



# Comprensión de espacios vectoriales: la abstracción es el precio de la generalidad

Facultad de Estudios Superiores Aragón- - UNAM  
Trabajo realizado con el apoyo del programa UNAM –DGAPA – PAPIME

## Carrera

Ingeniería Industrial

## Autores

- Nelly Rigaud Téllez
- Roberto Blanco Bautista

## Revisor técnico

- Gilberto García Santamaría González

## Servicio Social

- Ramsés Everardo Carreño Rubio
- Alejandro Hernández Bautista

**Clave del proyecto:** PAPIME PE112723

## Fecha

**19 de mayo de 2024**

D. R.©, 2023, UNAM - CC-BY-NC-ND

# ÍNDICE

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Consideraciones para una lección integradora de Álgebra Lineal                     | 3  |
| Descripción de la lección                                                          | 3  |
| Justificación                                                                      | 4  |
| Evaluación                                                                         | 4  |
| Bases para el proceso de aprendizaje                                               | 5  |
| Estructura de la lección                                                           | 6  |
| Comprensión de espacios vectoriales: la abstracción es el precio de la generalidad | 7  |
| Ideas introductorias                                                               |    |
| Referencias temáticas                                                              | 7  |
| Preámbulo                                                                          | 8  |
| Definiciones                                                                       | 9  |
| Lección formativa                                                                  | 11 |
| Conclusiones                                                                       | 35 |
| Bibliografía                                                                       | 36 |
| Agradecimientos                                                                    | 37 |

## Consideraciones para una lección integradora

### **Título: Comprensión de espacios vectoriales: La abstracción es el precio de la generalidad**

Propuesta didáctica: Actividad integradora para el aprendizaje de Álgebra Lineal

### Descripción de la lección

Uno de los conceptos fundamentales en el ámbito de la ciencia y las matemáticas es el reconocimiento de que unidades aparentemente no relacionadas pueden ser manifestaciones de una misma estructura abstracta y subyacente. Este principio revela la profunda interconexión que existe en el tejido de nuestro universo, donde fenómenos aparentemente distintos pueden estar íntimamente entrelazados por principios comunes y leyes fundamentales.

El reconocimiento de estas conexiones sirve para unificar y simplificar situaciones aparentemente dispares, aunque esto conlleva la situación de un nivel adicional de abstracción.

En este contexto, la noción abstracta de espacio vectorial se utiliza para unificar una variedad de espacios, como los de funciones, por ejemplo, polinomios algebraicos y trascendentes. Otros espacios son de matrices y de operadores lineales, por mencionar algunos de ellos, en un marco común. Este enfoque proporciona una visión más amplia y coherente, permitiendo analizar y resolver problemas de manera más eficiente y efectiva.

En nuestra opinión, la mejor manera de abordar el aprendizaje de espacios vectoriales para la lección *la abstracción es el precio de la generalidad*, es a través de desarrollar ejemplos concretos.

Por ello, hemos querido asegurarnos de que el lector comprenda lo que se dice en el caso del espacio euclidiano. Posteriormente, distinguir atributos de un espacio vectorial. Todo esto para llegar a la formulación abstracta de los axiomas.

En este sentido, el objetivo de la lección se orienta al desarrollo conceptual y con oportunidades para evaluar la comprensión de estudiantes.

## Justificación

Los espacios vectoriales y sus estructuras auxiliares proporcionan el lenguaje común del álgebra lineal, y como tales, son un requisito previo esencial para comprender matemáticas aplicadas.

Los conceptos claves de espacio vectorial, subespacio, independencia lineal y base, no solo se encuentran en sistemas lineales y la geometría del espacio euclidiano de  $n$  dimensiones, también, en el análisis de ecuaciones diferenciales lineales, valor en la frontera, problemas de análisis de Fourier, procesamiento de señales, métodos numéricos y muchos otros campos.

Por lo tanto, para manejar adecuadamente el álgebra lineal y sus aplicaciones, la primera tarea es adquirir una comprensión firme de las construcciones fundamentales del espacio vectorial.

## Evaluación

La evaluación se puede considerar como un proceso continuo y formativo, en el que se busca medir el progreso y el aprendizaje de los estudiantes a lo largo de un curso o un programa.

La evaluación puede servir para diferentes propósitos. Muchos docentes están familiarizados con formas tradicionales de evaluar estudiantes, tales como, con exámenes de diagnóstico, intermedios y finales.

Durante un curso, se pueden registrar diferentes eventos de aprendizaje, como evaluaciones intermedias, mejor aún si son formativas. La evaluación formativa captura el aprendizaje en proceso para identificar brechas, confusiones, errores, pero también, comprensión en un curso, antes de una evaluación sumativa

Para la presente lección, el interés se centra en las evaluaciones formativas y una sumativa.

Las evaluaciones formativas están desarrolladas a lo largo de la lección y su orientación se encuentra en el proceso de aprendizaje y en brindar retroalimentación a estudiantes

para mejorar algunos atributos, particularmente, los asociados a la comprensión de conceptos.

Por ello, en el desarrollo de la lección, se presentan módulos. El primero, está referido a la comprensión de espacios vectoriales, y el segundo, sobre combinaciones lineales e independencia lineal.

La evaluación sumativa, usualmente caracterizada por un examen cerrado, se aplica al final del proceso de aprendizaje y evalúa el aprendizaje del estudiante versus algún estándar, es decir, lo indicado en el plan de estudios.

## Bases del proceso de aprendizaje

Sobre evaluación formativa, la literatura se soporta por una necesidad de comprender la evaluación para el aprendizaje, como un medio que facilita interacciones entre el maestro, tecnología y estudiantes dentro de un ambiente de aprendizaje que proporciona información para el estudiante y el docente acerca del desempeño del estudiante.

Por ello, se ha empleado la perspectiva cognitiva, la cual promueve el razonamiento y el pensamiento, para fomentar la comprensión de conceptos matemáticos, y bajo una perspectiva de actividades formativas, esto es, centrarse en el análisis y discusión de diferentes interpretaciones de ideas matemáticas, en tres grandes etapas.

La primera, es una sección de apertura. Su objetivo es preparar al estudiante para el aprendizaje, mediante la presentación de conceptos fundamentales del tema, lo que corresponde al apartado de “**definiciones**”.

La segunda etapa, denominada, “**LECCIÓN**”, corresponde al desarrollo, y presenta los contenidos y actividades formativas. Es una lección conceptual que brinda oportunidades, incluye ejemplos, y breves actividades formativas para evaluar la comprensión de los temas de interés de Álgebra Lineal.

La tercera etapa, es la **evaluación de comprensión de conceptos**. Es una etapa que corresponde al cierre, como una evaluación sumativa, en donde se pretende integrar conocimientos y pueda hacer una síntesis del proceso y del aprendizaje desarrollado. Asimismo, cuenta con recursos para reforzar sus conocimientos.

## Estructura de la lección

- a. Ideas introductorias
- b. Referencias temáticas de la lección
- c. Preámbulo
- d. Definiciones
- e. Lección formativa
- f. Conclusiones
- g. Bibliografía
- h. Agradecimientos

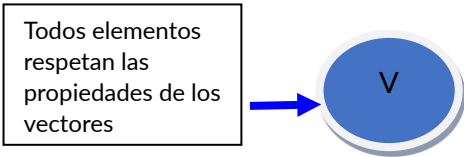
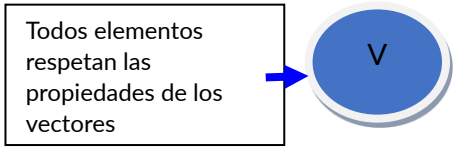
## Comprensión de espacios vectoriales: la abstracción es el precio de la generalidad

### Ideas introductorias

¡Hola!

Te damos la más cordial bienvenida a la lección de “Comprensión de espacios vectoriales: la abstracción es el precio de la generalidad”, que se sumerge en el fascinante mundo de las matrices y su aplicación práctica en la ingeniería. A lo largo de esta lección, profundizaremos en conceptos fundamentales que te proporcionarán una comprensión más sólida de este tema y cómo se traduce en aplicaciones del mundo real.

A continuación, te invitamos a consultar la siguiente visión de las matrices en el mundo de ingeniería que hemos denominado “Comprendiendo espacios vectoriales”.

| Descripción                                                                                                                                                                                       | Imágenes                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Llamaremos a un espacio vectorial como $V$ . Si un vector es un componente, o “elemento” de $V$ , entonces lo podremos denotar con este símbolo. Puede observar que “ $u$ ” es un elemento de $V$ |  $\vec{u} \in V$ <p>Donde <math>\vec{u}</math> es un elemento de <math>V</math></p>                     |
| Todos los elementos del espacio vectorial tienen las mismas propiedades.                                                                                                                          |                                                                                                          |
| Así todos los elementos deben respetar, las propiedades asociativa y conmutativa PARA LA SUMA.                                                                                                    |  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Además, el vector cero, que de nuevo proporciona el elemento <math>\vec{0}</math>.<br/>Otro elemento es, <math>-\vec{u}</math> que también está en <math>V</math>, tal que la adición de <math>\vec{u}</math> y <math>-\vec{u}</math> genera el vector cero.</p> <p>Los escalares “c” y “d” pueden ser distribuidos en la suma de dos elementos de <math>V</math>, como un elemento puede ser distribuido en la suma de dos escalares.</p> <p>Lo mismo ocurre con el producto de dos escalares multiplicados por un vector.</p> <p>Finalmente, multiplicar por la escala 1, vuelve a dar el elemento.</p> <p>Esto representa las propiedades que deben tener los elementos del espacio vectorial, y en esto</p> | $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ $cd(\vec{u}) = c(d\vec{u})$ $1\vec{u} = \vec{u}$                                                                                                                                                                                                                                |
| <p>Podemos observar que un espacio vectorial es una colección de elementos que pueden agregarse juntos.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  <p><math>V</math> es una colección de elementos que pueden:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Agregarse en cualquier combinación.</li> <li>2) Multiplicarse por escalares en cualquier combinación</li> </ol>                                                                                                                      |
| <p>Ahora, una propiedad importante del espacio vectorial es lo que se llama cerradura. La cerradura requiere dos propiedades. Primero, para un elemento <math>a</math> de <math>V</math>, multiplicar <math>a</math> por cualquier escalar dará que el resultado también pertenece a <math>V</math>.</p> <p>En segunda, para cualquiera de dos elementos <math>u</math> y <math>v</math> en <math>V</math>, al sumarlos, el resultado también estará contenido dentro de <math>V</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                       |  <p>Cerradura:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces<br/> <math display="block">c\vec{u} \in V</math> </li> <li>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces<br/> <math display="block">\vec{u} + \vec{v} \in V</math> </li> </ol> |
| <p>Estas propiedades de la cerradura corresponden a determinar si <math>V</math> es un espacio vectorial.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  <p>Determinan si <math>V</math> es un espacio vectorial dado</p>                                                                                                                                                                                                                                                                             |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces</p> $c\vec{u} \in V$ <p>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces</p> $\vec{u} + \vec{v} \in V$                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <p>En este punto, es útil que se presente el símbolo <math>\mathbb{R}</math>, el cual representa un conjunto de todos los números reales, esto es, positivos, negativos, racionales, irracionales y todos los números reales.</p> <p>Como ejemplo, veremos algunos casos sencillos</p> | <p><math>\mathbb{R}</math><br/>Conjunto de todos los números reales<br/>(positivos, negativos, racionales, irracionales, etc.)</p> <p>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces</p> $c\vec{u} \in V$ <p>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces</p> $\vec{u} + \vec{v} \in V$                                                                                                                         |
| <p>Veremos otro ejemplo, con otro tipo de notaciones. Si <math>\mathbb{R}</math>, es el conjunto de vectores reales de tamaño entero <math>n</math></p>                                                                                                                                | <p><math>\mathbb{R}</math><br/>Conjunto de vectores de tamaño <math>n</math></p> $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ <p>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces</p> $c\vec{u} \in V$ <p>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces</p> $\vec{u} + \vec{v} \in V$                                                                                                               |
| <p>similarmente, el conjunto de vectores relacionados formará una matriz.</p>                                                                                                                                                                                                          | <p><math>\mathbb{R}</math><br/>Conjunto de vectores de tamaño <math>n</math></p> $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$ <p>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces</p> $c\vec{u} \in V$ <p>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces</p> $\vec{u} + \vec{v} \in V$ |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Primero, veamos un vector en <math>\mathbb{R}^3</math>. Procedemos a multiplicar tal vector por un escalar <math>c</math> que resulta en que el vector sigue perteneciendo a los números reales.</p>                                                                                               | $\mathbb{R}$ <p>Conjunto de vectores de tamaño <math>n</math></p> $c\vec{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ <p>☞ 1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces<br/> <math>c\vec{u} \in V</math> ✓</p> <p>2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces<br/> <math>\vec{u} + \vec{v} \in V</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <p>Ahora al proponer dos vectores, y realizar la operación de la suma, encontramos que verdaderamente se siguen manteniendo las propiedades de un número real.<br/> Se cumple el concepto de cerradura.<br/> Un aspecto importante es que los espacios vectoriales pueden extenderse a funciones.</p> | $\mathbb{R}$ <p>Conjunto de vectores de tamaño <math>n</math></p> $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix}$ <p>1) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y el escalar <math>c</math>, entonces<br/> <math>c\vec{u} \in V</math> ✓</p> <p>☞ 2) Dado <math>\vec{u} \in V</math> y <math>\vec{v} \in V</math>, entonces<br/> <math>\vec{u} + \vec{v} \in V</math> ✓</p> |

## Referencias temáticas

### Ubicación de la lección integradora

| Licenciatura                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Ingeniería Industrial        |                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Referencias temáticas de la asignatura                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Asignatura                   | Álgebra Lineal                                                                                                                                                                                                                               |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Ubicación curricular         | Segundo semestre                                                                                                                                                                                                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Asignatura subsecuente       | Métodos Numéricos, Investigación de Operaciones I                                                                                                                                                                                            |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Asignatura antecedente       | Álgebra, Geometría Analítica                                                                                                                                                                                                                 |
| <i>Referencias temáticas y competencias de los temas incluidos en la lección, conforme al plan de estudios de la carrera de Ingeniería Industrial de la FES Aragón</i>                                                                                                                                                                    | Tema                         | Espacios vectoriales                                                                                                                                                                                                                         |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Objetivo del tema 3          | Comprender el concepto de espacio vectorial, así como sus propiedades y las aplicaciones que tiene en los problemas de Ingeniería.                                                                                                           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Competencias por desarrollar | “Comprender el concepto de espacio vectorial, así como sus propiedades y las aplicaciones que tiene en los problemas de Ingeniería”.                                                                                                         |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Subtemas incluidos           | 3.1 Definición de espacio vectorial<br>3.1.1 Propiedades elementales de los espacios vectoriales<br>3.2 Condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de un espacio<br>3.2.1 Conceptos de combinación lineal y dependencia lineal |
| <b>Aprendizajes esperados</b><br><b>Comprensión de espacio vectorial</b> , lo que lo constituye, sus axiomas y su uso en la prueba de determinar si un conjunto de vectores es un espacio<br><b>Comprensión de los conceptos de independencia lineal y combinación lineal</b> , mediante la presentación de ejemplos y puesta en práctica |                              |                                                                                                                                                                                                                                              |

## Preámbulo

La idea de definir un espacio vectorial mediante axiomas abstractos estuvo contenida en una teoría general publicada por Hermann Grassmann (1808-1887), un teólogo y filósofo de Stettin, Polonia, matemático autodidacta. Su trabajo pasó prácticamente inadvertido, ya que trató de construir una teoría altamente abstracta e independiente del resto de las matemáticas, además, contenía terminología y notación no estándar, y entre los conceptos matemáticos había una tendencia de hacer mezclas con filosofía.

Grassmann publicó una revisión de su primer trabajo en 1862, de nuevo sin éxito. Solamente un año después, se reconoció que había formulado conceptos que ahora llamamos dependencia lineal, bases, y dimensión.

El matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) fue uno de los pocos que identificó el trabajo de Grassmann y en 1888, Peano publicó una interpretación condensada de este. En un breve capítulo al final de su obra, Peano presenta las definiciones axiomáticas de un espacio vectorial, similares a las que se presentan en esta lección, pero tuvo poco reconocimiento más allá de un pequeño grupo en Italia.

La definición actual se deriva del trabajo de un matemático alemán, Hermann Weyl (1885-1955), en 1918. A pesar de que los axiomas generados por Weyl son más cercanos a los de Peano que a los de Grassmann, Weyl no menciona a su predecesor italiano, pero sí reconoce a Grassmann.

Parte del éxito de Weyl, se debe a que pensó en espacios vectoriales bajo una perspectiva geométrica, mientras que Grassmann y Peano pensaron en estructuras algebraicas abstractas.

Por ello, se verá que geometría juega un papel importante en la comprensión de espacios vectoriales.

Los espacios vectoriales y sus estructuras auxiliares proporcionan un lenguaje común para álgebra lineal y, como tales, son un prerrequisito esencial para comprender matemáticas aplicadas.

Los conceptos claves de espacios vectoriales, subespacio, independencia lineal, generadores de espacios lo cual aparece, no solo en sistemas lineales de ecuaciones algebraicas, también, se encuentra en geometría, espacios euclidianos, ecuaciones

diferenciales lineales, problemas en la frontera, análisis de Fourier, procesamiento de señales, métodos numéricos y muchos otros campos.

Por ello, con el fin de adquirir competencia en álgebra lineal y sus aplicaciones, es imperativo adquirir una comprensión firme de construcciones y generadores de espacios vectoriales.

## Definiciones

**Espacio vectorial**- El espacio puede ser denotado por  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \dots$

El espacio  $\mathbb{R}^n$  consiste en todos los vectores columna  $v$  con  $n$  componentes.

En este caso, los componentes de  $v$ , son números reales, por ello la letra  $\mathbb{R}^n$ .

Cada espacio consiste en una colección completa de vectores. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^5$  consiste en todos los vectores columna de cinco componentes, al que se le llama *espacio de 5-dimensiones*.

**Tipos de espacios vectoriales**- Los espacios vectoriales vienen en diferentes tipos, cada uno posee diferentes propiedades y características. Al comprender los diferentes tipos de espacios vectoriales se pueden aplicar conceptos a diferentes dominios.

(a) Espacios vectoriales reales y complejos: Un espacio real consiste en vectores y escalares que están en el campo de los números reales. Este tipo de espacios vectoriales tiene aplicaciones muy diversas, tales como en física, ingeniería, economía, etc.

Un espacio vectorial complejo encuentra su aplicación en mecánica cuántica, procesamiento de señales, ingeniería eléctrica, entre otros.

(b) Espacios vectoriales finitos e infinitos. Esta caracterización está basada en sus dimensiones, las cuales pueden ser finitas e infinitas. En un espacio vectorial finito, los vectores pueden ser expresados como una combinación lineal de un conjunto finito de vectores, formando una base para el espacio.

Por el otro lado, en un espacio vectorial infinito posee infinitos vectores que no pueden ser expresados como una combinación lineal finita. Estos espacios pueden surgir en un análisis funcional, donde las funciones actúan como vectores.

**Subespacio vectorial**- Es un conjunto de vectores que satisface los siguientes tres requerimientos, la inclusión de un vector nulo (que incluye al cero), el conjunto de vectores es cerrado bajo la suma  $(v + u)$  y  $k$  es un escalar tal que  $kv$ .

**Combinación lineal e intersecciones de todos los espacios vectoriales.** Las combinaciones lineales son operaciones donde los vectores se multiplican por escalares y se adicionan. Esta operación permite generar nuevos vectores en un espacio al combinar vectores existentes en diferentes proporciones. El generador de un conjunto de vectores es una colección de todos los posibles vectores que pueden ser formados por combinaciones lineales de los vectores originales. Los conjuntos generadores proporcionan una base para el espacio vectorial.

**Base y dimensión**- Una base es un concepto esencial en espacios vectoriales, ya que se define como un conjunto de vectores unitarios linealmente independientes que generan el espacio vectorial completo. Estos vectores actúan como bloques de construcción y permiten la representación de cualquier vector en el espacio a través de combinaciones lineales.

Además, una base proporciona la solución del sistema lineal. La dimensión de un espacio vectorial corresponde al número de vectores en la base. Cuantifica el “tamaño” del espacio vectorial y proporciona visión sobre su estructura.

**Independencia lineal**- Cuando la combinación de un conjunto de elementos es igual a cero, solo cuando cada uno de los escalares es cero. El conjunto de vectores  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  es linealmente independiente cuando  $a_1 v_1, a_2 v_2, \dots, a_k v_k = 0$ .

## Lección formativa

### Módulo 1. Introducción a espacios vectoriales

Este módulo está asociado a la **comprensión de espacio vectorial**, lo que lo constituye, sus axiomas y su uso en la prueba de determinar si un conjunto de vectores es un espacio.

Los resultados de aprendizaje son:

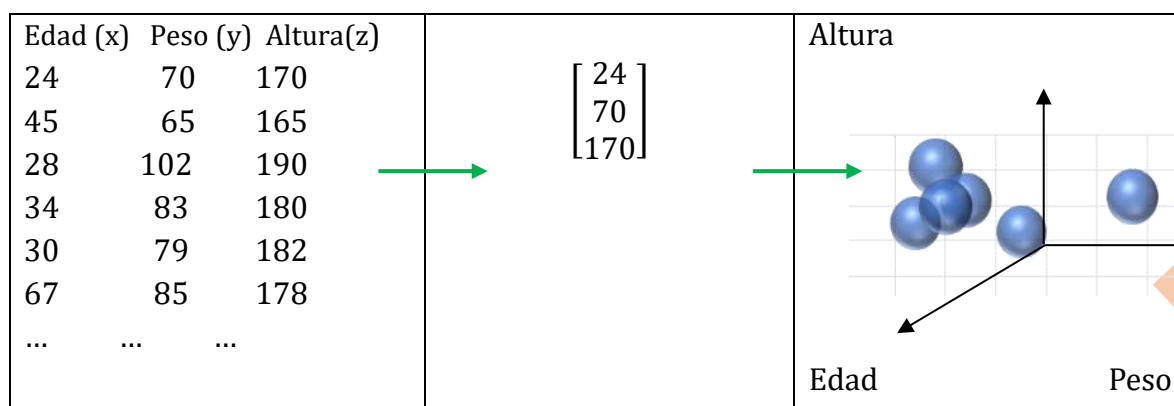
**Identificar y describir atributos – clasificar objetos** conforme la definición de espacio vectorial

**Aplicar** axiomas para determinar si un objeto es espacio vectorial

**Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 1**

En el ámbito de las matemáticas, nos encontramos con numerosos casos en los cuales se identifica o se describe una colección de "objetos". Estos objetos, para formar parte genuina de dicha colección, deben estar intrínsecamente vinculados a ciertas reglas específicas.

Por ejemplo, la altura, el peso y la edad, ¿estos datos pueden ser representados como un vector?

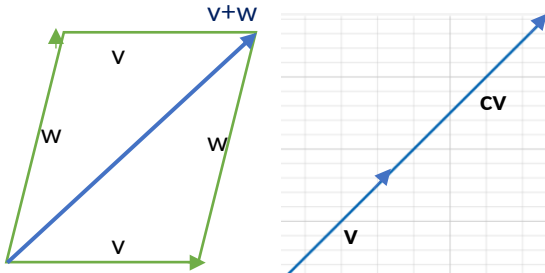


Los datos mostrados se han representado como vectores, y en el ejemplo, una fila de estos datos corresponde a una característica, la edad, otra fila, al peso y otra más, a la altura. Estas características representan entradas de un vector.

En este ejemplo, los datos solo tienen sentido en el cuadrante I en un plano cartesiano correspondiente a números positivos (p. ej. una persona no tiene una edad negativa). Por tanto, su alcance está limitado a  $x > 0, y > 0, z > 0$ , por las características físicas que representan.

Antes de proceder a presentar una visión más formal de espacios vectoriales, es importante que se comprenda un poco más de lo que distingue a un espacio vectorial.

Al sumar dos vectores, se genera otro vector  $\nearrow$  que también tiene características comunes a los vectores originales que lo formaron. También, cuando se multiplica un vector por un escalar, este mantiene su dirección, aunque puede cambiar su magnitud o su sentido, pero no por ello, dejará de ser un vector.

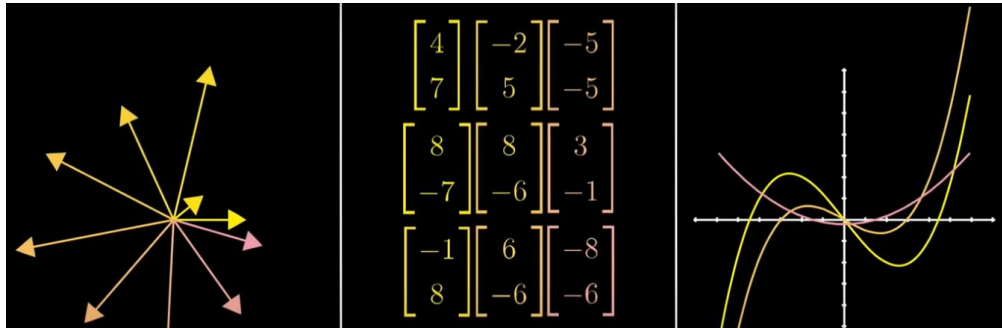
$$v + w = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}, \quad cv = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{bmatrix}, \quad \text{donde } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$


En ambos ejemplos, a los dos vectores,  $v$  y  $w$ , se les aplicaron dos operaciones en lenguaje algebraico, que también, por su dimensión, pueden ilustrarse gráficamente.

Esto, en apariencia simple, determina si “algo” se denomina **espacio vectorial**.

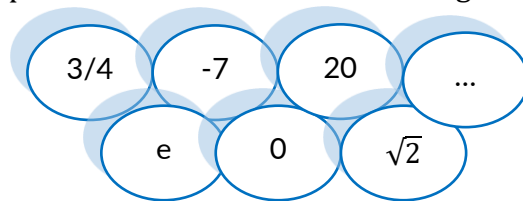
En los espacios vectoriales, para que un objeto pueda ser definido como tal, se deben satisfacer algunos requisitos: (a) la existencia de **dos conjuntos**, por ejemplo,  $V$  y  $F$ , y (b) la realización de dos operaciones algebraicas llamadas; **suma de vectores** y **multiplicación por un escalar**, cuyos productos sigan perteneciendo a ese espacio.

En la siguiente ilustración,  $V$  es un conjunto no vacío de objetos llamados **vectores**, pero también pueden ser tuplas, un conjunto de matrices o funciones (p.ej. polinomios).



El otro grupo,  **$F$ , es un campo de escalares** -para nosotros  $F$  puede corresponder a los números complejos  $\mathbb{C}$ , aunque, suele emplearse más, para el campo de los números reales  $\mathbb{R}$ <sup>1</sup>.

Algunos ejemplos de números reales son los siguientes:



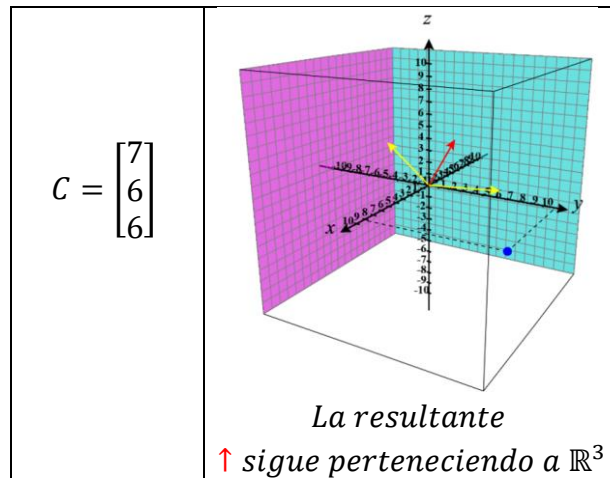
Con estos **dos conjuntos** se pueden hacer operaciones. La **suma de vectores** es una operación entre los elementos de  $V$ .

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$  La operación de la suma resulta en:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

---

<sup>1</sup> El alcance de esta lección se encuentra con espacios vectoriales reales, en los cuales, escalares son números ordinarios reales, y con ello, un espacio vectorial se considerará como un conjunto de elementos  $V$ , con vectores  $u, v$  y  $w$ . Por otra parte, se tiene que  $k$  y  $m$  son números reales en donde se aplican operaciones de suma y multiplicaciones.



La **multiplicación por un escalar** es una operación entre elementos de los grupos  $F$  y  $V$ .

$$6C = \begin{bmatrix} 42 \\ 36 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores que están en un espacio vectorial deben cumplir con reglas específicas y “cooperar” cuando participan en las dos operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. **De manera que, si un conjunto es un espacio, entonces tendrá una estructura en la cual se podrá trabajar con vectores y realizar operaciones con ellos. Así también se podrán explorar relaciones entre vectores, descomponerlos en sus partes constituyentes, y analizar su comportamiento bajo diferentes transformaciones.** En un espacio vectorial se deben cumplir los siguientes axiomas:

1. **Cerradura bajo la suma:** Si  $\bar{u} \in V$  y  $\bar{w} \in V$ , entonces  $\bar{u} + \bar{w} \in V$ , es decir,  $\bar{u} + \bar{w}$  mantienen las propiedades de  $V$  (Véase pie de página<sup>2</sup>).
2. **Ley asociativa de la suma de vectores**  $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
3. **Existe un vector  $\bar{0}$  se llama vector cero o idéntico aditivo**  $\bar{0} \in V$ , tal que  $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0}$ .
7. **Primera ley distributiva.**  $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$ .
8. **Segunda ley distributiva.** Sean los dos escalares  $k, m \rightarrow (k + m)\bar{u} = k\bar{u} + m\bar{u}$ .

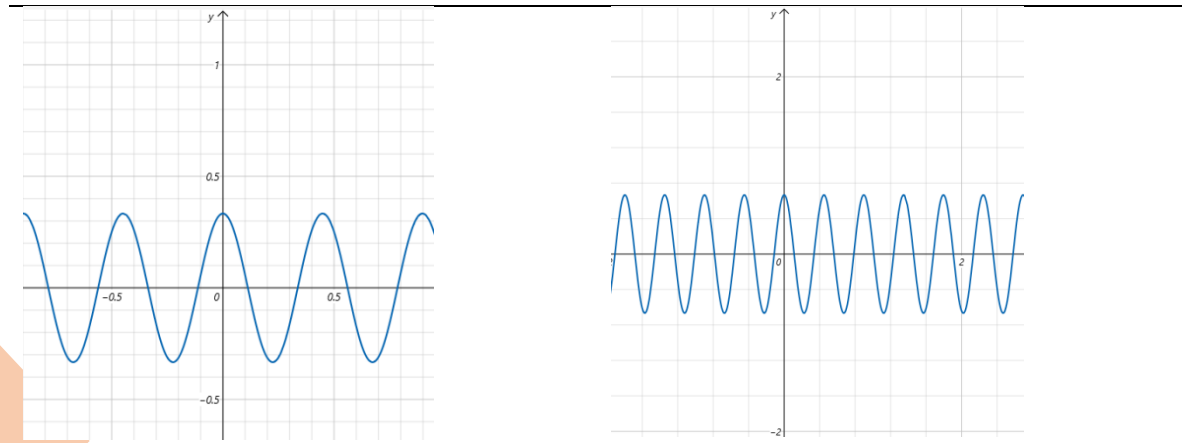
<sup>2</sup> Se lee: si  $u$  está en  $V$ , y  $w$  está en  $V$

4.  $-\bar{u}$  se llama inverso aditivo de  $\bar{u}$ . Para todo  $\bar{u} \in V$ , existe  $-\bar{u} \in V$ .
5. Ley conmutativa de la suma de vectores (*Véase pie de página*<sup>3</sup>). Si  $\bar{u} \in V$  y  $\bar{w} \in V \rightarrow \bar{u} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{u}$ .
6. Cerradura bajo la multiplicación por un escalar. Si  $\bar{u} \in V$ , y  $k$ , es un escalar (o sea, un número cualquiera)  $\rightarrow k\bar{u} \in V$ .
9. Ley asociativa de la multiplicación por escalares. Para cada vector  $\bar{u} \in V$ , y los escalares  $k, m \rightarrow k(m\bar{u}) = (km)\bar{u}$ .
10. Para cada vector  $\bar{u}$  perteneciente a  $V$ , donde  $1\bar{u} = \bar{u}$  se le llama preservación de escala.

A menos que se trate con ejemplos específicos, tales como, espacios de funciones o matrices, las letras minúsculas denotan los elementos de un espacio vectorial, el 0 denota un número real. Pero si se trata de un vector o una matriz de ceros, se denotará como  $\bar{0}$ .

En esencia, los requerimientos indican que para la adición de vectores y la multiplicación por escalares deben **obedecer** exactamente los axiomas descritos.

**Ejemplo 1.** Para reforzar la idea de espacio vectorial, te presentamos un conjunto de funciones, en la cual dos funciones con dominio  $(-\infty, \infty)$ , y una estructura denominada campo, con un escalar y la aplicación de las dos operaciones de suma y multiplicación, se muestran así:



<sup>3</sup>  $\rightarrow$ , se lee, "entonces"

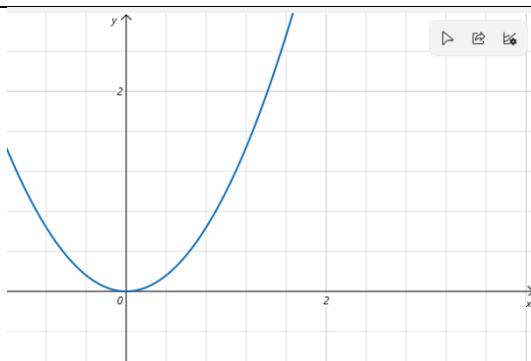
La función original:

$$f(x) = \frac{1}{3} \cos 14x$$

La función modificada cuando se aplica la operación de multiplicación por un escalar:

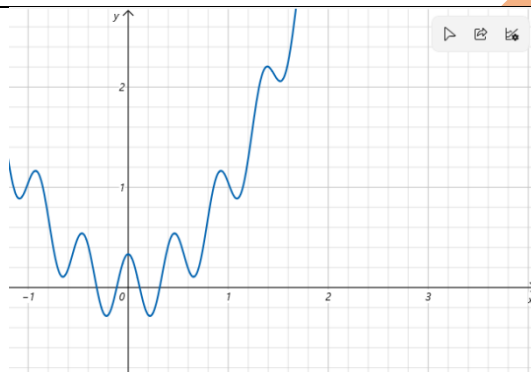
$$2f(x) = \frac{2}{3} \cos 14x$$

Ahora, se tiene otro polinomio, al cual se le aplica la suma:



La función original

$$g(x) = x^2$$



La aplicación de la suma entre las dos funciones originales:

$$f(x) + g(x) = \frac{1}{3} \cos 14x + x^2$$

Estas funciones exhiben una importante característica que las distinguen como una estructura. Son **lineales**, en el sentido de que al aplicar las dos operaciones (suma y multiplicación por un escalar), se han producido **nuevas funciones dentro del mismo espacio de funciones**.

Adicionalmente, cada **espacio vectorial**, tiene un **vector cero**, o sea, debe existir un vector de este tipo, con una magnitud cero, el cual sirve como una identidad para la suma en el espacio. Al sumar un vector cero a cualquier vector, resulta en el vector original.

Asimismo, existe un elemento neutro llamado *unidad*, de ahí que es razonable decir que, todo número real diferente de cero tiene un elemento inverso.

En consecuencia, de los espacios vectoriales y de la unidad surgen identidades que, también son requisitos para que un objeto sea definido como espacio vectorial:

**11.**  $0v = \bar{0}$ , para todo  $v \in V$

**12.**  $(-1)v = -v$

13.  $k\bar{0} = \bar{0}$ , para todo escalar  $k$   
14. Si  $kv = \bar{0}$ , entonces  $k = 0$  o  $v = \bar{0}$

Algunos ejemplos ilustrativos de espacios vectoriales son: (a) los números reales, (b) el conjunto de funciones continuas, (c) el conjunto de polinomios de grado  $\leq n$ , (d) el conjunto de vectores en  $\mathbb{R}^n$  que son linealmente independientes, (e) el vector  $\bar{0}$ .

Sin embargo,  $\{1\}$  no es un espacio vectorial, ya que  $1+1=2$ , es decir, no se cumple con el primer axioma.

A continuación, el siguiente ejemplo es un clásico representativo para probar la definición de espacios vectoriales.

**Ejemplo 2.** Sea  $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1 \ x_2, \dots \ x_n): x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i=1, 2, \dots, n\}$

Pruebe que es un espacio vectorial por medio de los diez axiomas que lo definen.

Solución. Los problemas de este tipo corresponden a probar los axiomas de espacio vectorial. Se trata de que tú propongamos tus propios vectores o matrices, por ejemplo,

$$X = (x_1 \ x_2, \dots \ x_n)$$

$$Y = (y_1 \ y_2, \dots \ y_n)$$

$$0 = (0_1, 0_2, \dots \ 0_n)$$

1) Cerradura bajo la suma: Dado que la suma  $X+Y \in \mathbb{R}^n$  para  $i=1, 2, \dots, n$ , entonces se cumple el axioma, ya que cada vector  $X$  e  $Y$  en  $\mathbb{R}^n$ . (Recordar que la suma de matrices debe respetar el orden).

2) Ley asociativa de la suma de vectores: Sea  $(X+Y)+0 \in \mathbb{R}^n$ ; sea  $X+(Y+0) \in \mathbb{R}^n$ , por lo tanto  $(X+Y)+0 = X+(Y+0)$ , que prueba el segundo axioma.

3) El 0 se llama vector cero o idéntico aditivo: Sea  $X+0=X$ ;  $0+X=X$ , por lo que queda probado el tercer axioma.

4)  $-x$  se llama inverso aditivo de  $x$ : Sea  $X+(-X)=0$ , por lo que se cumple con el cuarto axioma.

5) Ley conmutativa de la suma de vectores: Si  $X+Y \in \mathbb{R}^n$ , y  $Y+X \in \mathbb{R}^n$ , por tanto,  $X+Y=Y+X$ .

- 6) Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Sea  $k_1$ , un escalar  $\rightarrow$  como  $X \in \mathbb{R}^n \rightarrow kX \in \mathbb{R}^n$ .
- 7) Primera ley distributiva: Como  $k(X + Y) \in \mathbb{R}^n$ , y  $kX + kY \in \mathbb{R}^n \rightarrow k(X + Y) = kX + kY$
- 8) Segunda ley distributiva: Sea  $k_2$  otro escalar: dado que  $(k_1 + k_2)X \in \mathbb{R}^n$ , y  $k_1X + k_2X \in \mathbb{R}^n \rightarrow (k_1 + k_2)X = k_1X + k_2X$
- 9) Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Sea  $k_1(k_2X) \in \mathbb{R}^n$ , y  $(k_1k_2)X \in \mathbb{R}^n \rightarrow k_1(k_2X) = (k_1k_2)X$
- 10) Para cada vector  $x$  perteneciente a  $X$ ,  $1x=x$ : Sea  $k_1=1 \rightarrow 1X=X$

**Por lo tanto, la representación del vector  $X$ , es un espacio vectorial porque cumplió con los diez axiomas.**

*Adaptado de Grossman S & Flores J.J. (2012) Álgebra Lineal, McGraw Hill, 7ª ed.*

**Ejemplo 3.** El conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^3$  que se encuentran en un plano que pasa por el origen constituye un espacio vectorial.

Solución. Sea  $V = \{(x, y, z)\} / ax + by + cz = 0$ . Esto es,  $V$  es el conjunto de puntos  $x, y, z$  en  $\mathbb{R}^3$ , tal que están en un plano y que pasan por el origen.

Para demostrar que  $V$  es un espacio vectorial, se puede verificar que se cumple cada uno de los axiomas, y para ello, como en el ejemplo 2, hay que proponer dos coordenadas  $x, y, z$  generales en  $V$ :

$$(x_1, y_1, z_1)$$

$$(x_2, y_2, z_2)$$

Entonces,

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in V$$

Porque

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$

Los demás axiomas se verifican fácilmente y se podrá concluir que el conjunto de puntos que se encuentra en un plano  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el origen constituye un plano vectorial.

**Ejemplo 4.** Se trata de probar que el conjunto  $P$  de todos los polinomios reales de grado  $\leq n$  es un espacio vectorial.

Solución. El enunciado indica que si, por ejemplo, el espacio vectorial que se toma es  $n=4$ , representado dentro de  $\mathbb{R}^4$ , entonces, los polinomios que se aceptan son los de grado 4 o menor que estos. Lo anterior implica que, si se tiene,  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_5x^5$ , esto no está en los alcances de ese ejemplo particular. Ahora a resolver el ejemplo 4.

Se procede a proponer dos polinomios  $p$  y  $q$  con coeficientes reales de grado  $n$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Entonces,

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

Este es un polinomio de coeficientes reales de grado  $n$  que pertenece a  $P$ , por lo tanto, la operación suma es cerrada.

Sea  $r \in R$ , entonces,

$$rp = ra_0 + ra_1x + ra_2x^2 + \dots + ra_nx^n$$

Es un polinomio de coeficientes reales de grado  $n$  que pertenece a  $P$ , por lo tanto, la operación producto por un escalar es cerrada.

Además, se tiene el polinomio cero y se cumplen los ocho axiomas restantes.  $P$  es un espacio vectorial.

### Subespacio vectorial

En muchos problemas, un subespacio vectorial consiste en un conjunto de vectores perteneciente a un espacio más amplio. Cuando esto ocurre, solo tres de los diez axiomas requieren ser probados; ya que el resto se satisfacen de manera automática.

Lo anterior se justifica, sobre la idea de que se “heredan” las operaciones del espacio vectorial  $V$ .

Un subespacio no vacío del espacio vectorial  $V$ , es un subconjunto de  $H$ , que tiene las tres propiedades:

- a. El vector cero de  $V$ , también se encuentra en  $H$
- b. Si  $x \in H$  y  $y \in H$ , entonces  $x + y \in H$
- c. Si  $x \in H$ , entonces,  $kx \in H$ , para todo escalar  $k$

Existen muchos ejemplos de subespacios vectoriales, te presentamos ejemplos para proceder después, con una actividad formativa.

**Ejemplo 5.** Determine si el siguiente conjunto es un subespacio vectorial del espacio de los polinomios de grado tres  $\mathbb{R}^3$ :

$$A = \{P(x) \in \mathbb{R}^3 \mid P(0) = 1\}$$

**Solución.** Nótese que  $P(0)$  se refiere a una condición “Tal que  $P(0)$  sea igual a 1”. Entonces, para cualquier polinomio valorado en cero debería tener como resultado 1.

Considerando que se prueba un subespacio por los axiomas; (a) cerradura bajo la suma, (b) cerradura bajo la multiplicación por un escalar e (c) Idéntico aditivo, se procede a probarlos.

Sean dos polinomios del espacio  $A$ :  $P(x)$  y  $Q(x)$ , y el escalar,  $\lambda$ .

a) La cerradura bajo la suma dice en este caso que si  $P(x) \in \mathbb{R}^3$  y  $Q(x) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow P(x) + Q(x)$  también deben pertenecer a  $\mathbb{R}^3$ . Véase lo siguiente:

Si se toma en cuenta la condición, entonces:

$P(0)=1$  y  $Q(0)=1$ . Por tanto,  $P(0) + Q(0)=2$ . El resultado no es un subespacio vectorial ya que vulnera el axioma de la cerradura bajo la suma.

b) Cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Si el polinomio  $P(0)=1$  y un escalar  $\lambda$ , con cualquier valor, por ejemplo,  $\lambda=2, \rightarrow \lambda P(0) = 2(1)$ , o sea es igual a 2, lo cual no pertenece al subespacio. Esto solo sería únicamente válido para  $\lambda = 1$ , pero no para cualquier otro valor.

Con sólo demostrar que no cumple al menos uno de los tres axiomas, queda probado que  $A$  no es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3(x)$ .

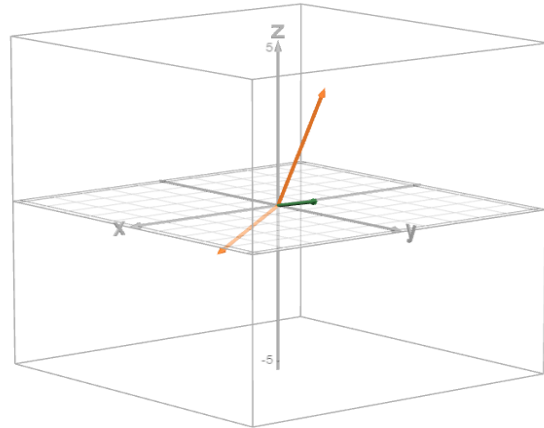
**Ejemplo 6.** Determinar si el vector  $v(2, 4, 1)$  pertenece al subespacio generado por el siguiente sistema de vectores:

$$A = \{(3,1,-1), (0,2,4)\}$$

**Solución.** Se genera un gráfico de los tres vectores para mejorar la comprensión.

|   |                                                                                   |                                          |                                                                                   |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1 |  | $v_1 = \text{vector}((0,0,0), (3,1,-1))$ |  |
| 2 |  | $v_2 = \text{vector}((0,0,0), (0,2,4))$  |  |
| 3 |  | $v_3 = \text{vector}((0,0,0), (2,4,1))$  |  |

El sistema de vectores, en color anaranjado, forman un plano, y se quiere probar que  $(2,4,1)$  en color verde, está en ese plano.



De manera similar que el ejemplo anterior, se requiere probar los tres axiomas: (a) cerradura bajo la suma, (b) cerradura bajo la multiplicación por un escalar e (c) Idéntico aditivo.

Para determinar si el vector  $v$  pertenece al sistema  $A$ , se probará el axioma de cerradura bajo la suma:

$$(3,1,-1) + (0,2,4) = (3,3,3)$$

A pesar de que el vector resultante  $(3,3,3)$  no es igual a  $(2,4,1)$ , en sus términos, sí es congruente ya que mantiene su orden de  $1 \times 3$ , por lo tanto, el vector si pertenece a la base del sistema propuesto. Se cumple la cerradura bajo la suma.

Se procede a probar la cerradura de multiplicación por un escalar, esto es

$$\lambda(2,4,1) = (3,3,3)$$

$2\lambda = 3$  por lo que  $\lambda = 3/2$ , pero también  $4\lambda = 3$ , por lo que  $\lambda = 3/4$ , lo cual es incongruente. Por lo tanto, el vector  $v$  no pertenece a la base. No se cumple la cerradura bajo la multiplicación por un escalar.

Se concluye que  $v (2, 4, 1)$  NO pertenece al subespacio generado  $A = \{(3,1,-1), (0,2,4)\}$

**Problema 7.** Determinar si el siguiente conjunto  $F = \{A \in M_{3 \times 2} \mid A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0\}$ , es un subespacio vectorial de  $M =_{3 \times 2}$

Solución. En este tipo de problemas, se busca probar la condición denotada por / (tal que), en este caso una matriz

**A de orden  $3 \times 2$  que se multiplica por un vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$**

Dada la condición del problema, considerar a la matriz A, como

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \text{ que al multiplicar por } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ se obtiene } \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ b_1 + 2b_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prueba de la cerradura bajo la suma: Como  $a_1 + 2a_2 = 0$ , esto implica que  $a_1$  y  $a_2$  sean 0, para que se cumpla este axioma. Lo mismo sucede con  $b_1$  y  $b_2$  y con  $c_1$  y  $c_2$ . Nótese que el vector resultante  $\vec{0}$ , es un vector columna de orden  $3 \times 1$ , que es subespacio de una matriz de  $3 \times 2$ . Se cumple con el axioma.

Prueba del axioma de cerradura bajo la multiplicación por un escalar: Sea un escalar  $k$ :

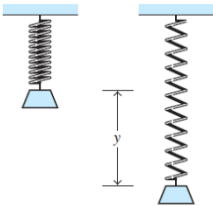
$k \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Para que se logre esta condición,  $k$  forzosamente tendría que ser cero. Se supone que debería admitir cualquier valor que se le asigne a  $k$ . No se cumple con el axioma.

Por lo tanto, bajo esa condición A no es subespacio de  $M_{3 \times 2}$ .

## Evaluación formativa

Lee con atención a cada caso, y determina si es espacio vectorial:

1. Si una masa  $m$  se coloca en un extremo de un resorte, y si la masa se jala hacia abajo y se suelta, comenzará a oscilar.



El desplazamiento de  $y$  de la masa a la posición de inicio está dada por la función:

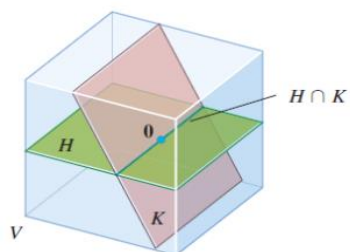
$$y(t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

Donde  $w$  es una constante que depende del resorte de la masa. Muestre que el conjunto de todas las funciones descritas con  $w$  fija y  $c_1, c_2$  arbitraria, ¿es un espacio vectorial?

¿Es espacio vectorial? ( ) Si ( ) No

2. Sea  $H$  y  $K$  subespacios de un espacio vectorial  $V$ . La **intersección** de  $H$  y  $K$ , escrita como  $H \cap K$  es un conjunto de  $v$  en  $V$  y pertenece tanto a  $H$ , como a  $K$ .

Probar si  $H \cap K$  es un subespacio de  $V$ , conforme se muestra en la figura.



¿Es espacio vectorial? ( ) Si ( ) No

3. Determinar si el conjunto de vectores  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | b = 3a + 1\}$

¿Es espacio vectorial? ( ) Si ( ) No

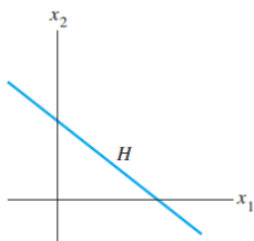
Retroalimentación: No es espacio vectorial, porque no contiene no admite al vector 0, y no está cerrado bajo la suma o multiplicación por un escalar.

4. El conjunto de números reales, con suma definida por  $x + y = x - y$

¿Es espacio vectorial? ( ) Si ( ) No

Retroalimentación: No es espacio vectorial, porque en el resultado no se respeta las posibilidades de asociación ni conmutatividad.

5. Observa el siguiente gráfico y determina si es espacio vectorial



¿Es espacio vectorial? ( ) Si ( ) No

Retroalimentación: No es espacio y tampoco puede ser considerado como subespacio de  $\mathbb{R}^2$ . La línea no pasa por el origen, por lo tanto, no contiene al vector cero.

## Módulo 2. Combinación lineal y dependencia lineal

Asociado a la comprensión de los conceptos de independencia lineal y combinación lineal, mediante la presentación de ejemplos y puesta en práctica.

Los resultados de aprendizaje son:

**Discriminar** entre conjuntos de **vectores linealmente dependientes e independientes**

Identificar entre conjuntos de vectores, **su base y dimensión**, soportado por conceptos de espacio vectorial e independencia lineal

**Evaluación formativa en distintas etapas del módulo 2**

Como preámbulo, hasta ahora, en tu educación, has aprendido a resolver problemas como el siguiente:

Si se solicita reescribir  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$  para el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 8$$

$$x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 7$$

Una manera de hacerlo puede ser bajo el enfoque de  $Ax=b$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Otra forma es usando matrices en forma de columnas:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Esta última forma de escritura muestra al objeto matemático como matrices en columnas, cuya representación es análoga a la de una combinación lineal.

La definición de combinación lineal es:

Dado los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y dado los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , una combinación se genera

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

El término combinación lineal se soporta por el axioma 2 de espacios vectoriales y se refiere a cualquier suma de escalares que están sobre vectores, y el conjunto de todas las combinaciones lineales denotan un subespacio.

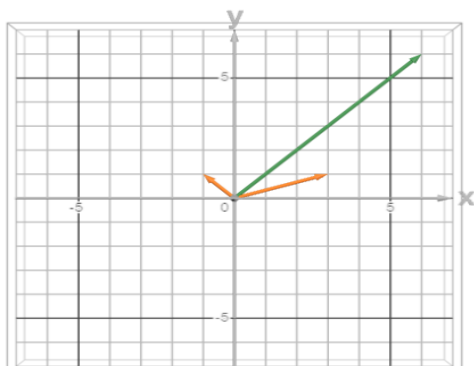
Para comprender cómo funcionan las combinaciones, en el siguiente ejemplo se tienen dos vectores  $u$  y  $v$  en  $\mathbb{R}^2$ , y se desea saber si un tercer vector  $w$  se puede expresar como la combinación lineal de los anteriores.

$$u = (-1, 1)$$

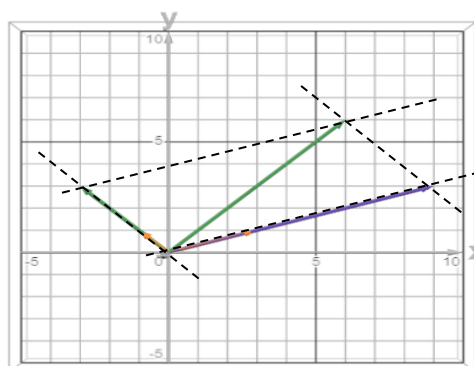
$$v = (3, 1)$$

$$w = (6, 6)$$

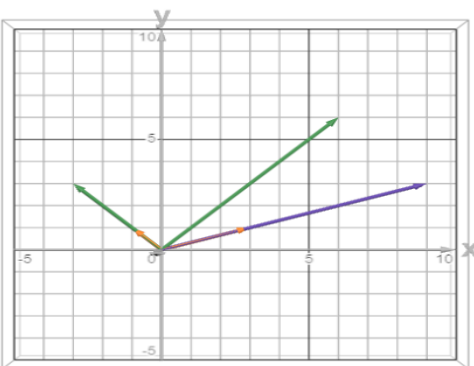
Se pueden aprovechar conocimientos de Geometría, aplicados a la Física:



Se tiene el vector  $w$  que se desea expresar como la combinación de  $u$  y  $v$ .



Recordando la Regla del paralelogramo de vectores, este se puede completar.



La combinación lineal se puede expresar como

$$(6, 6) = 3(-1, 1) + 3(3, 1)$$

$$(6, 6) = 3u + 3v$$

Como se observa, en una combinación lineal se aplican conceptos de espacios vectoriales, en donde la última expresión matemática permite determinar los escalares que obtienen al vector  $(6, 6)$ .

## Actividad formativa

Seguir las instrucciones que a continuación se te presentan:

1-Se tienen dos vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2-Dado que interesa respetar los axiomas del espacio vectorial, se tiene también al vector  $\bar{0}$ .

$$\bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3-Ingresa a la calculadora gráfica en 3D Desmos:

<https://www.desmos.com/3d?lang=es>

4-En el lado izquierdo de la aplicación, define los vectores:

$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ , con la instrucción:  $a1=\text{vector}((0,0,0), (2,3,1))$

5-La siguiente línea es:

$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ , con la instrucción:  $a2=\text{vector}((0,0,0),(1,4,2))$

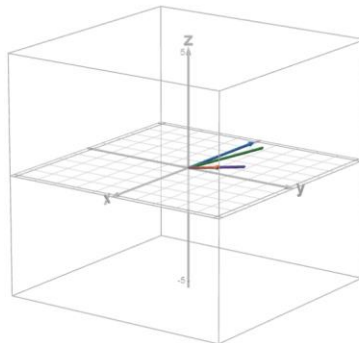
6-Continúa en la siguiente línea:

$a_1 + a_2$ , con la instrucción  $a1+a2$

7- Luego, continúa con:

$2a_1$ , con la instrucción  $2a1$

Llegarás a lo siguiente:

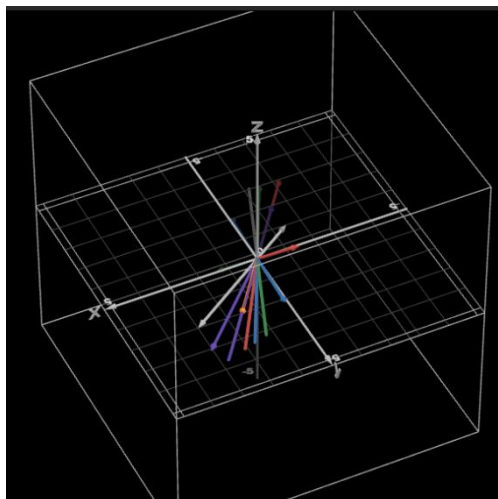


Seguirás ingresando las siguientes operaciones sobre los vectores:

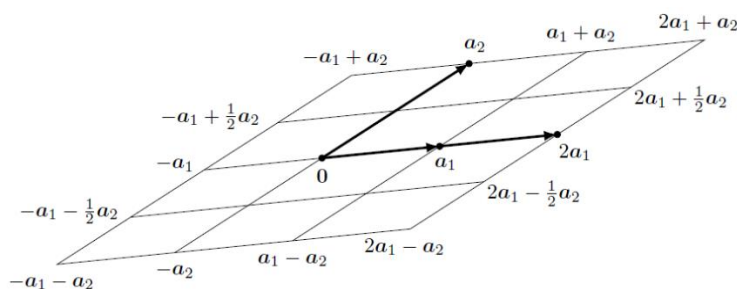
$$\begin{aligned}
 & -a_1 - a_2, -a_2, a_1 - a_2, 2a_1 - a_2, \\
 & 2a_1 - \frac{1}{2}a_2, 2a_1, 2a_1 + \frac{1}{2}a_2 \\
 & -a_1 - \frac{1}{2}a_2, -a_1, -a_1 + \frac{1}{2}a_2, -a_1 + a_2, \\
 & 2a_1 + a_2
 \end{aligned}$$

Estas múltiples operaciones resultan en combinaciones lineales, donde ocurren multiplicaciones por escalares y la suma entre vectores. Aquellos escalares que son negativos cambiarán en sentido inverso la dirección. Eventualmente, como se observa en el gráfico las combinaciones “llenan” al plano.

Dale clic al gráfico y notarás el dinamismo de este.



**La clave es que, en un plano infinito, mientras más y más escalares se usen, más ayudan a completar el plano:**



Para seguir todas las instrucciones, también compartimos el siguiente enlace:

<https://www.desmos.com/3d/45910fb51a>

A continuación, te presentamos un ejemplo clásico de combinaciones lineales, con apoyo de operaciones con matrices.

**Ejemplo 8.** Sean los vectores  $u$  y  $v$  en  $\mathbb{R}^3$ , y se pretende que el vector  $w = (9, 2, 7)$  se exprese como una combinación lineal de  $u$  y  $v$ , donde  $u = (1, 2, -1)$  y  $v = (6, 4, 2)$ .

Solución. Este ejemplo tiene el objetivo de encontrar escalares, llámense  $r$  y  $s$ , tales que el vector  $w$ , se pueda expresar como:

$$w = ru + sv$$

Se procede a sustituir,

$$\begin{aligned}(9, 2, 7) &= r(1, 2, -1) + s(6, 4, 2) \\ &= (r + 6s, 2r + 4s, -r + 2s)\end{aligned}$$

Ahora, se igualan al vector  $w$

$$\begin{aligned}r + 6s &= 9 \\ 2r + 4s &= 2 \\ -r + 2s &= 7\end{aligned}$$

Al resolver este sistema se obtiene que

$$r = -3 \text{ y } s = 2$$

Esto implica que el vector  $w$  se puede expresar como una combinación lineal de  $u$  y  $v$ . Esto es,

$$w = -3u + 2v$$

El concepto de combinación lineal se puede invertir como se presenta en este ejemplo:

**Ejemplo 9.** Sean  $u_1 = (-1, 3, 2, 0)$ ,  $u_2 = (2, 0, 4, -1)$ ,  $u_3 = (7, 1, 1, 4)$ ,  $u_4 = (6, 3, 1, 2)$ . Encuentre los escalares, tales que  $C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 + C_4u_4 = (0, 5, 6, -3)$ .

Solución. Como cada vector está relacionado por pertenecer al mismo espacio vectorial, se pueden escribir como una combinación lineal.

$$\begin{aligned}-C_1 + 2C_2 + 7C_3 + 6C_4 &= 0 \\ 3C_1 + 0 + C_3 + 3C_4 &= 5 \\ 2C_1 + 4C_2 + C_3 + C_4 &= 6 \\ 0 - C_2 + 4C_3 + 2C_4 &= -3\end{aligned}$$

Para efectos operacionales, el sistema anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

Aplicando cualquier método para reducir a la matriz, en una equivalente, el sistema de soluciones está dado por

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 22 & 21 & 5 \\ 0 & 8 & 15 & 13 & 6 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 22 & 21 & 5 \\ 0 & 0 & 86/6 & -90/6 & 6 \\ 0 & 0 & 46/6 & 33/6 & -13 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 22 & 21 & 5 \\ 0 & 0 & -86 & -90 & -4 \\ 0 & 0 & 46 & 33 & -13 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 22 & 21 & 5 \\ 0 & 0 & -86 & -90 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1302 & -1302 \end{array} \right)$$

Al realizar una sustitución regresiva (por ejemplo  $-1392C_4 = -1302$ , de ahí que  $C_4 = 1$ ), el vector solución satisface la relación original con

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ o}$$

$$C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = -1 \text{ y } C_4 = 1$$

Cuando un conjunto de vectores en un espacio vectorial se dice que son **linealmente independientes**, implica que ninguno de los vectores puede ser expresado como una combinación lineal de otros.

En este sentido, si se tienen los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que se combinan linealmente y se satisface que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \vec{0}$$

El término “linealmente dependiente” sugiere que los vectores dependen unos de otros, a partir de la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar, lo cual, a su vez, es congruente con las operaciones elementales de matrices.

Además, de la definición de los vectores se desprende que cualquier conjunto de vectores es linealmente independiente **si todo** subconjunto finito es linealmente independiente.

Los vectores que son linealmente independientes proporcionan una base, un generador, para un espacio vectorial y juegan un rol crucial para comprender su dimensión.

Una manera de probar la independencia es con la dependencia, al generar un sistema lineal e igualarlo con cero. Si resulta que, al resolver dicho sistema por alguno de los métodos de solución, se generan renglones y/o columnas de ceros, entonces el sistema es linealmente dependiente. A continuación, te presentamos un conjunto de ejemplos desarrollados.

**Ejemplo 10.** Determine si el siguiente sistema es linealmente independiente

$$S = \{(2,1,1, -1,1), (-2,-1,2,2,-2), (6,3,0,-4,4)\}.$$

Para reforzar la comprensión en combinaciones lineales se presentan otros ejemplos más.

Solución. Como ocurre con los espacios vectoriales, se deben proponer, en este caso, escalares.

Sean  $r_1, r_2$  y  $r_3$  escalares, tales que la siguiente combinación lineal se satisface:

$$r_1(2,1,1, -1,1) + r_2(-2,-1,2,2,-2) + r_3(6,3,0,-4,4) = 0$$

Es claro que esta combinación lineal genera un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (o sea, igualado a cero):

$$2r_1 - 2r_2 + 6r_3 = 0$$

$$r_1 - r_2 + 3r_3 = 0$$

$$r_1 + 2r_2 = 0$$

$$-r_1 + 2r_2 - 4r_3 = 0$$

$$r_1 - 2r_2 + 4r_3 = 0$$

Lo anterior puede representarse como

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Se ubica para las operaciones a la matriz. Se procede a ejecutar la solución aplicando el método de eliminación gaussiana:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} -0.5R_1 + R_2 \\ R_4 + R_3 \\ R_4 + R_{5*} \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cong -0.5R_1 + R_4 \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \cong -4R_4 + R_3 \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nótese que

- Un renglón de ceros denota dependencia
- $r_2 = r_3$ , y  $2r_1 - 2r_2 + 6r_3 = 0$

Se propone que  $r_2 = 1$

Por lo tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente, puesto que con  $r_1 = -2, r_2 = 1$  y  $r_3 = 1$  se satisface la combinación lineal, es decir:

$$-2(2,1,1, -1,1) + 1(-2, -1,2,2, -2) + 1(6,3,0, -4,4) = 0$$

**Ejemplo 11.** Determinar si el siguiente sistema de vectores es linealmente independiente:  $\{(-1,1, -1,0), (1,3,2,4), (3, -1,1,0)\}$

Solución. Para este problema, es importante recordar que la dependencia lineal implica que vectores, tales como,  $u, v$  y  $w$  cumplen con lo siguiente:

$$q = k_1u + k_2v + k_3w$$

Asimismo, hay que recordar que un sistema homogéneo está balanceado (igualado) con un vector nulo  $\vec{0}$ .

Se escribe el sistema como una combinación lineal involucrando los escalares  $c_1, c_2$  y  $c_3$  que satisfagan la propiedad:

$$c_1(-1,1, -1,0) + c_2(1,3,2,4) + c_3(3, -1,1,0) = (0,0,0,0)$$

Como se observa, este sistema consta de tres vectores en el espacio  $\mathbb{R}^4$ , por lo que hace falta un cuarto vector para ser considerado como linealmente independiente. Sin embargo, se procederá a probar la dependencia lineal de este sistema, en forma analítica:

$$-c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \quad (1)$$

$$c_1 + 3c_2 - c_3 = 0 \quad (2)$$

$$-c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \quad (3)$$

$$4c_2 = 0 \quad (4)$$

Efectuando las operaciones algebraicas correspondientes en (4), se tiene

$$4c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

Si se observa hay incongruencias, ya que de (1)  $c_1 = 3c_3$ , pero también de (2),  $c_1 = c_3$ .

Esto indica que el sistema es indeterminado.

Otra forma de comprobar lo arriba mencionado es mediante la reducción gaussiana:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cong \dots \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -10/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que una variable depende de otra, implica que existen más de una solución. Se concluye que el sistema es linealmente dependiente.

**Ejemplo 12.** Sean los vectores  $u = (2, 0, -1, 3)$ ,  $v = (5, 4, 7, -1)$  y  $w = (6, 2, 0, 9)$ . Encuentre el vector  $x$ , tal que satisfaga  $2u - v + x = 7x + w$ .

Solución. Se debe encontrar un valor de  $x$ , talque satisfaga esta igualdad  $2u - v + x = 7x + w$

Considerando las propiedades de la igualdad y de la inversa de la suma, se determinan los componentes para la variable  $x$ .

$$2u - v - w = 7x - x$$

$$6x = 2u - v - w$$

La propiedad inversa de la multiplicación permite establecer que

$$x = \frac{1}{6}(2u - v - w)$$

Hay que recordar que  $u, v, w$  son vectores que tienen 4 componentes, por lo tanto,  $x$ , también tendrá 4 componentes

$$\frac{1}{6}(2u - v - w) = \frac{1}{6}[2(2, 0, -1, 3) - (5, 4, 7, -1) - (6, 2, 0, 9)]$$

Nótese que las operaciones son por coordenadas, para generar un vector resultante en cuatro dimensiones.

$$x = \left(-\frac{7}{6}, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

Antes de la evaluación formativa, se considera un ejemplo adicional para ver cómo aplica la determinación de combinaciones lineales en polinomios.

**Ejemplo 13.** Sean los polinomios

$$p_1(x) = x^2 + 1$$

$$p_2(x) = x - 2$$

$$p_3(x) = x^2 + 2$$

Determinar si son linealmente dependientes.

Solución. Los polinomios están en  $\mathbb{R}^2$  y se pretende verificar si existe algún escalar que sea múltiplo y que consecuentemente se cumpla con:

$$r(x^2 + 1) + s(x - 2) + w(x^2 + x) = 0$$

Se agrupan por términos similares

$$(r + w)x^2 + (s + w)x + (r - 2s) = 0$$

Con lo anterior, se construye un sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se tienen diferentes alternativas, por ejemplo, obtener el determinante, y si este es cero, entonces los polinomios serán linealmente dependientes entre sí.

Otra alternativa es aplicar operaciones elementales para reducir al sistema en una base, o sea, en una matriz unitaria.

El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 2 \neq 0$$

En la aplicación de operaciones elementales

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En ambas alternativas, se observa a un sistema compatible determinado para los escalares, consecuentemente los polinomios son linealmente independientes.

Se invita al lector a que proceda a graficar los tres polinomios y observar su comportamiento.

Del ejemplo 13, la reducción de una matriz en sus elementos unitarios genera la deducción de que un espacio vectorial que tiene una base que consta de  $n$  elementos se dice tener dimensión  $n$ .

Por ejemplo, cualquier matriz identidad es base de otras matrices de ese mismo orden.

Esto conlleva a que todo espacio vectorial tiene una base, y cuando un vector está contenido en una base finita, entonces se tendrá una dimensión finita.

## Evaluación formativa

Lee con atención cada ejercicio y responde correctamente:

Determinar si en los siguientes ejercicios son linealmente dependientes o independientes.

a)  $p_1(x) = x - 2$   
 $p_2(x) = x^2 - 5x + 4$   
 $p_3(x) = 3x^2 - 4x$

- ☐ linealmente dependiente  
☐ linealmente independiente

b)  $p_1(x) = x - 2$   
 $p_2(x) = x^2 - 5x + 4$   
 $p_3(x) = 3x^2 - 4x$   
 $p_3(x) = x^2 - 1$

- ☐ linealmente dependiente  
☐ linealmente independiente

c)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- ☐ linealmente dependiente  
☐ linealmente independiente

d) Para un conjunto de vectores  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  en un espacio  $V$ , si  $U$  contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces  $U$  debe ser linealmente dependiente.

- ☐ Verdadero  
☐ Falso

e) El conjunto de vectores  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  con  $y = -3x$  es un espacio vectorial real.

- ☐ Verdadero  
☐ Falso

f) El conjunto de vectores  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$

- ☐ Verdadero

( ) Falso

g) El conjunto de matrices triangulares de  $3 \times 3$  es un subespacio de  $M_{3 \times 3}$

( ) Verdadero

( ) Falso

h) El conjunto de vectores  $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$

( ) Verdadero

( ) Falso

i)  $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  está en el espacio generado por  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

( ) Verdadero

( ) Falso

j) El siguiente par de vectores  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , ¿es linealmente independiente?

( ) Verdadero

( ) Falso

Para Si deseas realizar ejercicios, te proponemos visites el siguiente enlace:

<https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra>

## Evaluación sumativa

|  |                                                                                                                                                                   |                                         |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
|  | Si $V$ es un subespacio vectorial y $W \subset V$ , entonces, $W$ es un subespacio de $V$ si por si solo:                                                         | Cumple con los axiomas de un subespacio |
|  | Tanto $\bar{0}$ como los números reales son subespacios de:                                                                                                       | $\mathbb{R}^n$                          |
|  | El conjunto de vectores de la forma $(2a + b, a - b, a)$ donde $a$ y $b$ son escalares, forman un                                                                 | Subespacio vectorial                    |
|  | El conjunto $H$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ , donde $H = \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$ y $m > n$ puede generar a todo $\mathbb{R}^m$ . | Falso                                   |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                  |                            |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
|  | Sean $G_1 = \overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_n}$ y $G_2 = \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ son dos conjuntos generadores de un subespacio $V$ de $\mathbb{R}^n$ , entonces $G_1$ y $G_2$ son linealmente independientes: | Verdadero                  |
|  | Un conjunto de vectores linealmente independientes que generen un espacio vectorial se llama                                                                                                                                                                     | Una base                   |
|  | El conjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de:                                                                                                                                                                                                           | $\mathbb{R}^n$             |
|  | Los vectores que forman una base cualquiera del espacio vectorial $V$ son linealmente independientes:                                                                                                                                                            | Cierto                     |
|  | El espacio de todos los polinomios tiene dimensión:                                                                                                                                                                                                              | Infinita                   |
|  | El espacio de todas las matrices reales de orden <b>3x3</b> tiene dimensión:                                                                                                                                                                                     | 3                          |
|  | El número de elementos de cualquier base de un subespacio de $V$ de $\mathbb{R}^n$ tiene:                                                                                                                                                                        | Dim v                      |
|  | El número de matrices que forman una base del espacio de las matrices reales de orden <b>2x2</b> es igual a:                                                                                                                                                     | Infinita                   |
|  | Una base para el espacio solución del sistema $2x - y + z = 0$ es:                                                                                                                                                                                               | $\{(1, 2, 0), (0, 1, 1)\}$ |
|  | Sean $V$ un espacio vectorial de dimensión <b>p</b> , y $U$ un subespacio de $V$ con base $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \dots, \overline{u_q}\}$ , entonces, $q \leq p$                                                                                     | Cierto                     |
|  | La dimensión del espacio solución del siguiente sistema<br>$2x - y + 3z = 0$ $4x - 2y + 6z = 0$ $-6x + 3y - 9z = 0$                                                                                                                                              | 3                          |
|  | La dimensión del espacio de las matrices diagonales de orden <b>3x3</b> es:                                                                                                                                                                                      | 3                          |

## Rúbrica

| Puntaje obtenido | Nivel de comprensión                                                                                                                                                                                                                                     | Recomendaciones                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 24-30            | Bueno. Demuestra un buen dominio de conceptos relacionados con espacios vectoriales, sus axiomas. Usa representaciones y determina operaciones para combinaciones lineales.                                                                              | 1.<br><a href="https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra">https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra</a><br>2.<br><a href="https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/">https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/</a>                                                                                  |
| 18-23            | Intermedio. Demuestra entendimiento de conceptos relacionados con espacios vectoriales y sus axiomas. Proporciona definiciones razonablemente precisas y demuestra comprensión básica de combinaciones lineales                                          | 1.<br><a href="https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-introduction.html">https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-introduction.html</a><br>2.<br><a href="https://www.purplemath.com/modules/mtrxadd.htm">https://www.purplemath.com/modules/mtrxadd.htm</a><br>3.<br><a href="https://www.youtube.com/c/ProfessorLeonard">https://www.youtube.com/c/ProfessorLeonard</a> |
| 0-17             | Bajo.<br>Presenta una comprensión limitada de conceptos relacionados con espacios vectoriales y sus axiomas. Las definiciones pueden ser vagas o inexactas sobre combinaciones lineales<br>Sin embargo, se reconoce que ha participado en la evaluación. | 1.<br><a href="https://www.mathplanet.com/education/algebra-2/matrices">https://www.mathplanet.com/education/algebra-2/matrices</a>                                                                                                                                                                                                                                           |

## Conclusiones

Los espacios vectoriales forman los fundamentos para comprender y trabajar con vectores de una manera sistemática y estructurada. Al definir la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, se adhieren propiedades, y abarcan varios tipos, los espacios vectoriales proporcionan una estructura versátil que se extiende más allá de matemáticas en varios campos. Al abrazar el concepto de espacios vectoriales nos empodera para comprender problemas complejos, problemas del mundo real y desarrollar soluciones innovadoras en diferentes disciplinas

## Bibliografía

Bello, I. y Hopf, F. (2009). *Álgebra intermedia. Un enfoque del mundo real*. McGraw-Hill.

Bombelli, E. C. y Barberis, J. G. (2012). Importancia de la evaluación diagnóstica en asignaturas de nivel superior con conocimiento preuniversitario. *Revista Electrónica Gestión de las personas y Tecnología*, 5(13), 34-41.

Ceja Mena, L.I. (1998). *Álgebra Lineal con aplicaciones en computadoras personales. Tomo I*. Instituto Politécnico Nacional.

Díaz-Barriga, A. (2008). *Temas de debate de la innovación educativa*. CESUE, UNAM.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. Mc-Graw Hill.

Dorier, L. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (págs.. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Países Bajos.

García, S. R., y Horn, R. A. (2023). *Matrix Mathematics: A Second Course in Linear Algebra*. Cambridge University Press.

Golovina, L.I. (1976) *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*. Editorial MIR.  
Grossman, S.I. (2008). *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill.

Guárate A. Y., Cruz A. H. y Hernández Cruz A. (2017). *Modelos didácticos para situaciones y contextos de aprendizaje*. Narcea Ediciones.

Holey, T. y Wiedemann A. Narcea. (2023). *Analysis and Linear Algebra*. Springer.

Khan Academy. (2024). *Álgebra lineal*. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://es.khanacademy.org/math/linear-algebra>

Professor Leonard. (2012). Professor Leonard. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://www.youtube.com/c/ProfessorLeonard>

Math is fun Advanced. (2021). *Matrices*. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-introduction.html>

Math Planet. (2024). *Matrices*. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://www.mathplanet.com/education/algebra-2/matrices>

OpenCourseWare. (18 de junio de 2010). *Linear Algebra*. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/>

PurpleMath. (2024). *Matrix Addition*. Recuperado el 27 de mayo de 2024 de <https://www.purplemath.com/modules/mtrxadd.htm>

Segura Castillo, M. A. (2018). La función formativa de la evaluación en el trabajo escolar cotidiano. *Revista Educación*, 42(1), 1-20. <https://dx.doi.org/10.15517/revedu.v42i1.22743>.

Shapira Y. (2023). *Linear Algebra and Group Theory for Physicists and Engineers*. Birkhäuser.

## AGRADECIMIENTOS

La realización de la lección ha sido posible gracias al apoyo recibido de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), a través del proyecto PAPIME PE112723.

Se agradece también a la FES Aragón- UNAM, en particular, a la Ing. Mariela Vianey Rivero Picazo, secretaria técnica de la carrera de Ingeniería Industrial por su invaluable apoyo administrativo.

### Derechos de autor

“Comprensión de espacios vectoriales: la abstracción es el precio de la generalidad”, Nelly Rigaud Téllez y Roberto Blanco Bautista, D. R., ©, 2023, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons Atribución, No comercial, Sin derivadas. Código Legal: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode.es> , (CC-BY-NC-ND).