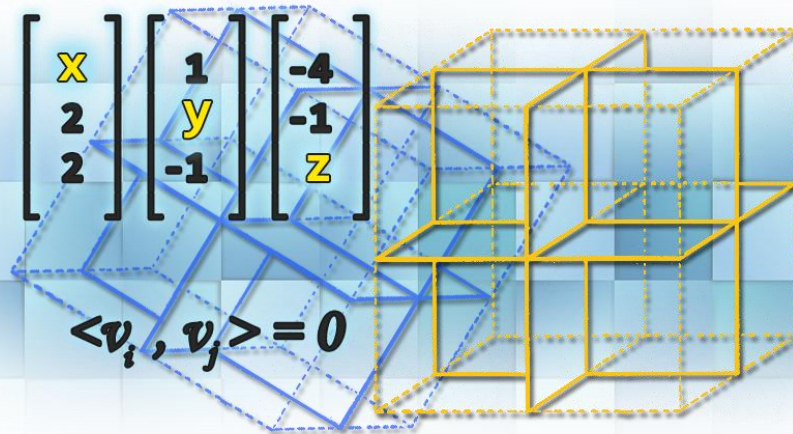
Vector: conjunto de elementos relacionados en un espacio $\mathbb{R}^n$ con magnitud, dirección y sentido, a través de un sistema de coordenadas.

Matriz: conjunto de uno o más vectores relacionados entre sí.

Producto interno: Multiplicación de dos vectores, de tal forma que su producto genere un escalar en el campo de los reales. Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores, entonces, el producto interno estará dado por $\vec{a}^t \vec{b}$.

Espacio con producto interno: Para que el producto de dos vectores sea un producto interno se deben cumplir los siguientes axiomas:

1.
$$\langle v, v \rangle \geq 0$$
2.
$$\langle v, v \rangle = 0 \text{ si y solo si (sii) } v = 0$$
3.
$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$
4.
$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$
5.
$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$
6.
$$\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$$
7.
$$\langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle$$



<https://www.nibcode.com/es/blog/1175/el-problema-de-la-semana-bases-ortogonales>

Conjunto ortonormal: El conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal en V , si:

- $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para $i \neq j$
- $\|v_i\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 1$

Si solo se cumple a., entonces se dice que el conjunto es ortogonal.

Independencia lineal: Cualquier conjunto finito de dos vectores ortogonales diferentes de 0 en un espacio con producto interno es linealmente independiente.

Conjunto ortonormal: Cualquier conjunto finito linealmente independiente en un espacio con producto interno se puede convertir en un conjunto ortonormal, mediante el proceso de Gram-Schmidt. En particular, cualquier espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

Proyección ortogonal: Sea H un subespacio del espacio con producto interno V con una base ortonormal $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. Si $v \in V$, entonces, la proyección ortogonal de v sobre H denotada por $proj_H v$, está dada por:

$$proj_H v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

Base ortonormal: Sea H un subespacio del espacio de dimensión finita con producto interno V . Suponga que H tiene dos bases ortonormales $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$. Sea $v \in V$, entonces,

$$\langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_k \rangle w_k$$

Complemento ortogonal: Sea H un subespacio del espacio con producto interno V . Entonces, el complemento ortogonal de H denotado por $H^\perp = \{x \in V \mid (x, h) = 0 \ \forall h \in H\}$

Subespacio ortogonal: Sea H un subespacio del espacio con producto interno V , entonces

- (1) $H^\perp$ es un subespacio de V
- (2) $H^\perp \cap H = \{0\}$
- (3) $\dim H + \dim H^\perp = n$, si $\dim V = n < \infty$

Proyección ortonormal: Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y suponer que $v \in V$. Entonces, existe un par único de vectores h y p , tales que $h \in H$ y $p \in H^\perp$, y

$$v = h + p$$

Donde

$$h = \text{proy}_H^V v$$

Si V tiene dimensión finita, entonces,

$$p = \text{proy}_{H^\perp}^V v$$

Proyección en un subespacio: Sea H un subespacio de dimensión finita en un espacio vectorial V con producto interno y sea v un vector en V . Entonces, proyección

$$\text{proy}_H^V v$$

Es la mejor aproximación de v por un elemento en H en el siguiente sentido: Si h es cualquier otro elemento de H , entonces

$$\|v - \text{proy}_H^V v\| \leq \|v - h\|$$

Lección formativa

Se llama producto interno de dos vectores x y y al número escalar $x^T y$. Si este producto interno es igual a cero, se dice que los vectores son ortogonales, o sea, que el ángulo que forman dicho dos vectores es un ángulo recto.

Pero como no siempre el producto interno es cero, el ángulo que forman no es un ángulo recto.

Es interesante saber cómo se relaciona al producto interno con su ángulo, aunque el caso ortogonal es más interesante.

Supongamos que tenemos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el espacio $\mathbb{R}^n$ formando entre ellos, un ángulo cualquiera como se ve en la figura 1.

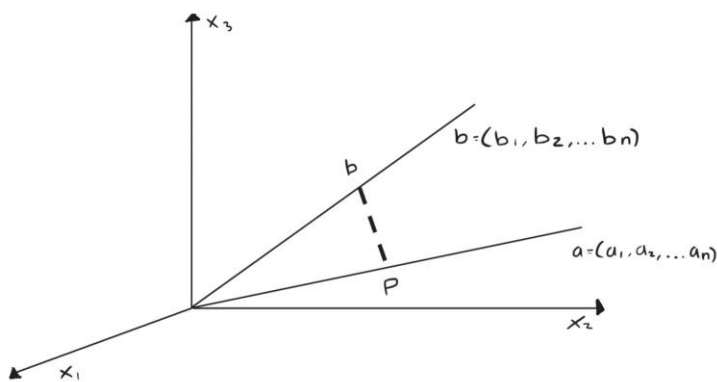


Figura 1. Ángulo entre dos vectores

Sobre el vector $\vec{b}$ se marca un punto b y queremos encontrar su distancia a una recta en la dirección del vector $\vec{a}$.

Entonces, se busca el punto p de la recta que esté más cercano a b . En este caso, la recta que une b con p es perpendicular al vector $\vec{a}$.

Si los vectores no son ortogonales, la solución nos sitúa automáticamente en la ortogonalidad y lo mismo sucede si en lugar de una recta, tenemos un plano o cualquier subespacio S de $\mathbb{R}^n$.

Si desde b , trazamos una perpendicular al subespacio S , entonces, p es el punto donde la perpendicular cruza al subespacio.

El problema que se ha descrito geoméricamente se identifica con el problema de la solución mediante mínimos cuadrados a un sistema sobredeterminado. Aquí, el vector

b son los datos que contienen demasiados errores como para encontrarse en el subespacio dado. Es decir, cuando tratamos de escribir b como un vector en el subespacio.

Si no se puede hacer esto, es porque las ecuaciones encontradas son inconsistentes y no tienen solución.

En este caso, el método de mínimos cuadrados selecciona el punto p como la mejor elección posible.

Encontrar una fórmula para p es muy simple cuando el subespacio es una recta. La fórmula para p sigue siendo simple cuando se proyecta sobre subespacios de mayor dimensión siempre y cuando exista una base.

En este caso, corresponde al problema de mínimos cuadrados con varios parámetros a elegir.

Ahora bien, si S se describe como un conjunto de vectores que lo generan, pero son linealmente dependientes, se conduce a una falla en la fórmula para p . El punto p sigue siendo el más cercano a b , pero el caso es que se puede expresar de diferentes maneras, como una combinación del conjunto generador, linealmente dependiente.

Pero suponemos ahora que los vectores que describen S , no solo son independientes, sino, además, mutuamente ortogonales, y entonces, la fórmula para p es sencilla y nos genera la idea de preparar una base cuyos elementos sean mutuamente ortogonales.

No es el ángulo propiamente dicho sino el coseno del ángulo el que está más directamente relacionado con el producto interno. Para encontrar esa relación, veamos el caso bidimensional (ver figura 2). Aquí α es el ángulo que forma el vector a con el eje x . $\|a\|$ es la longitud del vector a y que es la hipotenusa del triángulo OaQ .

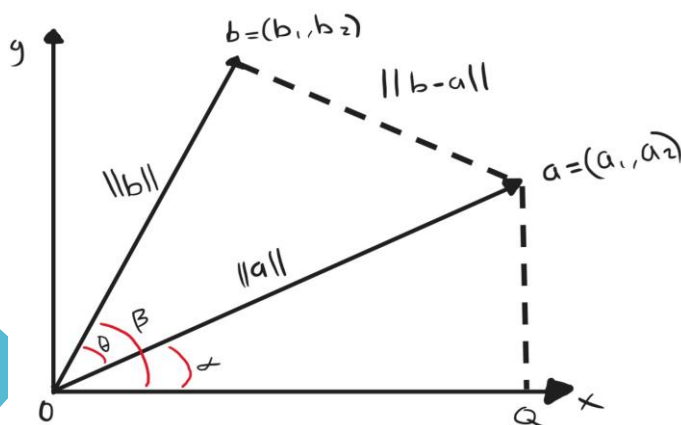


Figura 2. Relación de vectores, ángulo y magnitud

El seno y el coseno de α será:

$$\text{sen}\alpha = \frac{a_2}{\|a\|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|}$$

Lo mismo es válido para b y su correspondiente ángulo β :

$$\text{sen}\beta = \frac{b_2}{\|b\|}$$

$$\cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

Ahora bien,

$$\theta = \beta - \alpha$$

Y el coseno de θ se obtiene de una entidad trigonométrica inolvidable:

$$\cos\theta = \cos\beta\cos\alpha + \text{sen}\beta\text{sen}\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|a\|\|b\|} \quad (1)$$

Pero el numerador de esta fórmula es precisamente el producto interno de b y a , y nos da la relación que buscamos.

El coseno del ángulo entre dos vectores cualesquiera a y b es

$$\cos\theta = \frac{a^T b}{\|a\|\|b\|} \quad (2)$$

Si doblamos la longitud de b , se doblan el numerador y el denominador. El coseno no se altera, lo que nos indica que las dimensiones son correctas. Ahora si cambiamos el signo de b , cambia el signo de $\cos\theta$ y el ángulo cambia en 180° .

En trigonometría existe una ley que se llama Ley de cosenos, que conduce directamente al mismo resultado que relaciona las longitudes de los lados de cualquier triángulo:

$$\|b - a\|^2 = \|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\|a\|\|b\|\cos\theta \quad (3)$$

Si θ es un ángulo recto, tenemos la relación de Pitágoras. Pero independientemente de θ se puede desarrollar la expresión

$\|b - a\|^2$, como $(b - a)^T(b - a)$ y entonces, la ecuación (3) se transforma en

$$b^T b - 2a^T b + a^T a = b^T b + a^T a - 2\|a\|\|b\|\cos\theta$$

Al cancelar los términos iguales que aparecen en ambos lados de esta ecuación, se obtiene la fórmula (2) para el coseno.

Ahora, se quiere encontrar la proyección del punto p . Este punto debe ser algún múltiplo del vector dado $\bar{a}$ (cada punto de la recta es un múltiplo de a) esto es

$$p = \bar{x}a$$

Y el problema es calcular el coeficiente $\bar{x}$.

Todo lo que se requiere para este cálculo es el hecho geométrico de que la recta desde b hasta el punto más cercano $p = \bar{x}a$ es perpendicular al vector

$$a = b - \bar{x}a \perp a$$

$$0$$

$$a^T(b - \bar{x}a) = 0$$

$$0$$

$$\bar{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$$

La proyección p del punto b sobre la recta generada por el vector a está dada por

$$p = \frac{a^T b}{a^T a} a \quad (4)$$

Entonces, el cuadrado de la distancia del punto a la recta es

$$\| b - \frac{a^T b}{a^T a} a \|^2 = b^T b - 2 \frac{(a^T b)^2}{a^T a} + \frac{a^T b}{a^T a} = \frac{b^T b(a^T a) - (a^T b)^2}{a^T a} \quad (5)$$

Esto nos permite redibujar la figura 1 e incluir la fórmula correcta para el punto p , como se muestra en la figura 3.

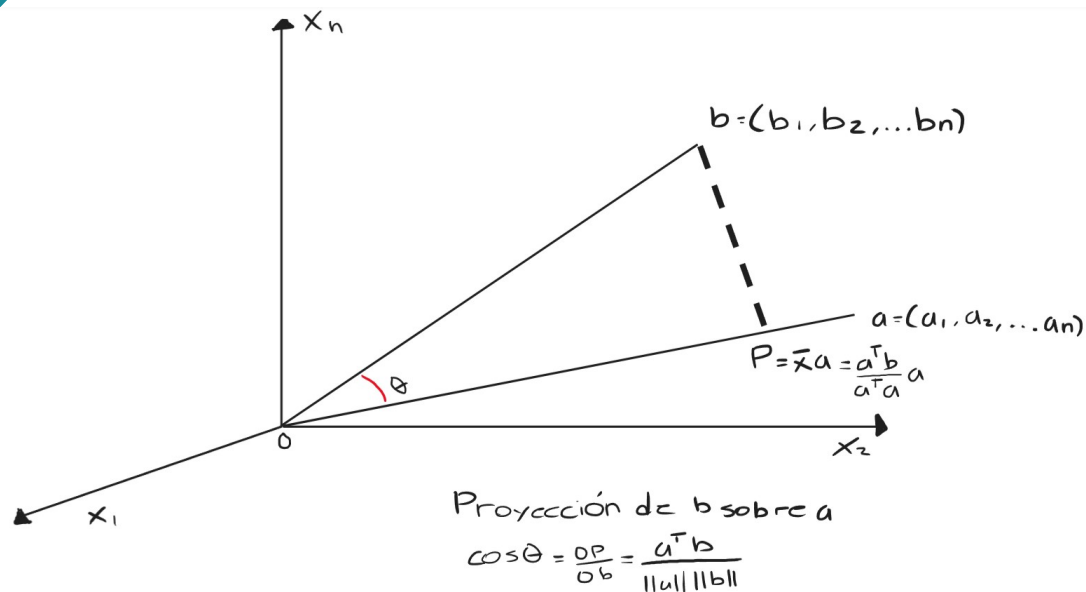


Figura 3. Proyección de un vector sobre otro

Esta fórmula tiene un corolario muy importante. El resultado parece una consecuencia de la fórmula (5) para la distancia entre un punto y una recta, es decir; la distancia entre b y $\bar{x}a$.

Esta distancia y el cuadrado de esta deben ser mayores o iguales a cero. Por lo tanto, el numerador de (5) debe ser no negativo

$$b^T b (a^T a) - (a^T b)^2 \geq 0$$

Si añadimos $(a^T b)^2$, en ambos lados, y tomamos raíces cuadradas, se puede reescribir la conclusión de la siguiente forma.

Dos vectores satisfacen la desigualdad de Schwarz.

$$(a^T b) \leq \|a\| \|b\| \quad (6)$$

La razón entre los dos lados de la desigualdad de Schwarz es precisamente el valor absoluto $|\cos \theta|$

Como todos los cosenos están en el intervalo

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

Esto proporciona otra demostración de (6), y tal vez más comprensible debido a la familiaridad con los cosenos.

La expresión a la izquierda de (5) es no negativa y permanecerá así aún cuando introduzcamos nuevas posibilidades en las longitudes de los vectores y en sus productos internos.

Por lo tanto, la expresión del lado derecho de (5) también es no negativa y así, probamos la desigualdad de Schwarz sin usar trigonometría.

La igualdad de (6) es válida si y solo si b es un múltiplo de a . En este caso, el punto b es idéntico al punto p y la distancia (5) entre el punto y la recta es cero.

Ejemplos

Ejemplo 1. Dados dos números positivos x y y , elegir el vector b igual $(\sqrt{x}, \sqrt{y})$ y el vector $a = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$. Aplicar la desigualdad de Schwarz para comparar la media aritmética de x y y , con su media geométrica.

La solución está dada por,

$$\begin{aligned} b &= (\sqrt{x}, \sqrt{y}) \\ a &= (\sqrt{y}, \sqrt{x}) \end{aligned}$$

Entonces,

$$a^T b = (\sqrt{x}, \sqrt{y}) \begin{bmatrix} \sqrt{y} \\ \sqrt{x} \end{bmatrix} = \sqrt{xy} + \sqrt{yx} = 2\sqrt{xy}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned} \|a\| &= x + y \\ \|b\| &= x + y \end{aligned}$$

La media aritmética será

$$\frac{x + y + x + y}{2} = x + y$$

Y, por tanto,

$$a^T b \leq \|a\| \|b\|$$

De ahí que

$$2\sqrt{xy} \leq x + y$$

Que es lo que se quiere demostrar.

Ejemplo 2. Suponer que se comienza con un vector, del origen al punto x , y que se añade otro vector de longitud ' y ' que une x con $x+y$. El tercer lado del triángulo va directamente del origen a $x+y$. La desigualdad triangular asegura que esta distancia, o sea, de $x+y$ no puede ser mayor que la suma de las dos primeras, esto es,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Después de elevar al cuadrado ambos lados, reducir está a la desigualdad de Schwarz.

La solución está dada por la desigualdad de Schwarz está dada por

$$(a^T b) \leq \|a\| \|b\|$$

Entonces,

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$$

Lo anterior es lo mismo que

$$x^T x + 2x^T y + y^T y \leq x^T x + 2 \|x\| \|y\| + y^T y$$

Que es la desigualdad de Schwarz y en esta expresión, eliminando los términos comunes se tiene que

$$2x^T y \leq 2 \|x\| \|y\| \rightarrow x^T y \leq \|x\| \|y\|$$

Que es la desigualdad de Schwarz.

Ejemplo 3. Verificar el Teorema de Pitágoras para el triángulo Obp de la figura 3, usando la fórmula (5) para obtener la longitud del lado bp.

La solución está dada por,

$$Op^2 = \frac{a^T b}{a^T a} a^T a$$

Sumado a la fórmula deja $b^T b$ el cuadrado de la hipotenusa.

La otra proyección es $\frac{b^T a}{b^T b} b$

Ejemplo 4. Encontrar el punto p del rayo que conecta el origen con el punto $a=(1, 1, 1)$ y que es el más cercano al punto $b=(2, 4, 4)$. Encontrar también el punto más cercano de "a" de la recta que pasa por "b".

La solución está dada por,

$$p = \frac{a^T b}{a^T a} a = \frac{10}{3} (1, 1, 1)$$

La otra proyección es: $\frac{b^T a}{b^T b} b$

Ejemplo 5. Explicar por qué la desigualdad de Schwarz se transforma en una desigualdad en el caso en que los puntos "a" y "b" están en la misma recta que pase por el origen, y solo en ese caso, ¿Qué sucede si están en lados opuestos del origen?

La solución está dada porque en ambos casos es una igualdad; el ángulo es 0 o π , el coseno es 1 ó -1, y el error es $b - p$ que es cero porque b coincide con su proyección p .

Ejemplo 6. En n dimensiones, ¿cuál es el ángulo que forma el vector con los ejes coordenados?

La solución está dada por, θ es el ángulo cuyo coseno es $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Ejemplo 7. La desigualdad de Schwarz tiene una demostración de una línea si se normalizan por adelantado los vectores “a” y “b” para que sean unitarios.

$$|a^T b| = \left| \sum a_j b_j \right| \leq |a_j| |b_j| \leq \frac{|a_j|^2 + |b_j|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \|a\| \|b\|$$

Justificar el paso intermedio.

La solución está dada para cada j

$$|a_j|^2 + |b_j|^2 - 2 \|a_j\| \|b_j\|$$

Que es igual a

$$(|a_j| - |b_j|)^2, \text{ que no puede ser negativo}$$

Ejemplo 8. Elegir un vector b adecuado para probar con la desigualdad de Schwarz que

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

¿Cuándo se valida la igualdad?

La solución está dada por,

$$b = (1, 1, \dots, 1)$$

Se verifica la igualdad si a es múltiplo de b , así que todas la a_i son iguales.

Ejemplo 9. Construir matrices simétricas de 2×2 , A y B , cuyo producto AB no sea simétrico. Notar que si A conmuta con B entonces el producto permanece simétrico:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

La solución está dada por,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A^T$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B^T$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq (AB)^T$$

Ejemplo 10. Si A tiene rango r, también lo tienen las matrices A^T (rango fila=rango columna). Dar un ejemplo para mostrar que, sin embargo, AA^T puede no ser invertible, aunque AA^T lo sea.

Solución. Sea A con más filas que columnas, digamos $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Problemas de aplicación

Ejemplo 11. Obtener el ángulo entre las rectas $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -5x$.

Solución. En este problema es muy útil usar $(\vec{a}) \cdot (\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, de donde se puede obtener $\cos\theta$. Nótese que se requerirán dos coordenadas para definir $(\vec{a}) \cdot (\vec{b})$.

Para cada recta obtener coordenadas, por ejemplo, para $y = \frac{4}{3}x$, algunas coordenadas pueden ser $(1, \frac{4}{3})$, $(3, 4)$, ...

Para el caso de $y = -5x$, coordenadas $(1, -5)$, $(-1, 5)$, ...

De $(\vec{a}) \cdot (\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, se obtiene $\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}) \cdot (\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Por facilidad se tomarán las coordenadas $(3, 4)$ y $(-1, 5)$, para realizar el producto punto:

$$(\vec{a}) \cdot (\vec{b}) = (3)(-1) + (4)(5)$$

$$= 17$$

Ahora, se procede a calcular las magnitudes

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}$$

Así que

$$\cos\theta = \frac{17}{5\sqrt{26}} = 0.6668\theta \cong 48.18^\circ$$

Ejemplo 12. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, obtener el producto punto para $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución. El concepto de producto punto se lleva a otros espacios vectoriales.

Se define para $A^T B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$

Entonces

$$\begin{aligned} A^T B &= (1)(3) + (2)(2) \\ A^T B &= 9 \end{aligned}$$

Ejemplo 13. Sean las matrices $A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, calcular el ángulo entre ellas.

Solución. La idea de calcular el ángulo entre matrices resulta abstracto. No obstante, tomando en cuenta el concepto de $\cos\theta = \frac{(\vec{a}) \cdot (\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, es posible realizarlo.

De acuerdo con el problema anterior

$$A \cdot B = 5$$

La magnitud de una matriz puede interpretarse como el área común de $|A|$ y $|B|$.

Para el caso de A

$$|A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{7}$$

$$|B| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\cos\theta = \frac{5}{(\sqrt{7})(\sqrt{17})}$$

$$\theta \cong 62.72$$

Conclusiones

Esta lección ha sido meticulosamente diseñada con un enfoque geométrico, fundamentado principalmente en el teorema de Pitágoras, para abordar el tema del producto interno en espacios vectoriales. Reconociendo la complejidad intrínseca del tema, se optó por explorar el producto interno de dos vectores desde una perspectiva eminentemente geométrica. Destacando la relevancia del cálculo del ángulo entre dos vectores, se incorpora la desigualdad de Schwarz para profundizar en la comprensión.

La estructura de la lección se ha construido de manera progresiva, comenzando con conceptos familiares para los estudiantes y avanzando gradualmente hacia la introducción del producto interno vectorial mediante recursos geométricos y trigonométricos. Se evita el desarrollo exhaustivo de algunas fórmulas, pero se mantiene la seriedad matemática necesaria, compartiendo fórmulas esenciales inherentes al tema.

El aspecto formativo de la lección radica en invitar al estudiante a verificar los resultados proporcionados en los ejemplos. Aunque se revela la respuesta correcta en algunos casos, se omite el desarrollo completo de la solución, estimulando al estudiante a confirmar la validez de la solución presentada. En última instancia, el objetivo de la lección es dotar al estudiante de las herramientas necesarias para discernir cuándo aplicar el producto interno de dos vectores en contextos prácticos y desafiantes, preparándolo para abordar problemas matemáticos y geométricos en el ámbito ingenieril.

ANEXO 1

Manual para uso del programa de producto interno

El programa es de tipo ejecutable, así que no se necesita cargar en la computadora ningún lenguaje en específico.

Este programa no necesita protocolo de instalación. Solo se requiere grabarlo en la computadora en algún directorio en particular que sea de uso general.

Una vez en el directorio donde se encuentra el programa hacer doble clic sobre el nombre del programa para acceder al mismo.

Aplicación: Producto interno en el espacio Rn
Disponible en:

<https://www.rua.unam.mx/portal/Descargas/index/88272>



Aparece el nombre del programa en la primera pantalla. Para acceder a la pantalla de trabajo hacer clic sobre el nombre del programa.

En la pantalla de trabajo, aparecen dos botones: el botón de “inicio” y el botón de “cerrar”:

El botón de “cerrar” al activarlo (clic), termina el proceso del programa y conduce al sistema operativo de la computadora.

Al activar con clic el botón de “inicio”, aparece el botón de “espacio con producto interno”.

Activando con clic el botón “espacio con producto interno”, aparece el botón “ejecutar” y al extremo derecho aparece la etiqueta “aprox” y una caja de texto con el número “3”, indicando que el redondeo por default de las cantidades procesadas se redondea a 3 decimales. Para cambiar el número de decimales, hacer clic en la etiqueta “aprox” causando que se borre el “3” y se escriba el número nuevo de decimales a redondear.

En esta pantalla, aparecen en el lado izquierdo siete axiomas que pertenecen al espacio con producto interno. El propósito del programa es precisamente probar estos axiomas interactuando con el programa a través de coordenadas en los vectores dispuestos al caso.



En la parte superior de la pantalla aparece una galería que consta de:

Una caja de texto etiquetada con “a” donde se puede ingresar un valor (escalar) que fungirá como factor aplicado a los vectores. Para acceder, solo se requiere escribir un número dentro de la caja de texto azul indicada (el cursor se encontrará parpadeando en dicha caja).

Utilizar la tecla de “tabulación” del teclado para acceder a las siguientes cajas de texto.

Las cajas verdes están etiquetada con “u”, las amarillas con “v” y las rojas con “w” indicando los nombres de los tres vectores que intervienen en este programa. Las cajas superiores son para almacenar las abscisas y las inferiores para almacenar las ordenadas correspondientes a cada vector.

Una vez que los vectores ya tienen sus valores correspondientes, activar el botón “ejecutar” con clic y en ese momento aparecen en la pantalla la aplicación de los axiomas 1, 3 y 4 utilizando las coordenadas de los vectores ya mencionados.

Al activar el botón “ejecutar”, aparece el botón “sigue” el cual al ser activado con clic borra la pantalla actual y aparece la pantalla siguiente que contiene la aplicación para los axiomas 5,6 y 7 utilizando los vectores ya mencionados.

2:50:24 p. m. producto interno 29-nov-2023

Espacio con producto interno

Para que el producto de dos vectores sea un producto interno se deben cumplir las siguientes axiomas

1.- $\langle v, v \rangle \Rightarrow 0$

2.- $\langle v, v \rangle = 0$ sii $v = 0$

3.- $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

4.- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

5.- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

6.- $\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$

7.- $\langle u, av \rangle = a \langle u, v \rangle$

w es un vector y a es un escalar
 $\Rightarrow$ significa igual o mayor que
 sii significa si y solo si
 $\langle y \rangle$ son símbolos para encerrar elementos vectoriales

proyecto PAPIME - 112723

a: 2 u: 8 v: 3 w: 5

1.- $\langle v, v \rangle \Rightarrow 0$ $[3, 6] \times [3, 6] = 9 + 36 = 45$

3.- $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ $v+w = [3, 6] + [5, 1] = [8, 7]$
 $\langle u, v+w \rangle = [8, 1] \times [8, 7] = 64 + 7 = 71$
 $\langle u, v \rangle = [8, 1] \times [3, 6] = 24 + 6 = 30$
 $\langle u, w \rangle = [8, 1] \times [5, 1] = 40 + 1 = 41$
 $\langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle = 30 + 41 = 71$

4.- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ $u+v = [8, 1] + [3, 6] = [11, 7]$
 $\langle u+v, w \rangle = [11, 7] \times [5, 1] = 55 + 7 = 62$
 $\langle u, w \rangle = [8, 1] \times [5, 1] = 40 + 1 = 41$
 $\langle v, w \rangle = [3, 6] \times [5, 1] = 15 + 6 = 21$
 $\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 41 + 21 = 62$

adios espacio con producto interno sigue aprox: 3

Al mismo tiempo aparece el botón “gráfica” y reaparece el botón “ejecutar”

El programa permite intercambiar entre los botones “ejecutar” y “sigue” para consultar los casos correspondientes a cada botón.

Par visualizar los axiomas propuestos, activar el botón “grafica” con clic.

Al activar el botón “gráfica” aparecen las etiquetas y cajas de texto “esc”, “cx”, “cy” y “axioma”. Para acceder y modificar cualquiera de ellas, hacer clic en la etiqueta correspondiente y acceder a la caja de texto.

Para visualizar la gráfica de cualquiera de los axiomas, hacer clic en la etiqueta “axioma” e introducir en la caja de texto el número de axioma a visualizar. Para acceder a otro axioma, hacer clic en la etiqueta “axioma” e introducir en la caja de texto el nuevo número de axioma.

12:52:54 p. m. producto interno 29-nov-2023

Espacio con producto interno

Para que el producto de dos vectores sea un producto interno se deben cumplir las siguientes axiomas

1.- $\langle v, v \rangle \Rightarrow 0$

2.- $\langle v, v \rangle = 0$ sii $v = 0$

3.- $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

4.- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

5.- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

6.- $\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$

7.- $\langle u, av \rangle = a \langle u, v \rangle$

w es un vector y a es un escalar
 $\Rightarrow$ significa igual o mayor que
 sii significa si y solo si
 $\langle y \rangle$ son símbolos para encerrar elementos vectoriales

proyecto PAPIME - 112723

a: 2 u: 6 v: 3 w: 2

módulo u = 6.083
 módulo v = 8.544
 módulo w = 5.385
 módulo v + w = 13.928
 módulo u . (v + w) = 17.804
 módulo u , v = 12.728
 módulo u , w = 10
 módulo (u , v) + (u , w) = 22.672
 (v + w) = 5 , 13
 (u , v + w) = 11 , 14
 (u , v) = 9 , 9
 (u , w) = 8 , 6
 (u , v) + (u , w) = 17 , 15

otro

adios espacio con producto interno ejecutar grafica malla esc: 1 cx: 0 cy: 0 axioma => 3 aprox: 3

Cuando se requiera continuar en el programa y se quiera visualizar otro conjunto de vectores, activar el botón “otro” el cual borra el contenido de la memoria y limpia la pantalla para recibir al nuevo conjunto de vectores.

Todos los botones se pueden acceder con las teclas rápidas en caso de no usar mouse. Las teclas rápidas están señaladas en cada botón con un subrayado debajo de la letra correspondiente. Usar ALT-tecla rápida

No olvidar que al acceder al botón “cerrar” con clic se termina la sesión y se ubica en el sistema operativo de la computadora.

Bibliografía

- Blanco Bautista, R. y Rigaud Téllez, N. (2024). *Producto interno en el espacio R^n* (Versión 1.1). [Software], bajo licencia de código abierto Visual Studio.
- Ceja Mena, L.I. (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I*. Instituto Politécnico Nacional.
- Golovina, L.I. (1976) *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.
- Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.
- Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.
- Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, vol. 42(1).
<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44051918010>
DOI: <https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.
- Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.

Agradecimientos

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

Derechos de autor

“Producto interno en el espacio $\mathbb{R}^n$ ”, Roberto Blanco Bautista y Nelly Rigaud Téllez, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es>, (CC-BY-NC-ND).