Transferencia de Momentum



Octavio Manero, Marcela Angola Bañuelos

Transferencia de Momentum

Universidad Nacional Autónoma de México

Primera Edición

Transferencia de Momentum

Octavio Manero

Marcela Angola Bañuelos



Ciudad de México

Primera edición: Enero 2024

D.R. © 2024, Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, Alcaldía Coyoacán, C. P. 04510

Ciudad de México, México.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE100921

Imagen de portada: Dibujo realizado por estudiantes de la Universidad de la Frontera, Chile

Hecho en México

ISBN 978-607-30-9023-0

Índice

Prefacio 10

1. Fundamentos Físico-Matemáticos **14**

1.1. Operaciones Vectoriales y Tensoriales. 14

1.1.1. Definiciones. 14

1.1.2. Operaciones con vectores y tensores. 15

1.2. Operaciones Diferenciales de Vectores y Tensores. 18

1.2.1. Operador diferencial vectorial. 18

1.2.2. Gradiente de un escalar. 18

1.2.3. Gradiente de un vector. 18

1.2.4. Divergencia de un vector. 18

1.2.5. Divergencia de un tensor. 18

1.2.6. Laplaciano de un escalar. 19

1.2.7. Laplaciano de un vector. 19

1.2.8. Rotacional de un vector. 20

1.3. Teoremas Integrales de Vectores y Tensores. 21

1.3.1. Teorema de la divergencia. 21

1.3.2. Fórmula de Leibnitz. 21

1.3.3. Teorema de Stokes. 21

1.4. Vectores y Tensores en Coordenadas Curvilíneas. 22

1.4.1. Diferenciales de área y volumen. 22

1.4.2. Transformaciones cartesianas - cilíndricas. 24

1.4.3. Transformaciones cartesianas - esféricas. 26

1.5. Operadores Diferenciales en Coordenadas Curvilíneas. 27

1.5.1. Diferenciación de los vectores unitarios. 27

Ejemplos. 28

Apéndice A 30
Apéndice B 32
Apéndice C 34
Tarea 1. 37

2. Mecánica del Medio Continuo
Ecuaciones Constitutivas **39**

2. 1. Cinemática. 39
2. 1.1. Movimiento relativo. 39
2. 1.2. Cambio de volumen. 41
2. 1.3. Conservación de masa y ecuación de continuidad. 44
2. 1.4. Deformación y rapidez de deformación. 45
2. 1.5. Vorticidad. 47
2. 2. Dinámica del Medio Continuo. 49
2. 2.1. Principio de conservación del momentum lineal (Cauchy). 49
2. 2.2. Principio de conservación del momentum angular. 49
2. 2.3. Tensor de esfuerzos. 50
2. 2.4. Presión hidrostática. 51
2. 2.5. Simetría del tensor de esfuerzos. Conservación del momento angular. 52
2. 3. Ecuaciones Constitutivas. 53
2. 3.1. Fluido newtoniano. 54
2. 3.2. Ecuación de Navier-Stokes. 54
2. 3.3. Ecuación de la vorticidad. 55
2. 4. Teoría Molecular de la Viscosidad. 56
2. 4.1. Gases a baja densidad. 56
2. 4.2. Distribución de Maxwell-Boltzmann. 57
2. 4.3. Trayectoria libre media. 58
2. 4.4. Mecanismo de transferencia de momentum. 59
2. 4.5. Teoría molecular de la viscosidad de los líquidos. 61
Apéndice A 63
Apéndice B 64
Apéndice C 67
Apéndice D 68

Apéndice E 72
Tarea 2. 75

3. Balances Diferenciales. **77**
3. 1. Viscosimetría 77
3. 1.1. Viscosímetro de placas paralelas. 77
3. 1.2. Flujo torsional entre dos cilindros concéntricos. Viscosímetro de Couette. 79
3. 1.3. Viscosímetro de discos paralelos. 82
3. 1.4. Viscosímetro de cono y plato. 83
3. 2. Flujos por Gravedad. 85
3. 2.1. Flujo en una película descendente. 85
3. 3. Flujos por Presión. 87
3. 3.1. Flujo a través de un tubo circular. 87
3. 3.2. Flujo por presión a través de una región anular. 89
3. 3.3. Flujo por presión de líquidos inmiscibles. 90
3. 4. Flujos Radiales. 92
3. 4.1. Flujo radial entre dos discos paralelos. 92
3. 5. Flujos con Simetría Esférica. 94
3. 5.1. Flujo alrededor de una esfera rotatoria. 94
Tarea 3. 96
Tarea 4. 97
Tarea 5. 99

4. Fluidos no-Newtonianos **101**
4. 1. La Ecuación de Weissenberg-Rabinowitch (W-R). 103
4. 2. Flujos no-Newtonianos en Tuberías. 105
4. 2.1. Ley de potencias. 105
4. 2.2. Fluidos de Bingham (viscoplásticos). 106
4. 3. Flujo Torsional en Fluidos no-Newtonianos. 108
4. 3.1. Ley de potencias. 108
4. 3.2. Fluidos de Bingham. 109
Tarea 6 111

5. Flujo a Bajo Número de Reynolds, Flujo Potencial y Capa Límite 113

5. 1. Flujo a Bajo Número de Reynolds. 113

5. 2. Flujo Potencial. 119

5. 2.1. Flujo potencial bidimensional. 120

5. 2.2. Flujo potencial tridimensional.. 124

5. 3. Capa Límite. 128

Apéndice A 132

Apéndice B 133

6. Transporte Interfacial de Momentum 136

6. 1. Coeficiente de Fricción en Tuberías. 136

6. 2. Factores de Fricción en Cuerpos Sumergidos. Esferas 139

6. 3. Factores de Fricción en Medios Porosos. 142

Tarea 7 145

Tarea 8 146

7. Balances Integrales 148

7. 1. Balance Integral de Masa. 148

7. 2. Balance Integral de Momentum. 148

7. 3. Balance Integral de Energía Mecánica. 149

7. 4. Sistemas de Flujo. 151

7. 4.1. Tuberías de sección constante. 151

7. 4.2. Flujo en expansión.. 154

7. 4.3. Flujo en contracción.. 155

7. 4.4. Eyector líquido-líquido. 157

7. 4.5. Vaciado de tanques. 158

Tarea 9 161

Tarea 10 162

Referencias.. . . . . **164**

Prefacio

Este libro comprende el material del curso de transferencia de momentum, el cual se imparte en la Facultad de Química de la UNAM. Una parte del material se basa en el libro de R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, "Transport Phenomena", segunda edición, el cual ha sido el cimiento de los capítulos del programa de estudios del curso de transferencia de momentum de la carrera de Ingeniería Química.

Como lo especifican los autores del mencionado libro, las transferencias de momentum, calor y masa se desarrollaron independientemente como ramas de la física clásica, pero el estudio unificado de estas disciplinas encontró su lugar como una de las ciencias fundamentales de la ingeniería. Su desarrollo continúa creciendo y encontrando aplicaciones en nuevas áreas tales como la biotecnología, microelectrónica, nanotecnología y ciencia de polímeros.

Los fenómenos de transferencia (o de transporte) han sido tradicionalmente materias de índole matemática, pero estas disciplinas son más importantes por su significado físico. Su esencia comprende el análisis y similitudes entre los principios de conservación y las ecuaciones constitutivas en términos de los flujos. Aún así, el lenguaje de estas materias es plenamente matemático. Es por ello que el primer capítulo del libro está dedicado al análisis de las herramientas matemáticas y la nomenclatura tensorial que se necesitarán para la mejor comprensión del curso de transferencia de momentum.

El capítulo 1 se titula Fundamentos Físico-Matemáticos y comprende 5 secciones: operaciones vectoriales y tensoriales, operaciones diferenciales de vectores y tensores, teoremas integrales de vectores y tensores, vectores y tensores en coordenadas curvilíneas y operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas. Al final del capítulo se encuentran 3 apéndices (A, B y C) que corresponden a las operaciones diferenciales en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, respectivamente. Finalmente, se sugiere la práctica de algunas operaciones que se enuncian en la Tarea 1, extraída del apéndice A del libro de Bird et al.

El capítulo 2 se titula Mecánica del Medio Continuo y comprende 4 secciones con 5 apéndices. Las secciones son: Cinemática, Dinámica del Medio Continuo, Ecuaciones Constitutivas y Teoría Molecular de la Viscosidad. La sección de cinemática, a su vez, comprende las discusiones sobre movimiento relativo, cambio de volumen, conservación de masa, rapidez de deformación y vorticidad. La sección de dinámica del medio continuo incluye los principios de conservación del momentum lineal y angular, el tensor de esfuerzos, presión hidrostática y la simetría del tensor de esfuerzos. En la sección de ecuaciones constitutivas se deriva la ecuación de Newton, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de la vorticidad. En la sección referente a la teoría molecular de la viscosidad, se discute la teoría de gases a baja densidad, la distribución de Maxwell-Boltzmann, trayectoria libre media y el mecanismo de transferencia de momentum. Finalmente, se incluye la discusión sobre la teoría molecular de la viscosidad de líquidos.

El apéndice A deduce la ecuación de la vorticidad en flujo bidimensional. El apéndice B contiene en detalle el cálculo de los momentos de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann y de las variables relevantes, como la presión, velocidad promedio molecular, frecuencia de colisiones y energía cinética. El apéndice C incluye el balance de masa en los 3 sistemas de coordenadas. El apéndice D comprende las expresiones del balance de momentum en los 3 sistemas de coordenadas. El apéndice E contiene las expresiones del fluido Newtoniano en los 3 sistemas de coordenadas. Finalmente, en la Tarea 2 se lleva a la práctica el cálculo de viscosidades de gases a baja densidad, gases densos, mezclas de gases, viscosidades de líquidos y parámetros moleculares.

El título del capítulo 3 es Balances Diferenciales. En él se incluyen la solución de varios sistemas de flujo. Se divide en 5 secciones, que incluyen viscosimetría, flujos por gravedad, flujos por presión, flujos radiales y flujos con simetría esférica. La sección de viscosimetría discute la obtención de la viscosidad en 4 aparatos: viscosímetro de placas paralelas, viscosímetro de Couette, viscosímetro de discos paralelos y el viscosímetro de cono y plato. En los flujos por gravedad se analiza el flujo de un líquido Newtoniano en un plano inclinado. En la sección de flujos por presión se incluyen los flujos en tubos, en regiones anulares y con líquidos inmiscibles. Los flujos radiales comprenden los flujos radiales entre discos paralelos y en la sección de flujos con simetría esférica se analiza el flujo alrededor de una esfera rotatoria. Para la práctica, se incluyen 3 tareas (3, 4 y 5). La tarea 3 presenta dos problemas de flujo por arrastre en cilindros concéntricos. La tarea 4 contiene un problema de flujo por presión en una ranura y flujo por gravedad de una película descendente. Finalmente, la tarea 5 incluye un problema sobre flujo radial entre cilindros concéntricos y otro problema sobre el flujo lento entre esferas concéntricas.

El capítulo 4 versa sobre los fluidos no-Newtonianos. Contiene 3 secciones que contienen: la ecuación de Weissenberg-Rabinowitch (W-R), flujos no-Newtonianos en tuberías y flujo torsional en fluidos no-Newtonianos. En la primera sección se deduce la ecuación W-R, que es utilizada para la obtención de la viscosidad no-Newtoniana en un tubo. La sección de fluidos no-Newtonianos en tuberías incluye dos ecuaciones constitutivas: ley de potencia y la de fluidos de Bingham o viscoplásticos. La tercera sección de flujo torsional también incluye a estas dos ecuaciones constitutivas. Finalmente, la tarea 6 contiene un problema que consiste en determinar la viscosidad de un fluido x utilizando un tubo para determinar los parámetros materiales del fluido.

El capítulo 5 contiene 3 secciones: flujo a bajo número de Reynolds, flujo potencial y capa límite. Con respecto al flujo a bajo número de Reynolds, se describe primeramente la formulación de los flujos bidimensionales incompresibles y la aplicación al flujo lento alrededor de una esfera. La segunda sección comprende la formulación del flujo potencial, que contiene dos partes: flujo potencial bidimensional y tridimensional. El flujo potencial bidimensional comprende el análisis de varios tipos de flujos: flujo uniforme, flujo fuente, de sumidero y de vórtice, flujo debido a un dipolo y flujo alrededor de un cilindro. El flujo potencial tridimensional comprende el análisis del flujo uniforme, flujo fuente y sumidero, flujo debido a un dipolo y flujo alrededor de una esfera. La tercera sección comprende la discusión sobre capa límite, que incluye la solución de Blasius y soluciones aproximadas. El capítulo 5 también incluye dos apéndices: el apéndice 5-A contiene en detalle la solución del flujo potencial alrededor de un cilindro y la del flujo alrededor de una esfera. El apéndice 5-B contiene la solución de la integral de momentum.

El capítulo 6 se titula Transporte Interfacial de Momentum, que comprende el cálculo de los factores de fricción y se divide en 3 partes: coeficientes de fricción en tuberías, factores de fricción en cuerpos sumergidos en esferas y los factores de fricción en medios porosos. En la sección correspondiente a los factores de fricción en tuberías, se exponen las gráficas de factor de fricción en función del número de Reynolds para los problemas directo e inverso y la resolución de problemas prácticos de este tema. La segunda parte incluye la gráfica de factor de fricción en función del número de Reynolds para el flujo alrededor de esferas, incluyendo un problema de sedimentación de esferas. La parte correspondiente a medios porosos también incluye la gráfica de caída de presión en función del número de Reynolds. Las tareas propuestas (7 y 8) contienen problemas prácticos sobre el problema directo en tuberías (cálculo de la caída de presión), el problema inverso en tuberías (cálculo del flujo volumétrico) y la sedimentación de esferas. La tarea 8 expone dos problemas de flujo en medio poroso: flujo de líquidos y flujo de gases.

El título del capítulo 7 es Balances Integrales. Tiene el objetivo de hacer contacto con los problemas relevantes en Ingeniería de fluidos. Se expone la deducción de los 3 balances integrales: masa, momentum y energía mecánica (ecuación de Bernoulli) y su aplicación a varios sistemas de flujo. Estos incluyen el flujo en tuberías con tramos rectos y accesorios (codos, contracciones, expansiones, válvulas), después de analizar la potencia de la bomba y las curvas de la tubería y la curva de flujo de la bomba. Se describen ejemplos del cálculo de la potencia de la bomba en un sistema de tuberías, el flujo en expansión, flujo en contracción, eyector líquido-líquido y vaciado de tanques (tanque cónico y cilíndrico). Finalmente, la tarea 9 contiene dos problemas: el cálculo de la potencia de la bomba en un sistema de tuberías y el cálculo del flujo volumétrico en otro sistema de flujo. La tarea 10 pone en práctica problemas sobre flujo en expansión, flujo de gases en tuberías y flujo de líquidos en regiones anulares.

Los 7 capítulos del libro contienen ejercicios extraídos del libro de Bird et al. En el curso de Transferencia de Momentum, se sugiere que los capítulos 1 y 5 sean capítulos de referencia y los demás capítulos se analicen en detalle en dos partes: la primera que incluya a los capítulos 2, 3 y 4, y la segunda que incluya los capítulos 6 y 7. El capítulo 1 de fundamentos físico-matemáticos puede ser incluido en el curso cuando ciertas secciones sean necesarias como bases matemáticas para la explicación de determinadas partes del curso, o como un primer capítulo del curso. El capítulo 2 es un capítulo básico en el que se deducen las ecuaciones relevantes de mecánica de fluidos. Este capítulo difiere del enfoque de Bird y coautores, ya que no incluye a los balances de coraza. La razón de ello es que resulta más conveniente la deducción de las ecuaciones de balances diferenciales a partir de teoremas integrales, que son generalmente válidos, y a partir de las ecuaciones deducidas resolver los problemas de flujo. Muchas de las resoluciones de los problemas difieren de aquellas de Bird et al. El capítulo 5 es un capítulo de referencia y se analiza en detalle en cursos más especializados.

Capítulo 1

Fundamentos Físico-Matemáticos

1.1. Operaciones Vectoriales y Tensoriales.

1.1.1. Definiciones.

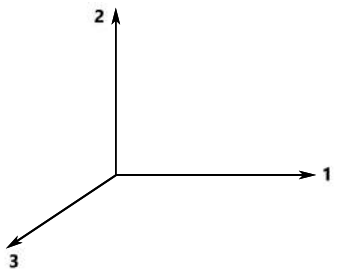


Figura **1.1**. *Sistema de coordenadas.*

En el sistema de coordenadas $(1,\ 2,\ 3)$ definimos los vectores unitarios:

$$\underline{\delta}_1 \ = \ (1,\ 0,\ 0) \ \ , \quad \underline{\delta}_2 \ = \ (0,\ 1,\ 0) \quad y \quad \underline{\delta}_3 \ = \ (0,\ 0,\ 1) \tag{1. 1}$$

y las matrices unitarias:

$$\underline{\delta}_1 \, \underline{\delta}_1 \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{\delta}_1 \, \underline{\delta}_2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad etc.$$

La siguiente suma nos da:

$$\underline{\delta}_1 \, \underline{\delta}_1 \ + \ \underline{\delta}_2 \, \underline{\delta}_2 \ + \ \underline{\delta}_3 \, \underline{\delta}_3 \ = \ \underline{\underline{\delta}} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \underline{\underline{I}} \tag{1. 2}$$

la matriz unidad.

Cualquier vector o tensor puede ser expresado en términos de los vectores y matrices unitarias:

$$\underline{v} = v_1\,\underline{\delta}_1 + v_2\,\underline{\delta}_2 + v_3\,\underline{\delta}_3 = v_i\,\underline{\delta}_i \quad (i = 1,2,3)\ , \qquad \left(\text{Se omitió el símbolo sumatoria } \sum_{i=1}^{3}\right)$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \tau_{11}\,\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_1 + \tau_{12}\,\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_2 + \cdots = \tau_{ij}\,\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j$$

$$(i = 1,\cdots,3, \quad j = 1,\cdots,3)\ , \qquad \left(\text{Se omitió la doble sumatoria } \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\right)$$

$$\underline{v}\,\underline{w} = v_1\,w_1\,\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_1 + v_1\,w_2\,\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_2 + \cdots = v_i\,w_j\,\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \quad , \qquad \left(\text{Se omitió la doble sumatoria } \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\right) \tag{1. 3}$$

Se define la delta de Kronecker δ_{ij} y el símbolo de permutación ε_{ijk} como sigue:

$$\left\{\begin{matrix}\delta_{ij} = 1 & \text{si} & i = j\\ \delta_{ij} = 0 & \text{si} & i \neq j\end{matrix}\right\} \tag{1. 4}$$

$$\left\{\begin{matrix}\varepsilon_{ijk} = 1 & \text{si} & ijk = 123,231,312\\ \varepsilon_{ijk} = -1 & \text{si} & ijk = 321,132,213\\ \varepsilon_{ijk} = 0 & & \text{si algún índice es igual}\end{matrix}\right\} \tag{1. 5}$$

1.1.2. Operaciones con vectores y tensores.

$$\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j = \delta_{ij} \qquad \text{(producto escalar)} \tag{1. 6}$$

$$\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\underline{\delta}_k \qquad \text{(producto vectorial)} \tag{1. 7}$$

$$\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k = \underline{\delta}_i\,(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k) = \underline{\delta}_i\,\delta_{jk} \tag{1. 8}$$

$$\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j\,\underline{\delta}_k = (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j)\,\underline{\delta}_k = \delta_{ij}\,\underline{\delta}_k \tag{1. 9}$$

$$\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k\,\underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i\,(\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k)\,\underline{\delta}_l = \underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_l\,\delta_{jk} \tag{1. 10}$$

$$\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j : \underline{\delta}_k\,\underline{\delta}_l = (\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k)\,(\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_l) = \delta_{jk}\,\delta_{il} \quad \Rightarrow \quad tr\,(\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k\,\underline{\delta}_l) \tag{1. 11}$$

$$\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_j \times \underline{\delta}_k = \underline{\delta}_i\,(\underline{\delta}_j \times \underline{\delta}_k) = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\,\underline{\delta}_i\,\underline{\delta}_l \tag{1. 12}$$

$$\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j\,\underline{\delta}_k = (\underline{\delta}_i \times \underline{\delta}_j)\,\underline{\delta}_k = \sum_{l=1}^{3} \varepsilon_{ijl}\,\underline{\delta}_l\,\underline{\delta}_k \tag{1. 13}$$

La operación traza (tr) indica la suma de los elementos de la diagonal de una matriz.

Con base en esas operaciones, se puede calcular el **producto escalar** entre dos vectores:

$$\begin{aligned} &\text{Si} && \underline{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{y} \quad \underline{w} = (w_1, w_2, w_3), \\ &\text{o sea,} && \underline{v} = v_1\,\underline{\delta}_1 + v_2\,\underline{\delta}_2 + v_3\,\underline{\delta}_3 = v_i\,\underline{\delta}_i \\ & && \underline{w} = w_1\,\underline{\delta}_1 + w_2\,\underline{\delta}_2 + w_3\,\underline{\delta}_3 = w_j\,\underline{\delta}_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{v}\cdot\underline{w} = v_i\,w_j\,\underline{\delta}_i\cdot\underline{\delta}_j = v_i\,w_j\,\delta_{ij} = v_i\,w_i = v_1\,w_1 + v_2\,w_2 + v_3\,w_3 \qquad \textbf{(1. 14)}$$

El **producto vectorial** entre dos vectores:

$$\underline{v}\times\underline{w} = v_j\,\underline{\delta}_j\times w_k\,\underline{\delta}_k = v_j\,w_k\,\left(\underline{\delta}_j\times\underline{\delta}_k\right) = v_j\,w_k\,\varepsilon_{ijk}\,\underline{\delta}_i = \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1. 15)}$$

Como ejemplo,

$$\text{si} \quad \begin{cases} \underline{\delta}_1 = (1, 0, 0), \\ \underline{\delta}_2 = (0, 1, 0) \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{matrix} \underline{\delta}_1\cdot\underline{\delta}_1 = 1 \\ \underline{\delta}_1\cdot\underline{\delta}_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \underline{\delta}_1\times\underline{\delta}_2 = \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\delta}_3$$

ya que:

$$\begin{aligned} &\underline{\delta}_1\times\underline{\delta}_2 = \varepsilon_{123}\,\underline{\delta}_3 = \underline{\delta}_3 \quad , \\ &\underline{\delta}_1\times\underline{\delta}_1 = \varepsilon_{113}\,\underline{\delta}_3 = 0 \qquad \text{y} \\ &\underline{\delta}_2\times\underline{\delta}_1 = \varepsilon_{213}\,\underline{\delta}_3 = -\underline{\delta}_3 \ . \end{aligned}$$

El **triple producto** es:

$$\underline{\delta}_1\cdot(\underline{\delta}_2\times\underline{\delta}_3) = \underline{\delta}_1\cdot\underline{\delta}_1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1. 16)}$$

El **producto vectorial** de un **tensor** y un **vector**:

$$\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_2\cdot\underline{\delta}_2 = \underline{\delta}_1\,\delta_{22} = \underline{\delta}_1$$

que es lo mismo a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} = \tau_{ij}\, \underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_j \cdot v_k\, \underline{\delta}_k = \tau_{ij}\, v_k \left(\underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_j \cdot \underline{\delta}_k\right) = \tau_{ij}\, v_k\, \underline{\delta}_i\, \delta_{jk} = \tau_{ij}\, v_j\, \underline{\delta}_i \tag{1. 17}$$

Si

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v} = (\tau_{12}\, v_2,\, 0,\, 0) \quad o \quad (\tau_{12}\, v_2)\, \underline{\delta}_1$$

El **producto tensorial** de **dos tensores**:

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \left(\sigma_{ij}\, \underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_j\right) \cdot \left(\tau_{kl}\, \underline{\delta}_k \underline{\delta}_l\right) = \sigma_{ij}\, \tau_{kl}\, \underline{\delta}_i\, \delta_{jk}\, \underline{\delta}_l = \sigma_{ij}\, \tau_{jl}\, \underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_l \tag{1. 18}$$

$$\underline{\delta}_1 \underline{\delta}_2 \cdot \underline{\delta}_2 \underline{\delta}_3 = \underline{\delta}_1 \underline{\delta}_3 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{12}\, \tau_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El **producto escalar** de **dos tensores**:

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\tau}} = \sigma_{ij}\, \underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_j : \tau_{kl}\, \underline{\delta}_k\, \underline{\delta}_l = \sigma_{ij}\, \tau_{kl} \left(\underline{\delta}_i\, \underline{\delta}_j : \underline{\delta}_k\, \underline{\delta}_l\right) = \sigma_{ij}\, \tau_{kl}\, \delta_{jk}\, \delta_{il} = \sigma_{ij}\, \tau_{ji} \tag{1. 19}$$

$$\underline{\delta}_1\, \underline{\delta}_2 : \underline{\delta}_2\, \underline{\delta}_1 = (\underline{\delta}_1 \cdot \underline{\delta}_1)\, (\underline{\delta}_2 \cdot \underline{\delta}_2) = \delta_{11}\, \delta_{22} = 1$$

Si

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \tau_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\tau}} = \sigma_{12}\, \tau_{21} = \text{tr}\left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\tau}}\right) = \text{tr} \begin{pmatrix} \sigma_{12}\, \tau_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2. Operaciones Diferenciales de Vectores y Tensores.

1.2.1. Operador diferencial vectorial:

$$\nabla = \underline{\delta}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{\delta}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{\delta}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1. 20}$$

1.2.2. Gradiente de un escalar:

$$\nabla s = \underline{\delta}_i \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

1.2.3. Gradiente de un vector:

$$\nabla \underline{v} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (v_j \, \underline{\delta}_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \underline{\delta}_i \, \underline{\delta}_j \tag{1. 21}$$

Su transpuesta es:

$$\nabla \underline{v}^T = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, \underline{\delta}_i \, \underline{\delta}_j \tag{1. 22}$$

1.2.4. Divergencia de un vector:

$$\nabla \cdot \underline{v} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (v_j \, \underline{\delta}_j) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, \delta_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{1. 23}$$

1.2.5. Divergencia de un tensor:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (\tau_{jk} \, \underline{\delta}_j \, \underline{\delta}_k) = \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \, (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) \, \underline{\delta}_k$$

$$= \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \, \delta_{ij} \, \underline{\delta}_k = \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \, \underline{\delta}_k \tag{1. 24}$$

Por ejemplo :

$$\left(\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right)_{k=1} = \left(\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right)_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3}$$

Otro ejemplo:

$$\nabla \cdot \underline{v}\,\underline{w} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(v_j\, w_k\right)\, \underline{\delta}_j\, \underline{\delta}_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_j\, w_k\right)\, \delta_{ij}\, \underline{\delta}_k = \frac{\partial}{\partial x_i}\, \left(v_i\, w_k\right)\, \underline{\delta}_k$$

tal que

$$\left(\nabla \cdot \underline{v}\,\underline{w}\right)_{k=1} = \frac{\partial v_1 w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2 w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3 w_1}{\partial x_3} = \left(\nabla \cdot \underline{v}\right)\, w_1$$

1.2.6. Laplaciano de un escalar:

$$\nabla \cdot \nabla s = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\underline{\delta}_j \frac{\partial s}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \delta_{ij} = \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \qquad \textbf{(1. 25)}$$

tal que,

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

1.2.7. Laplaciano de un vector:

$$\nabla \cdot \nabla \underline{v} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, \underline{\delta}_j\, \underline{\delta}_k\right) = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \left(\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j\right)\, \underline{\delta}_k$$

$$= \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\, \partial x_j}\, \delta_{ij}\, \underline{\delta}_k = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2}\, \underline{\delta}_k \qquad \textbf{(1. 26)}$$

tal que, por ejemplo,

$$\left(\nabla \cdot \nabla \underline{v}\right)_{k=1} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} = \left(\nabla \cdot \nabla \underline{v}\right)_1$$

1.2.8. Rotacional de un vector:

$$\nabla \times \underline{v} = \left(\underline{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \times (v_k \underline{\delta}_k) = \frac{\partial v_k}{\partial x_j} (\underline{\delta}_j \times \underline{\delta}_k)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \underline{\delta}_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \begin{vmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad \textbf{(1. 27)}$$

Por ejemplo,

$$(\nabla \times \underline{v})_1 = (\nabla \times \underline{v})_{i=1} = \underline{\delta}_1 \left(\varepsilon_{123} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \varepsilon_{132} \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) = \underline{\delta}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$$

Otros ejemplos:

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = (v_i \underline{\delta}_i) \cdot \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \underline{\delta}_j \underline{\delta}_k\right) = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) \underline{\delta}_k$$

$$= v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \delta_{ij} \underline{\delta}_k = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \underline{\delta}_k$$

tal que,

$$(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})_1 = (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})_{k=1} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$\nabla \cdot p \underline{\underline{\delta}} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot (p \underline{\delta}_j \underline{\delta}_j) = \frac{\partial p}{\partial x_i} (\underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j) \underline{\delta}_j$$

$$= \frac{\partial p}{\partial x_i} \delta_{ij} \underline{\delta}_j = \frac{\partial p}{\partial x_j} \underline{\delta}_j = \nabla p$$

Si $\underline{r} = x_i \underline{\delta}_i$

entonces:

$$\nabla \underline{r} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) (x_j \underline{\delta}_j) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j = \delta_{ij} \underline{\delta}_i \underline{\delta}_j = \underline{\delta}_i \underline{\delta}_i = \underline{\underline{\delta}}$$

$$\nabla \cdot \underline{r} = \left(\underline{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot (x_j \underline{\delta}_j) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \underline{\delta}_i \cdot \underline{\delta}_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$$

1.3. Teoremas Integrales de Vectores y Tensores.

1.3.1. Teorema de la divergencia.

$$\iiint \nabla \cdot \underline{v}\, dV = \iint \underline{v} \cdot \underline{n}\, ds \tag{1. 28}$$

$$\iiint \nabla s\, dV = \iint s\, \underline{n}\, ds \tag{1. 29}$$

$$\iiint \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\, dV = \iint \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}\, ds \tag{1. 30}$$

1.3.2. Fórmula de Leibnitz.

$$\frac{d}{dt} \iiint s\, dV = \iiint \frac{\partial s}{\partial t}\, dV + \iint s\, (\underline{v} \cdot \underline{n})\, ds \tag{1. 31}$$

1.3.3. Teorema de Stokes.

$$\iint (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n}\, ds = \oint (\underline{v} \cdot \underline{t})\, dC \tag{1. 32}$$

$\underline{t}$ es un vector unitario tangente en la dirección de C.

Ejemplo: Ec. **1. 28**,

$$\iiint \nabla \cdot \underline{v}\, dV = \iiint \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dV$$

$$= \iiint \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iiint \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iiint \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$= \iint \left\{ \int \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\, dx_1 \right\} dx_2\, dx_3 + \iint \left\{ \int \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\, dx_2 \right\} dx_1\, dx_3 + \iint \left\{ \int \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\, dx_3 \right\} dx_1\, dx_2$$

$$= \iint v_1\ dx_2\, dx_3 + \iint v_2\ dx_1\, dx_3 + \iint v_3\ dx_1\, dx_2$$

$$= \iint v_1\ n_1\, ds + \iint v_2\ n_2\, ds + \iint v_3\ n_3\, ds = \iint \underline{v} \cdot \underline{n}\ ds$$

1.4. Vectores y Tensores en Coordenadas Curvilíneas.

1.4.1. Diferenciales de área y volumen.

Coordenadas cartesianas.

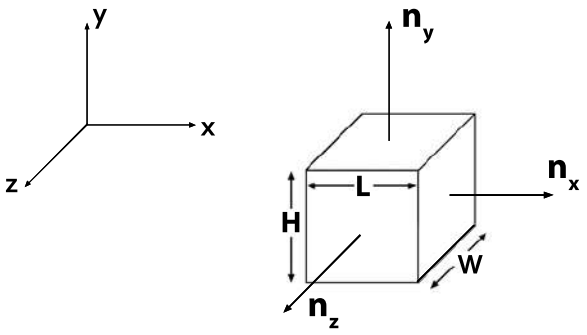
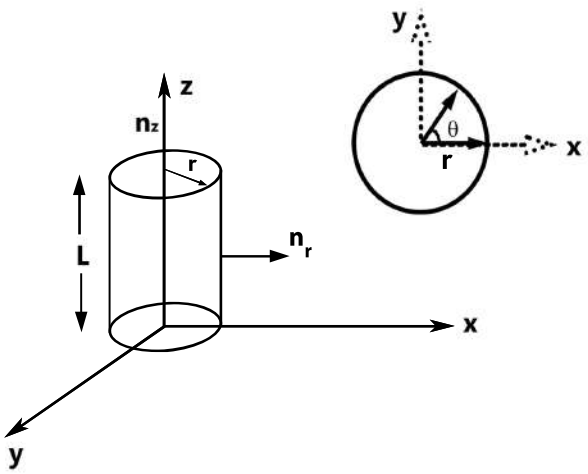


Figura **1.2**. *Coordenadas Cartesianas.*

Suponer un cubo de lados L, H y W

$$
\begin{aligned}
d\underline{S}_x &= \underline{n}_x\, dy\, dz \quad \Rightarrow \quad |\underline{S}_x| = \int_0^W \int_0^H |n_x|\, dy\, dz = W\,H \\
d\underline{S}_y &= \underline{n}_y\, dx\, dz \quad \Rightarrow \quad |\underline{S}_y| = \int_0^W \int_0^L |n_y|\, dx\, dz = W\,L \\
d\underline{S}_z &= \underline{n}_z\, dx\, dy \quad \Rightarrow \quad |\underline{S}_z| = \int_0^H \int_0^L |n_z|\, dx\, dy = H\,L \\
V &= \int_0^W \int_0^H \int_0^L dx\, dy\, dz = W\,H\,L
\end{aligned}
$$

Coordenadas cilíndricas.



por lo que:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
x = r\cos\theta & r = \sqrt{x^2 + y^2} \\
y = r\,sen\theta & \theta = tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\
z = z & z = z
\end{array}
\right\}
\qquad \textbf{(1. 33)}
$$

Figura **1.3**. *Coordenadas Cilíndricas.*

$$d\underline{S}_z = \underline{n}_z\, dr\,(r\,d\,\theta)$$

$$\left|\underline{S}_z\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} |n_z|\, r\, dr\, d\theta = \pi r^2$$

$$d\underline{S}_r = \underline{n}_r\,(r\,d\,\theta)\,(dz)$$

$$|\underline{S}_r| = \int_0^{L}\int_0^{2\pi} |n_r|\, r\, d\theta\, dz = 2\pi r L$$

$$V = \int_0^{L}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} (dr)\,(r\,d\,\theta)\, dz = \pi r^2 L$$

Coordenadas esféricas.

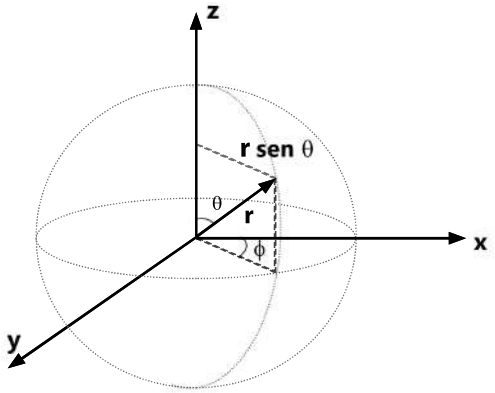


Figura **1.4**. *Coordenadas Esféricas.*

así,

$$\left\{\begin{array}{ll} x = r sen\theta\, cos\phi & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y = r sen\theta\, sen\phi & \theta = tan^{-1}\,\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ z = r cos\theta & \phi = tan^{-1}\,\dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1. 34)}$$

$$d\underline{S}_r = \underline{n}_r\,(r d_\theta)\,(r sen\,\theta)\, d\phi$$

$$|\underline{S}_r| = r^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |n_r|\, sen\,\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi r^2$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} (dr)\,(r\,d\,\theta)\,(r sen\,\theta\, d\phi) = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

1.4.2. Transformaciones cartesianas - cilíndricas.

Operador diferencial en coordenadas cilíndricas.

De acuerdo a las transformaciones mostradas en **1. 33**, tenemos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = cos\,\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + sen\,\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\,sen\,\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + r\,cos\,\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sen\,\theta & 0 \\ -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1. 35)}$$

En forma sintética:

$$\nabla = \underline{\underline{Q}} \cdot \nabla^C \qquad \textbf{(1. 36)}$$

donde ∇ es el operador diferencial en coordenadas cilíndricas, ∇^C es el operador diferencial en coordenadas cartesianas y **Q** es la matriz de transformación. En términos de sus componentes:

$$\nabla = \underline{\delta}_r\frac{\partial}{\partial r} + \underline{\delta}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z} \qquad y \qquad \nabla^C = \underline{\delta}_x\frac{\partial}{\partial x} + \underline{\delta}_y\frac{\partial}{\partial y} + \underline{\delta}_z\frac{\partial}{\partial z} \quad \textbf{(1. 37)}$$

Las transformaciones inversas (cartesianas – cilíndricas) son:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = cos\,\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - sen\,\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = sen\,\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + cos\,\theta\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Las ecuaciones anteriores involucraron las siguientes operaciones:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = cos\,\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = sen\,\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{r^2} = \frac{-sen\,\theta}{r} \qquad \text{y}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{r^2} = \frac{cos\,\theta}{r}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1. 38)}$$

En forma sintética:

$$\nabla^C = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \nabla \qquad \textbf{(1. 39)}$$

donde $\mathbf{Q}^T$ es la matriz transpuesta de $\boldsymbol{Q}$.

La matriz Q es una matriz ortogonal, de tal forma que $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{I}}$ **(1. 40)**

La misma transformación opera sobre los vectores unitarios:

$$\begin{pmatrix} \delta \underline{r} \\ \delta \underline{\theta} \\ \delta \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sen\,\theta & 0 \\ -sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{y} \\ \delta \underline{z} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \delta \underline{x} \\ \delta \underline{y} \\ \delta \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{r} \\ \delta \underline{\theta} \\ \delta \underline{z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1. 41)}$$

De hecho, la ecuación **1. 39** se puede demostrar en términos de los componentes:

$$\nabla^C = \delta\underline{x}\frac{\partial}{\partial x} + \delta\underline{y}\frac{\partial}{\partial y} + \delta\underline{z}\frac{\partial}{\partial z} = (\delta\underline{r}\cos\theta - \delta\underline{\theta}\,sen\,\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - sen\,\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$
$$+ (\delta\underline{r}\,sen\,\theta + \delta\underline{\theta}\cos\theta)\left(sen\,\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \partial\underline{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^C = \delta\underline{r}\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \delta\underline{r}\cos\theta\,sen\,\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - \delta\underline{\theta}\,sen\,\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{\theta}\,sen^2\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$
$$+ \delta\underline{r}\,sen^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{r}\,sen\,\theta\cos\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\underline{\theta}\cos\theta\,sen\,\theta\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{\theta}\cos^2\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+ \delta\underline{z}\frac{\partial}{\partial z} = \boxed{\delta\underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\underline{z}\frac{\partial}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla}} \qquad \textbf{(1. 42)}$$

1.4.3. Transformaciones cartesianas - esféricas.

En este caso, tenemos que $\underline{\underline{Q}}$ está dado por:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} sen\,\theta\cos\phi & sen\,\theta\,sen\,\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\,sen\,\phi & -sen\,\theta \\ -sen\,\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1. 43)}$$

y,

$$\nabla = \delta\underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\underline{\phi}\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \textbf{(1. 44)}$$

de forma que:

$$\begin{pmatrix} \delta\underline{r} \\ \delta\underline{\theta} \\ \delta\underline{\phi} \end{pmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \begin{pmatrix} \delta\underline{x} \\ \delta\underline{y} \\ \delta\underline{z} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1. 45)}$$

1.5. Operadores Diferenciales en Coordenadas Curvilíneas.

1.5.1. Diferenciación de los vectores unitarios.

Coordenadas cilíndricas:

Con base en la ecuación **1. 41**, los vectores $\delta\,\underline{r}$, $\delta\,\underline{\theta}$ son funciones únicamente de θ, por lo que:

$$\frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{r} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{\theta} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{z} = 0 \tag{1. 46}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\delta\,\underline{r} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial z}\delta\,\underline{\theta} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial z}\delta\,\underline{z} = 0 \tag{1. 47}$$

A su vez, $\delta\,\underline{z}$ no es función de θ:

$$\frac{\partial}{\partial\,\theta}\delta\,\underline{z} = 0$$

Pero:

$$\frac{\partial}{\partial\,\theta}\delta\,\underline{r} = \frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(cos\,\theta\,\delta\,\underline{x} + sen\,\theta\,\delta\,\underline{y}\right) = -sen\,\theta\,\delta\,\underline{x} + cos\,\theta\,\delta\,\underline{y} = \delta\,\underline{\theta} \tag{1. 48}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial\,\theta}\delta\,\underline{\theta} = \frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(-sen\,\theta\,\delta\,\underline{x} + cos\,\theta\,\delta\,\underline{y}\right) = -cos\,\theta\,\delta\,\underline{x} - sen\,\theta\,\delta\,\underline{y} = -\delta\,\underline{r} \tag{1. 49}$$

Coordenadas esféricas.

Con base en la ecuación **1. 45**, los vectores $\delta\,\underline{r}$, $\delta\,\underline{\theta}$ y $\delta\,\underline{z}$ son funciones únicamente de θ y ϕ, por lo que:

$$\frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{r} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{\theta} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial r}\delta\,\underline{\phi} = 0 \tag{1. 50}$$

Ahora:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\delta\underline{r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\,\theta\,cos\,\phi\,\delta\underline{x} + sen\,\theta\,sen\,\phi\,\delta\underline{y} + cos\,\theta\,\delta\underline{z}\right)$$
$$= cos\,\theta\,cos\,\phi\,\delta\underline{x} + cos\,\theta\,sen\,\phi\,\delta\underline{y} - sen\,\theta\,\delta\underline{z} = \delta\underline{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\delta\underline{\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(cos\,\theta\,cos\,\phi\,\delta\underline{x} + cos\,\theta\,sen\,\phi\,\delta\underline{y} - sen\,\theta\,\delta\underline{z}\right)$$
$$= -\,sen\,\theta\,cos\,\phi\,\delta\underline{x} - sen\,\theta\,sen\,\phi\,\delta\underline{y} - cos\,\theta\,\delta\underline{z} = -\delta\underline{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\delta\underline{\phi} = 0 \qquad \textbf{(1. 51)}$$

Similarmente:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\delta\underline{r} = \delta\underline{\phi}\,sen\,\theta\,, \quad \frac{\partial}{\partial\phi}\delta\underline{\theta} = \delta\underline{\phi}\,cos\,\theta\,, \quad \frac{\partial}{\partial\phi}\delta\underline{\phi} = -\delta\underline{r}\,sen\,\theta - \delta\underline{\theta}\,cos\,\theta$$

(1. 52)

Ejemplos.

1. Calcular $\nabla\cdot\underline{v}$ en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla\cdot\underline{v} = \left[\delta\underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \delta\underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot\left[\delta\underline{r}\,v_r + \delta\underline{\theta}\,v_\theta + \delta\underline{z}\,v_z\right]$$
$$= \delta\underline{r}\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left[\delta\underline{r}\,v_r + \delta\underline{\theta}\,v_\theta + \delta\underline{z}\,v_z\right] + \delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[\delta\underline{r}\,v_r + \delta\underline{\theta}\,v_\theta + \delta\underline{z}\,v_z\right]$$
$$+ \delta\underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left[\delta\underline{r}\,v_r + \delta\underline{\theta}\,v_\theta + \delta\underline{z}\,v_z\right] = \boxed{\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}}$$

porque:

$$\delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot(\delta\underline{r}\,v_r) = \frac{1}{r}\delta\underline{\theta}\cdot\left[\delta\underline{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + v_r\frac{\partial}{\partial\theta}(\delta\underline{r})\right] = \frac{v_r}{r}$$

y

$$\delta\underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\cdot\left[\delta\underline{\theta}\,v_\theta\right] = (\delta\underline{\theta}\cdot\delta\underline{\theta})\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta,}{\partial\theta}$$

2. Calcular el Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$
\begin{aligned}
(\nabla \cdot \nabla) &= \left(\delta \underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\delta \underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
&= \delta \underline{r} \cdot \delta \underline{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \delta \underline{z} \cdot \delta \underline{z}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\delta \underline{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left(\delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\delta \underline{\theta} \cdot \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\delta \underline{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta\, \partial r}\delta \underline{r}\right] + \frac{1}{r^2}\delta \underline{\theta} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\delta \underline{\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\delta \underline{\theta}\right] \\
&= \boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}}
\end{aligned}
$$

3. Calcular las componentes $(\nabla \underline{v})_{\theta r}$ y $(\nabla \underline{v})_{\theta\theta}$ en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \underline{v} = \left(\delta \underline{r}\frac{\partial}{\partial r} + \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \underline{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\delta \underline{r} v_r + \delta \underline{\theta} v_\theta + \delta \underline{z} v_z)$$

$$
\begin{aligned}
\delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\delta \underline{\theta} v_\theta) &= \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\left[\delta \underline{\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\partial \delta \underline{\theta}}{\partial \theta}\right] \\
&= \delta \underline{\theta}\delta \underline{\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right) - \delta \underline{\theta}\delta \underline{r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\delta \underline{r} v_r) &= \delta \underline{\theta}\frac{1}{r}\left[\delta \underline{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial}{\partial \theta}\delta \underline{r}\right] \\
&= \delta \underline{\theta}\delta \underline{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \delta \underline{\theta}\delta \underline{\theta}\left(\frac{v_r}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la componente $\boxed{(\nabla \underline{v})_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r}}$

y la componente $\boxed{(\nabla \underline{v})_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}}$

Apéndice A.

Operaciones diferenciales en coordenadas cartesianas (x, y, z):

$$(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{A-1}$$

$$\left(\nabla^2 s\right) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned}\left(\underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v}\right) = {} & \tau_{xx}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ & + \tau_{yx}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \tau_{yy}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ & + \tau_{zx}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \tau_{zy}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + \tau_{zz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{A-3}$$

$$[\nabla s]_x = \frac{\partial s}{\partial x} \tag{A-4}$$

$$[\nabla s]_y = \frac{\partial s}{\partial y} \tag{A-5}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \tag{A-6}$$

$$[\nabla \times \underline{v}]_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \tag{A-7}$$

$$[\nabla \times \underline{v}]_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \tag{A-8}$$

$$[\nabla \times \underline{v}]_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{A-9}$$

$$\left[\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right]_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{A-10}$$

$$\left[\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right]_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \tag{A-11}$$

$$\left[\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right]_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{A-12}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \tag{A-13}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \tag{A-14}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{A-15}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_x = v_x \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} \right) \quad \textbf{(A-16)}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_y = v_x \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \quad \textbf{(A-17)}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_z = v_x \left(\frac{\partial w_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad \textbf{(A-18)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad \textbf{(A-19)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{xy} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad \textbf{(A-20)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{xz} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \textbf{(A-21)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{yx} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad \textbf{(A-22)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \textbf{(A-23)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{yz} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad \textbf{(A-24)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{zx} = \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad \textbf{(A-25)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{zy} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \textbf{(A-26)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \textbf{(A-27)}$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \textbf{(A-28)}$$

Apéndice B.

Operaciones diferenciales en coordenadas cilíndricas (r,θ,z):

$$(\nabla\cdot\underline{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{B-1}$$

$$(\nabla^2 s) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \tag{B-2}$$

$$\begin{aligned}\left(\underline{\underline{\tau}}:\nabla\underline{v}\right) = {}& \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\tau_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r}\right)+\tau_{rz}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\\ &+\tau_{\theta r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)+\tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_r}{r}\right)+\tau_{\theta z}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\\ &+\tau_{zr}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\tau_{z\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right)+\tau_{zz}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\end{aligned} \tag{B-3}$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \tag{B-4}$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial\theta} \tag{B-5}$$

$$[\nabla s]_z = \frac{\partial s}{\partial z} \tag{B-6}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_r = \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta}-\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \tag{B-7}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_\theta = \frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{B-8}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \tag{B-9}$$

$$\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\tau_{\theta r}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zr}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \tag{B-10}$$

$$\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\tau_{\theta\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{z\theta}+\frac{\tau_{\theta r}-\tau_{r\theta}}{r} \tag{B-11}$$

$$\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\tau_{\theta z}+\frac{\partial}{\partial z}\tau_{zz} \tag{B-12}$$

$$\left[\nabla^2\underline{v}\right]_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} \tag{B-13}$$

$$\left[\nabla^2\underline{v}\right]_\theta = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \tag{B-14}$$

$$\left[\nabla^2\underline{v}\right]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \tag{B-15}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_r = v_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_r}{\partial z} \right) \quad \textbf{(B-16)}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_\theta = v_r \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial z} \right) \quad \textbf{(B-17)}$$

$$[\underline{v} \cdot \nabla \underline{w}]_z = v_r \left(\frac{\partial w_z}{\partial r} \right) + v_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \right) + v_z \left(\frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \quad \textbf{(B-18)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \textbf{(B-19)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad \textbf{(B-20)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \textbf{(B-21)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\theta r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \quad \textbf{(B-22)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad \textbf{(B-23)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \quad \textbf{(B-24)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{zr} = \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad \textbf{(B-25)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{z\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad \textbf{(B-26)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \textbf{(B-27)}$$

$$(\underline{v} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \textbf{(B-28)}$$

Apéndice C.

Operaciones diferenciales en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ):

$$(\nabla\cdot\underline{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\, sen\theta) + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{C-1}$$

$$\left(\nabla^2 s\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial s}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial s}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,sen^2\theta}\frac{\partial^2 s}{\partial\phi^2} \tag{C-2}$$

$$\begin{aligned}\left(\underline{\underline{\tau}}:\nabla\underline{v}\right) = {} & \tau_{rr}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \tau_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r}\right) + \tau_{r\phi}\left(\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r}\right)\\ & + \tau_{\theta r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \tau_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right) + \tau_{\theta\phi}\left(\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} - \frac{v_\phi}{r}cot\theta\right)\\ & + \tau_{\phi r}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \tau_{\phi\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial\theta}\right) + \tau_{\phi\phi}\left(\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r}cot\theta\right)\end{aligned} \tag{C-3}$$

$$[\nabla s]_r = \frac{\partial s}{\partial r} \tag{C-4}$$

$$[\nabla s]_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial\theta} \tag{C-5}$$

$$[\nabla s]_\phi = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial s}{\partial\phi} \tag{C-6}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_r = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\phi\, sen\theta) - \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi} \tag{C-7}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_\theta = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) \tag{C-8}$$

$$[\nabla\times\underline{v}]_\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \tag{C-9}$$

$$\begin{aligned}\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_r = {} & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta r}\, sen\theta)\\ & + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi r} - \frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r}\end{aligned} \tag{C-10}$$

$$\begin{aligned}\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_\theta = {} & \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\theta}\, sen\theta)\\ & + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi\theta} + \frac{(\tau_{\theta r}-\tau_{r\theta}) - \tau_{\phi\phi}cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{C-11}$$

$$\begin{aligned}\left[\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}\right]_\phi = {} & \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\phi}\, sen\theta)\\ & + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi\phi} + \frac{(\tau_{\phi r}-\tau_{r\phi}) + \tau_{\phi\theta}cot\theta}{r}\end{aligned} \tag{C-12}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r)\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta sen\theta) - \frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad \textbf{(C-13)}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta sen\theta)\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{cot\theta}{sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad \textbf{(C-14)}$$

$$\left[\nabla^2 \underline{v}\right]_\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\phi sen\theta)\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2}{r^2}\frac{cot\theta}{sen\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \quad \textbf{(C-15)}$$

$$\left[\underline{v}\cdot\nabla\underline{w}\right]_r = v_r\left(\frac{\partial w_r}{\partial r}\right) + v_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r}\right) + v_\phi\left(\frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r}\right) \quad \textbf{(C-16)}$$

$$\left[\underline{v}\cdot\nabla\underline{w}\right]_\theta = v_r\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial r}\right) + v_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r}\right) + v_\phi\left(\frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r}cot\theta\right) \quad \textbf{(C-17)}$$

$$\left[\underline{v}\cdot\nabla\underline{w}\right]_\phi = v_r\left(\frac{\partial w_\phi}{\partial r}\right) + v_\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_\phi}{\partial \theta}\right) + v_\phi\left(\frac{1}{r sen\theta}\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_\theta}{r}cot\theta\right) \quad \textbf{(C-18)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad \textbf{(C-19)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{r\theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad \textbf{(C-20)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{r\phi} = \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \quad \textbf{(C-21)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{\theta r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \quad \textbf{(C-22)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad \textbf{(C-23)}$$

$$\left[\nabla \underline{v}\right]_{\theta\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \quad \textbf{(C-24)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\phi r} = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \qquad \textbf{(C-25)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\phi\theta} = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r}\,cot\theta \qquad \textbf{(C-26)}$$

$$[\nabla \underline{v}]_{\phi\phi} = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r}\,cot\theta \qquad \textbf{(C-27)}$$

$$(\underline{v}\cdot\nabla) = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad \textbf{(C-28)}$$

Tarea 1

1. **Operaciones entre vectores** (Apéndice A, pág. 814, Bird et al).

   El vector $\underline{v} = (1, 2, -5)$ y el vector $\underline{w} = (3, -1, 1)$. Evaluar:

   a) $(\underline{v} \cdot \underline{w})$

   b) $(\underline{v} \times \underline{w})$

   c) La longitud de $\underline{v}$

   d) $(\underline{\delta}_1 \cdot \underline{v})$

   e) $(\underline{\delta}_1 \times \underline{w})$

   f) Ángulo entre $\underline{v}$ y $\underline{w}$

   g) $(\underline{r} \times \underline{v})$, donde $\underline{r}$ es el vector de posición.

2. **Operaciones entre tensores y vectores** (Apéndice A, pág. 819, Bird et al).

   Si $\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\underline{v} = (5,\ 3,\ \text{-}2)$, evaluar:

   a) $\left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right)$

   b) $\left(\underline{v} \cdot \underline{\underline{\tau}}\right)$

   c) $\left(\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\tau}}\right)$

   d) $\left[\underline{v} \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right)\right]$

   e) $[\underline{v}\,\underline{v}]$

   f) $\left[\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\delta}_1\right]$

   Evaluar:

   a) $[\underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_2 \cdot \underline{\delta}_2] \times \underline{\delta}_1$

   b) $\left[\underline{\underline{\delta}} : \underline{\delta}_1\,\underline{\delta}_2\right]$

   c) $\left[\underline{\underline{\delta}} : \underline{\underline{\delta}}\right]$

   d) $\left[\underline{\underline{\delta}} \cdot \underline{\underline{\delta}}\right]$

3. **Coordenadas cilíndricas** (Apéndice A, pág. 839, Bird et al).

   Expresar las siguientes operaciones en coordenadas cilíndricas:

   a) $\nabla \cdot \rho \underline{v}$, donde ρ es un escalar.

   b) $[\nabla \cdot \rho \underline{v}\underline{v}]_r$, donde ρ es un escalar.

   c) $\left[\nabla \cdot p \underline{\underline{\delta}}\right]_\theta$, donde p es un escalar.

   d) $\left(\nabla \cdot \left[\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right]\right)$

   e) $[\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}]_\theta$

   f) $\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T$

Capítulo 2

Mecánica del medio continuo
Ecuaciones constitutivas

2. 1. Cinemática.

La cinemática de fluidos incluye el estudio del movimiento relativo, del cambio de volumen, rapidez de deformación y vorticidad en un elemento de fluido.

2. 1.1. Movimiento relativo.

Cinemática es la descripción del movimiento per se, que se aplica a todos los fluidos. Su descripción se basa en el concepto de transformación puntual. Al tiempo t = 0, una partícula o "elemento material" se encuentra en la posición $\underline{\xi}$ y al tiempo t = t, su posición es $\underline{x}$. Entonces,

$$\underline{x} = \underline{x}\,(\underline{\xi}, t) \qquad \textbf{(2. 1)}$$

El concepto del continuo reemplaza la teoría cinética molecular por un continuo cuya velocidad en cualquier punto es el promedio de la velocidad de las moléculas en una vecindad del punto.

Las coordenadas iniciales de un elemento material $\underline{\xi}$ son denominadas de Lagrange o convectivas, y las coordenadas $\underline{x}$ son espaciales, referidas a su posición en el espacio. Si el movimiento es continuo, admite la inversión de la ecuación **2. 1** para obtener la posición inicial del elemento $\underline{\xi}$:

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}\,(\underline{x}, t) \qquad \textbf{(2. 2)}$$

La condición para la existencia de las funciones inversas es que el Jacobiano sea distinto de cero:

$$J = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} = \frac{\partial(x_1,\, x_2,\, x_3)}{\partial(\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)} \tag{2. 3}$$

Por ejemplo, la densidad en la vecindad de un elemento $\underline{\xi}$ es $\rho\ (\underline{\xi},\, t)$, que es aquella observada en el sistema de coordenadas del elemento material. En la descripción espacial,

$$\rho\ (\underline{x},\, t) = \rho\ [\underline{\xi}\ (\underline{x},\, t),\, t] \qquad \text{y su inversa:} \qquad \rho\ (\underline{\xi},\, t) = \rho\ [\underline{x}\ (\underline{\xi},\, t),\, t] \tag{2. 4}$$

Consistente con lo anterior, se definen dos derivadas temporales:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\underline{x}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{d\,t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\underline{\xi}} \tag{2. 5}$$

por lo que, en el caso de la descripción de la densidad, $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ es observada en un punto fijo $\underline{x}$, mientras que $\frac{d\rho}{dt}$ es observada en un sistema de coordenadas que se mueve con el elemento material (derivada material). Si $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$, la derivada material de la posición del elemento material es su velocidad:

$$\underline{v} = \frac{d\,\underline{x}}{d\,t} = \left[\frac{\partial\,\underline{x}}{\partial\,\underline{\xi}}\right] \frac{d\,\underline{\xi}}{d\,t} + \left[\frac{\partial\,\underline{x}}{\partial\,t}\right]_{\underline{\xi}} = \left[\frac{\partial\,\underline{x}}{\partial\,t}\right]_{\underline{\xi}} \tag{2. 6}$$

La relación entre ambas derivadas es la siguiente, para cualquier función f:

$$\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{\partial\, f(\underline{\xi}, t)}{\partial\, t} = \frac{\partial\, f[\underline{x}(\underline{\xi}, t),\, t]}{\partial\, t} = \frac{\partial\, f}{\partial\,\underline{x}} \left(\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}\right)_{\underline{\xi}} + \left(\frac{\partial\, f}{\partial\, t}\right)_{\underline{x}} = \frac{\partial\, f}{\partial\, t} + \underline{v} \cdot \nabla f \tag{2. 7}$$

Por lo que:

$$\frac{d\,f}{d\,t} = \frac{\partial\, f}{\partial\, t} + \underline{v} \cdot \nabla f \tag{2. 8}$$

Ejemplos.

Considerar los perfiles de velocidad en los siguientes sistemas de flujo (ver figura **2.1**):

El punto ① tiene coordenadas $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ y el punto ② tiene coordenadas $(\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)$.

En (a), la relación entre las dos es:

$$\left(\frac{\partial\, v_2}{\partial\, t}\right)_{\underline{\xi}} = \left(\frac{\partial\, v_1}{\partial\, t}\right)_{\underline{x}} + v_1\, \frac{\Delta\, v}{\Delta\, r} = \frac{\partial\, v_1}{\partial\, t} + v_1\, \frac{v_2 - v_1}{r_2 - r_1}$$

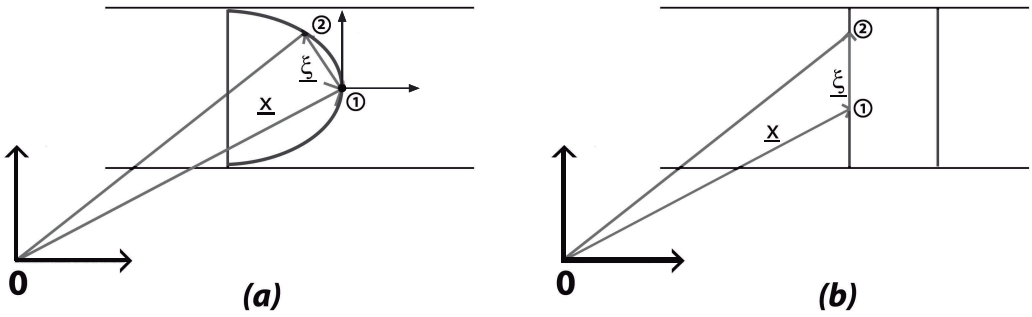


Figura **2.1**. **(a)** *Perfil parabólico correspondiente a un flujo laminar*, **(b)** *Perfil de velocidad constante (flujo pistón o tapón).*

En (b), como $v_2 - v_1 = 0$, entonces $\left(\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)_{\underline{\xi}} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)_{\underline{x}}$ y no existe movimiento relativo. Se puede demostrar que si $f(\underline{x}, t) = 0$ es una superficie constituida por los mismos puntos, entonces:

$$\frac{d f}{d t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f$$

2. 1.2. Cambio de volumen.

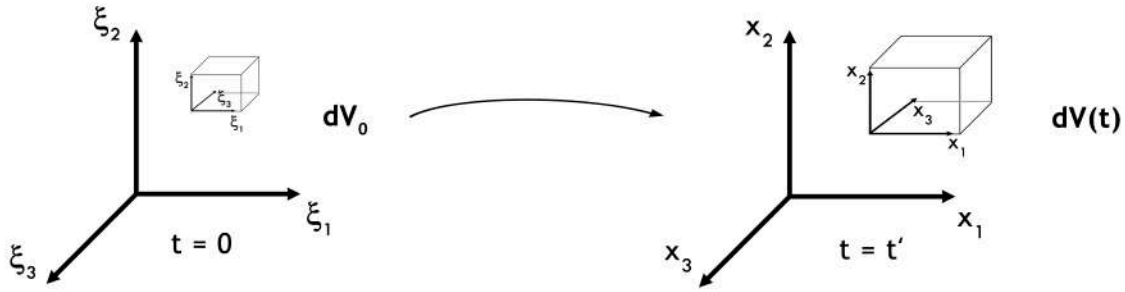


Figura **2.2**. *Un elemento de volumen cúbico cambia de volumen desde uno inicial* $(t = 0)\, dV_0$ *a uno final* dV *a un tiempo posterior* $(t = t')$.

La regla de transformación es:

$d\underline{x}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\underline{\xi}_1$, $d\underline{x}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\underline{\xi}_2$, $d\underline{x}_3 = \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} d\underline{\xi}_3$. El cambio de volumen está definido por:

$dV(t) = d\underline{x}_1 \cdot (d\underline{x}_2 \times d\underline{x}_3) = dx_1\, dx_2\, dx_3$, substituyendo,

$dV(t) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\underline{\xi}_1 \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\underline{\xi}_2 \times \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} d\underline{\xi}_3\right)$, arreglando términos:

$dV(t) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \left(d\underline{\xi}_1 \cdot d\underline{\xi}_2 \times d\underline{\xi}_3\right)$,

$$dV_0 = d\underline{\xi}_1 \cdot d\underline{\xi}_2 \times d\underline{\xi}_3 = d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$$

Por lo tanto, $dV(t) = \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3}\, dV_0$. Ahora, $\dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1}\dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} = J$

Luego entonces : $\qquad dV(t) = J\, dV_0$ **(2. 9)**

La regla de transformación entre $dV(t)$ y dV_0 es el Jacobiano.

En el caso de un elemento material cualquiera, el Jacobiano es:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \qquad \textbf{(2. 10)}$$

Teorema de Reynolds.

Este teorema fundamental se deriva de la fórmula de Leibnitz ecuación **1.31**, y demuestra la derivación material de integrales de volumen. Considérese un elemento de volumen $V(t)$ rodeado por una superficie cerrada $S(t)$ determinada por su normal $\underline{n}$, desplazándose a una velocidad $\underline{v}$ (ver figura **2.3**).

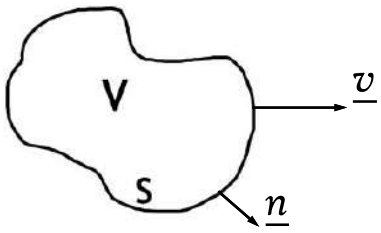


Figura **2.3**. *Elemento material o elemento de volumen de un fluido*.

La derivada material de una función f de las coordenadas y del tiempo definida en un volumen que cambia con el tiempo está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt}\iiint f(\underline{x},t)\, dV(t) = \iiint \frac{\partial f}{\partial t}(\underline{x},t)\, dV(t) + \iint f(\underline{x},t)\, \underline{v}\cdot\underline{n}\, dS(t) \qquad \textbf{(2. 11)}$$

Demostración.

Considérese primero el caso en que f es una constante, para evaluar el cambio de volumen. Esto es,

$$\frac{d}{dt}\iiint dV(t) = \frac{d}{dt}V(t) = \iint \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS(t) \qquad \textbf{(2. 12)}$$

Por ende, la definición de gasto volumétrico es: $Q = \dfrac{d}{dt}V(t) = \iint \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS(t)$.

Por el teorema de la divergencia y utilizando la ecuación **2. 9** obtenemos:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \iint \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS(t) = \iiint \nabla\cdot\underline{v}\,dV(t) = \iiint (\nabla\cdot\underline{v})J(t)\,dV_0 \qquad \textbf{(2. 13)}$$

El cambio del volumen con respecto al tiempo puede ser expresado como:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\iiint J\,dV_0 = \iiint \frac{dJ}{dt}\,dV_0 \qquad \textbf{(2. 14)}$$

De las ecuaciones **2. 13** y **2. 14**, se deduce que

$$\frac{dJ}{dt} = J(\nabla\cdot\underline{v}) \qquad \textbf{(2. 15)}$$

La ecuación **2. 15** expresa que el significado físico de la divergencia del campo de velocidades, está relacionado con el cambio proporcional del volumen del elemento material con respecto al tiempo. En fluidos donde no hay cambio apreciable de volumen (fluidos incompresibles) se tiene el siguiente resultado:

$$\nabla\cdot\underline{v} = 0 \qquad \textbf{(2. 16)}$$

Continuando con la demostración del teorema de Reynolds, considérese el cambio de volumen expresado en la ecuación **2. 9**:

$$\frac{d}{dt}\iiint f(\underline{x},t)\,dV(t) = \frac{d}{dt}\iiint f\left[\underline{x}(\underline{\xi},t),t\right]J(t)\,dV_0 = \iiint\left[\frac{df}{dt}J + f\frac{dJ}{dt}\right]dV_0$$

Substituyendo la ecuación **2. 15** en la última ecuación,

$$\iiint\left[\frac{df}{dt}J + fJ(\nabla\cdot\underline{v})\right]dV_0 = \iiint\left[\frac{df}{dt} + f(\nabla\cdot\underline{v})\right]J\,dV_0 = \iiint\left[\frac{df}{dt} + f(\nabla\cdot\underline{v})\right]dV(t)$$

Por medio de la ecuación **2. 8** (definición de la derivada material) obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\iiint f(\underline{x},t)dV(t) = \iiint\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla f + f(\nabla\cdot\underline{v})\right]dV(t) = \iiint\left[\frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla\cdot f\underline{v})\right]dV(t) \qquad \textbf{(2. 17)}$$

Aplicando el teorema de la divergencia obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\iiint f(\underline{x},t)\,dV(t) = \iiint\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]dV(t) + \iint f\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS(t) \qquad \textbf{(2. 18)}$$

Las ecuaciones **2. 17** y **2. 18** prueban la ecuación **2. 11** y el teorema.

2. 1.3. Conservación de masa y ecuación de continuidad.

Definiendo a la masa: $$m = \iiint \rho(\underline{x}, t)\, dV \qquad \textbf{(2. 19)}$$

Donde la densidad $\rho(\underline{x}, t)$ es función de las coordenadas y del tiempo. Por el teorema de Reynolds (ecuación **2. 17**):

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint \rho(\underline{x}, t)\, dV = \iiint \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \underline{v})\right] dV \qquad \textbf{(2. 20)}$$

Si la masa se conserva, $\frac{dm}{dt} = 0$, lo que implica que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} = 0$ **(2. 21)**

En términos de la derivada material:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \qquad \textbf{(2. 22)}$$

Las ecuaciones **2. 21** y **2. 22** son las dos definiciones de la ecuación de continuidad o conservación de masa. En el apéndice **Apéndice C** se encuentra la ecuación **2. 21** en los 3 sistemas de coordenadas.

Otro resultado obtenido a partir del teorema de Reynolds es el relacionado con la función ρf.

A partir de la ecuación **2. 17**:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\iiint \rho f\, dV &= \iiint \left[\frac{d(\rho f)}{dt} + \rho f(\nabla \cdot \underline{v})\right] dV \\
&= \iiint \left[\rho \frac{df}{dt} + f\frac{d\rho}{dt} + \rho f(\nabla \cdot \underline{v})\right] dV \\
&= \iiint \left[\rho \frac{df}{dt} + f\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v})\right)\right] dV = \iiint \rho \frac{df}{dt} dV \qquad \textbf{(2. 23)}
\end{aligned}$$

por la ecuación **2. 22**

Si f es la velocidad, entonces el cambio del momentum $\rho \underline{v}$ con respecto al tiempo es:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho \underline{v}\, dV = \iiint \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV \qquad \textbf{(2. 24)}$$

Un resultado que relaciona a las ecuaciones **2. 15** y **2. 22** es el siguiente:

de la ecuación **2. 15**, $\frac{d\, ln(J)}{dt} = (\nabla \cdot \underline{v})$, lo comparamos con aquel de la ecuación **2. 22**,

$$-\frac{d\, ln(\rho)}{dt} = (\nabla \cdot \underline{v}).$$

Por lo que $\dfrac{d\,ln(J)}{dt} = -\dfrac{d\,ln(\rho)}{dt}$. Esto implica que, después de integrar, el aumento de volumen trae consigo la disminución de la densidad si se conserva la masa, en un elemento de fluido.

2. 1.4. Deformación y rapidez de deformación.

Definiendo al tensor de deformaciones en base de las coordenadas iniciales $\underline{\xi}$:

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, x_1}{\partial\, \xi_1} & \dfrac{\partial\, x_1}{\partial\, \xi_2} & \dfrac{\partial\, x_1}{\partial\, \xi_3} \\ \dfrac{\partial\, x_2}{\partial\, \xi_1} & \dfrac{\partial\, x_2}{\partial\, \xi_2} & \dfrac{\partial\, x_2}{\partial\, \xi_3} \\ \dfrac{\partial\, x_3}{\partial\, \xi_1} & \dfrac{\partial\, x_3}{\partial\, \xi_2} & \dfrac{\partial\, x_3}{\partial\, \xi_3} \end{pmatrix} \tag{2. 25}$$

Las coordenadas de un cuerpo deformado en cualquier estado dependiente del tiempo son: $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$. Por lo tanto, las nuevas coordenadas del cuerpo al tiempo t son: $d\,\underline{x} = \underline{\underline{F}} \cdot d\,\underline{\xi}$. Puesto que las coordenadas iniciales no son dependientes del tiempo, $\underline{\underline{F}}$ es función del tiempo.

Su derivada temporal es: $\dot{\underline{\underline{F}}} = \dfrac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \underline{\xi}} = \dfrac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \underline{x}} \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{\xi}} = \nabla \underline{v} \cdot \underline{\underline{F}}$ (**2. 26**)

La ecuación **2. 26** define al gradiente de velocidades: $\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \nabla \underline{v}$ (**2. 27**)

$$\nabla \underline{v} = \frac{\partial \dot{\underline{x}}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x_1} & \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x_2} & \dfrac{\partial\, v_1}{\partial\, x_3} \\ \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x_1} & \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x_2} & \dfrac{\partial\, v_2}{\partial\, x_3} \\ \dfrac{\partial\, v_3}{\partial\, x_1} & \dfrac{\partial\, v_3}{\partial\, x_2} & \dfrac{\partial\, v_3}{\partial\, x_3} \end{pmatrix} \tag{2. 28}$$

Según el teorema de descomposición de Cauchy-Stokes, el gradiente de velocidades puede ser expresado como la suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica:

$$\nabla \underline{v} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}} \tag{2. 29}$$

La parte simétrica es el tensor rapidez de deformación $\underline{\underline{D}}$ y la parte antisimétrica es el tensor vorticidad $\underline{\underline{W}}$.

Deformación cortante.

Considérese la deformación cortante de un cubo de lado h como se indica en la figura **2.4**.

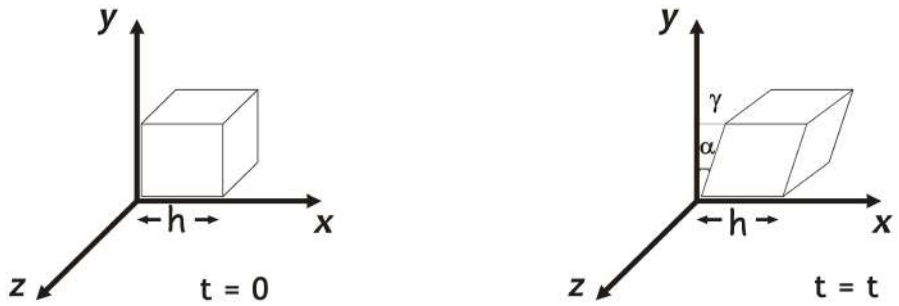


Figura **2.4**. *Deformación cortante en la dirección x de un cubo de lado h. Al tiempo t,* γ *es la deformación y* α *es el ángulo de la deformación.*

En este caso, la deformación en el sentido x varía en dirección y (componente xy del tensor $\underline{\underline{F}}$).

Cuando ésta es infinitesimal:

$\tan(\alpha) = \dfrac{dx}{dy}$. Derivando con respecto al tiempo: $\tan(\dot{\alpha}) = \dfrac{d\dot{x}}{dy}$, donde

$\dot{\alpha} = \Omega$, $\dot{x} = v_x$ son la velocidad angular y la componente x de la velocidad.

Por lo tanto, $\dfrac{d\dot{x}}{dy} = \dfrac{dv_x}{dy}$. Si la velocidad de la superficie superior del cubo es U constante, entonces $\dfrac{dv_x}{dy} = \dfrac{U}{h} = \dot{\gamma}$. A esta cantidad $\dfrac{U}{h} = \dot{\gamma}$, se le denomina velocidad de corte.

El tensor $\underline{\underline{D}}$ en este caso es:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2. 30)}$$

Integrando $\dfrac{dv_x}{dy} = \dfrac{U}{h}$, obtenemos: $v_x = \dfrac{U}{h}y + C$. Puesto que $v_x = 0$ cuando $y = 0$, $C = 0$.

Se obtiene un perfil lineal de velocidades. En este caso, el flujo cortante es simple.
Integrando el perfil $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{U}{h}$ y para obtener el desplazamiento de los elementos materiales se obtiene:

$$\frac{x - x_0}{y} = \frac{U}{h}\Delta t = \dot{\gamma}\Delta t \qquad \text{si } y \text{ es constante.} \qquad \textbf{(2. 31)}$$

Esta expresión indica que el desplazamiento de los elementos del fluido en un flujo de corte simple es lineal con el tiempo a una distancia del origen y especificada.

Flujo extensional.

La deformación extensional, indicada en la figura **2.5**, se describe como la deformación en la cual la velocidad varía en el sentido de la deformación.

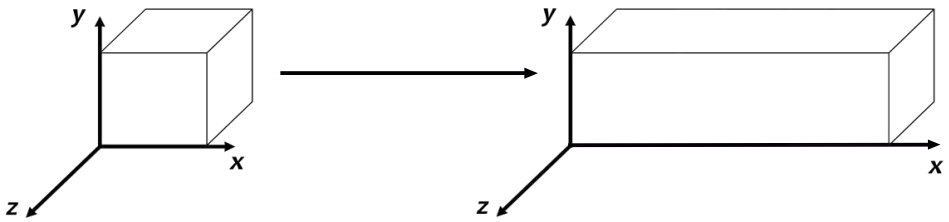


Figura **2.5**. *Flujo extensional uniaxial.*

La rapidez de deformación en este caso está definida como:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\,v_x}{d\,x}, \qquad \text{que integrando se obtiene:} \qquad \frac{d\,x}{d\,t} = \dot{\varepsilon} x \tag{2. 32}$$

la cual se puede integrar nuevamente y obtener $\ln \frac{x}{x_0} = \dot{\varepsilon}(t - t_0)$. Luego, $\frac{x}{x_0} = e^{\dot{\varepsilon}\Delta t}$, lo que indica que los elementos de fluido se desplazan exponencialmente a lo largo del tiempo bajo esta deformación. A tiempos cortos $\left(\frac{x}{x_0} = 1 + \dot{\varepsilon}\,\Delta t\right)$ obtenemos:

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \dot{\varepsilon}\,\Delta t \tag{2. 33}$$

2. 1.5. Vorticidad.

Partimos de la definición de movimiento rotacional uniforme y de velocidad angular, de acuerdo a la figura **2.6**.

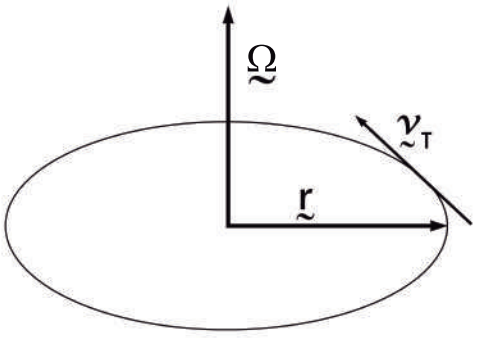


Figura **2.6**. *Movimiento rotacional uniforme, donde* $\underset{\sim}{\Omega}$ *es la velocidad angular,* $\underset{\sim}{v}_T$ *es la velocidad tangencial y* $\underset{\sim}{r}$ *es el radio de giro.*

$$\underset{\sim}{v}_T = \underset{\sim}{\Omega} \times \underset{\sim}{r} \tag{2. 34}$$

El producto vectorial (producto cruz) entre dos vectores puede ser representado por el producto entre una matriz antisimétrica formada por los componentes del vector y el vector posición:

$$\underline{\Omega} \times \underline{r} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_3 r_2 + \Omega_2 r_3 \\ \Omega_3 r_1 - \Omega_1 r_3 \\ -\Omega_2 r_1 + \Omega_1 r_2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2. 35)}$$

El vector vorticidad $\underline{\omega}$ se define como:

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 & \underline{\delta}_2 & \underline{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2. 36)}$$

El tensor vorticidad (definido en la ecuación **2. 29**) tiene los siguientes componentes:

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2. 37)}$$

El producto punto del tensor vorticidad con el vector $\underline{r}$ es:

$$\underline{\underline{W}} \cdot \underline{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\omega_3 r_2 + \omega_2 r_3 \\ \omega_3 r_1 - \omega_1 r_3 \\ -\omega_2 r_1 + \omega_1 r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underline{\omega} \times \underline{r} \qquad \textbf{(2. 38)}$$

Comparando la ecuación **2. 35** con la ecuación **2. 38** obtenemos que:

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{v} \qquad \textbf{(2. 39)}$$

Que es la relación específica entre la velocidad angular y la vorticidad en un elemento de fluido. En notación tensorial, la parte antisimétrica del gradiente de velocidades puede ser expresada de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} W_{ij} &= \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2}\left(\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T\right) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \nabla \times \underline{v} + \frac{1}{2} \nabla \times \underline{v} = \underline{\omega} \end{aligned} \qquad \textbf{(2. 40)}$$

Los componentes de la vorticidad, por el teorema de Stokes, pueden ser definidos en términos de la circulación alrededor de una curva infinitesimal. O sea, la circulación alrededor de un circuito sobre el plano normal a la dirección del componente. Una rotación de cuerpo rígido tiene una velocidad angular $\frac{1}{2}\nabla \times \underline{v}$ (ver ecuación **2. 39**). El componente normal $\frac{1}{2}\,\underline{\omega} \cdot \underline{n}$ es la velocidad de rotación en un plano con normal $\underline{n}$. Finalmente, el teorema de Stokes expresa:

$$\iint (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n}\, dS = \oint \underline{v} \cdot \underline{t}\, dC$$

2. 2. Dinámica del Medio Continuo.

En un medio continuo, las fuerzas que actúan sobre un elemento material de un medio continuo son de dos clases:

a. Externas o de volumen: gravedad o fuerzas electromagnéticas.

b. Internas o de superficies: actúan sobre el elemento de volumen a través de su superficie (fuerzas de fricción).

2. 2.1. Principio de conservación del momentum lineal (Cauchy).

La velocidad de cambio del momentum lineal en un volumen considerado con respecto a un sistema de coordenadas fijo es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el volumen y la superficie que lo rodea.

Sea $\underline{t}_n$ la fuerza por unidad de área, que es función de la normal $\underline{n}$, de la posición $\underline{x}$ y del tiempo: $\underline{t}_n = f(\underline{x}, \underline{n}; t)$. El principio se expresa:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\, \underline{v}\, dV \;=\; \iiint \rho\, \underline{g}\, dV \;+\; \iint \underline{t}_n\, dS \qquad \textbf{(2. 41)}$$

2. 2.2. Principio de conservación del momentum angular.

La velocidad de cambio del momento del momentum es igual a la suma de los torques que actúan sobre el volumen.

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\, (\underline{r} \times \underline{v})\, dV \;=\; \iiint \rho\, (\underline{r} \times \underline{g})\, dV \;+\; \iint \underline{r} \times \underline{t}_n\, dS \qquad \textbf{(2. 42)}$$

2. 2.3. Tensor de esfuerzos.

Sea un tetraedro de altura h. El área de la superficie inclinada es A, con normal $\underline{n}$. La fuerza que actúa sobre A es $\underline{t}_n$. Las áreas de las caras perpendiculares a los ejes 1, 2 y 3 son: $dA_i = |\,\underline{n}_i\,|\,dA$, y las fuerzas actuantes son $\underline{t}_i$ (ver figura **2.7**).

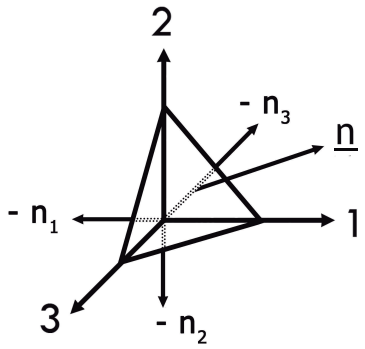


Figura **2.7**. *Tetraedro de esfuerzos*.

Aplicando la conservación de momentum lineal:

$$\iiint (\rho\,\underline{v} - \rho\,\underline{g})\,dV \;=\; \iint \underline{t}_{ntot}\,dS = A\left[\underline{t}_n - \frac{A_1}{A}\underline{t}_1 - \frac{A_2}{A}\underline{t}_2 - \frac{A_3}{A}\underline{t}_3\right]$$

Por el teorema del valor medio:

$$(\rho\,\underline{v} - \rho\,\underline{g})\,\frac{hA}{3} = A\,[\underline{t}_n - |\,\underline{n}_1|\underline{t}_1 - |\,\underline{n}_2|\underline{t}_2 - |\,\underline{n}_3|\underline{t}_3]$$

Cuando $h \to 0$, $\quad \underline{t}_n = |\,\underline{n}_1|\underline{t}_1 - |\,\underline{n}_2|\underline{t}_2 - |\,\underline{n}_3|\underline{t}_3 = \underline{t}_i(n_i)$

El i-ésimo componente de $\underline{t}_n$ es $\underline{t}_{ni}$, luego $\underline{t}_{ni} = \underline{t}_{ji}\,n_j$. Esto implica que:

$$\underline{t}_n = \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} \qquad \textbf{(2. 43)}$$

Esta descripción se puede aplicar a otra geometría, como a un cubo, como se observa en la figura **2.8**.

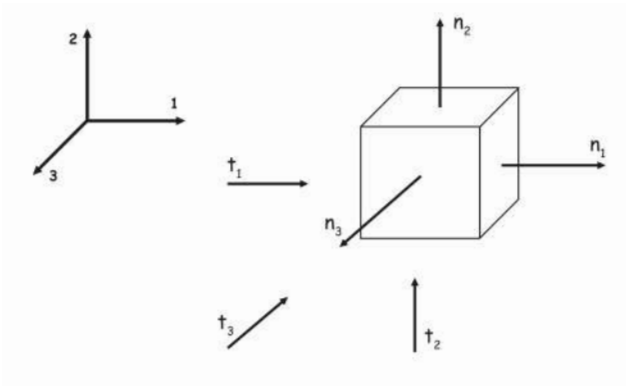


Figura **2.8**. *Balance de fuerzas en un cubo*.

El balance de fuerzas en este caso está descrito por:

$$t_1 = \tau_{11}\,|\,\underline{n}_1| + \tau_{12}\,|\,\underline{n}_2| + \tau_{13}\,|\,\underline{n}_3| \qquad \textbf{(2. 44)}$$

t_1 es el componente de la fuerza en la dirección 1, el cual incide sobre la superficie con normal $-n_1$. τ_{11} es un esfuerzo normal de compresión, el cual tiene signo negativo. τ_{12}

y τ_{13} son esfuerzos tangenciales de fricción, que resultan de la aplicación de t_1 sobre las superficies con normales n_2 y n_3. El mismo procedimiento se sigue para las componentes t_2 y t_3.

$$t_2 = \tau_{21}\,|\,\underline{n}_1| + \tau_{22}\,|\,\underline{n}_2| + \tau_{23}\,|\,\underline{n}_3| \qquad \textbf{(2. 45)}$$

$$t_3 = \tau_{31}\,|\,\underline{n}_1| + \tau_{32}\,|\,\underline{n}_2| + \tau_{33}\,|\,\underline{n}_3| \qquad \textbf{(2. 46)}$$

Las ecuaciones **2. 44** - **2. 46** pueden expresarse de forma vectorial:

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \underline{t} = \underline{\underline{\tau}}_{tot} \cdot \underline{n} \qquad \textbf{(2. 47)}$$

$\underline{\underline{\tau}}_{tot}$ incluye los esfuerzos normales τ_{11}, τ_{22} y τ_{33}, que son de compresión, y los tangenciales τ_{12}, τ_{13} y τ_{23} (y sus transpuestos) que son de fricción. Substituyendo la ecuación **2. 47** en la ecuación **2. 41**, obtenemos el balance de momentum lineal (primera ley de movimiento de Cauchy).

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\,\underline{v}\,dV = \iiint \rho\,\underline{g}\,dV + \iint \underline{\underline{\tau}}_{tot} \cdot \underline{n}\,dS \qquad \text{que por la ecuación } \textbf{2. 24} \text{ se reduce a:}$$

$$\iiint \rho\,\frac{d}{dt}\underline{v}\,dV = \iiint \rho\,\underline{g}\,dV + \iint \underline{\underline{\tau}}_{tot} \cdot \underline{n}\,dS \qquad \text{Por el teorema de la divergencia:}$$

$$\iiint \left(\rho\,\frac{d}{dt}\underline{v} - \rho\,\underline{g} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_{tot}\right) dV = 0 \qquad \text{luego:}$$

$$\rho\,\frac{d}{dt}\underline{v} = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_{tot} + \rho\,\underline{g} \qquad \textbf{(2. 48)}$$

2. 2.4. Presión hidrostática.

El tensor de esfuerzos total puede ser expresado en términos de su parte diagonal y su parte deviatórica:

$$\underline{\underline{\tau}}_{tot} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2. 49)}$$

En equilibrio $\underline{v} = 0$, los esfuerzos tangenciales de fricción son cero y un elemento de área experimenta un esfuerzo en la dirección de la normal a la superficie, independiente de la orientación. Estos esfuerzos son denominados también hidrostáticos. Esto implica que $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}$ es proporcional a $\underline{n}$ y la constante de proporcionalidad es independiente de $\underline{n}$. Esta constante es $-p$ (presión hidrostática). Luego entonces: $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = -p\underline{n}$ lo que implica que:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} \qquad \textbf{(2. 50)}$$

que a su vez implica que $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$. Luego entonces:

$$\underline{\underline{\tau}}_{tot} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \qquad \textbf{(2. 51)}$$

El esfuerzo hidrostático promedio resulta en la presión hidrostática: $\frac{1}{3}\left(tr\,\underline{\underline{\tau}}_{tot}\right) = -p$.

2. 2.5. Simetría del tensor de esfuerzos. Conservación del momento angular.

Substituyendo la ecuación **2. 47** en **2. 42**:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{v})\,dV = \iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{g})\,dV + \iint \underline{r}\times\underline{\underline{\tau}}_{tot}\cdot\underline{n}\,dS$$

Por la ecuación **2. 24** obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{v})\,dV = \iiint \rho\,\frac{d}{dt}(\underline{r}\times\underline{v})\,dV = \iiint \rho\left(\underline{r}\times\frac{d}{dt}\underline{v} + \underline{v}\times\frac{d\underline{r}}{dt}\right)dV$$

Como $\underline{v}\times\dfrac{d\underline{r}}{dt} = \underline{v}\times\underline{v} = 0$ entonces, usando el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned}\iiint \rho\left(\underline{r}\times\frac{d}{dt}\underline{v}\right)dV &= \iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{g})\,dV + \iint \underline{r}\times\underline{\underline{\tau}}_{tot}\cdot\underline{n}\,dS \\ &= \iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{g})\,dV + \iiint \nabla\cdot(\underline{r}\times\underline{\underline{\tau}}_{tot})\,dV\end{aligned}$$

La última integral se puede expresar como la suma siguiente:

$$\iiint \nabla\cdot(\underline{r}\times\underline{\underline{\tau}}_{tot})\,dV = \iiint (\underline{r}\times\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}_{tot})\,dV + \iiint (\underline{\underline{\tau}}_{tot}\times\nabla\underline{r})\,dV \qquad \text{por lo que:}$$

$$\iiint \rho\left(\underline{r}\times\frac{d}{dt}\underline{v}\right)dV = \iiint \rho\,(\underline{r}\times\underline{g})\,dV + \iiint (\underline{r}\times\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}_{tot})\,dV + \iiint (\underline{\underline{\tau}}_{tot}\times\nabla\underline{r})\,dV$$

Agrupando términos:

$$\iiint \underline{r}\times\left(\rho\,\frac{d}{dt}\underline{v} - \rho\,\underline{g} - \nabla\cdot\underline{\underline{\tau}}_{tot}\right)dV = \iiint (\underline{\underline{\tau}}\times\nabla\underline{r})\,dV$$

Por la ecuación **2. 48** (balance lineal de momentum) obtenemos: $\underline{\underline{\tau}}\times\nabla\underline{r} = 0$

El producto cruz entre dos matrices se puede expresar como el producto punto siguiente:

$\underline{\underline{\tau}}\times\nabla\underline{r} = \underline{\underline{\tau}}\times\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\tau}}^{A}\cdot\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{\tau}}^{A} = 0$ donde $\underline{\underline{\tau}}^{A}$ es la matriz antisimétrica de $\underline{\underline{\tau}}$. Luego entonces,

$$\underline{\underline{\tau}}^A = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & 0 & -\tau_{23} \\ -\tau_{31} & \tau_{32} & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \textbf{(2. 52)}$$

Lo que implica que $\underline{\underline{\tau}}$ es simétrico: $\tau_{12} = \tau_{21},\ \tau_{13} = \tau_{31},\ \tau_{23} = \tau_{32}$.
Finalmente, de la ecuación **2. 51** obtenemos: $\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}_{tot} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$

que substituyendo en la ecuación **2. 52**, surge la ecuación que agrupa los balances lineal y angular de momentum:

$$\rho \frac{d}{dt} \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g} \qquad \textbf{(2. 53)}$$

donde $\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 0 \end{pmatrix}$

En el **Apéndice D** se encuentran las expresiones de la ecuación **2. 53** en los 3 sistemas de coordenadas.

2. 3. Ecuaciones Constitutivas.

Postulados.

I. El esfuerzo ($\underline{\underline{\tau}}$) es una función continua del tensor de rapidez de deformación ($\underline{\underline{D}}$) y del estado termodinámico local, pero independiente de otras cantidades cinemáticas (vorticidad $\underline{\underline{W}}$).

II. El fluido es homogéneo, esto es, no depende de las coordenadas ($\underline{x}$). Esto implica que $\nabla \tau = 0,\ \nabla \underline{\underline{D}} = 0$.

III. El fluido es isotrópico, esto es, no tiene direcciones preferidas. Las direcciones principales del esfuerzo y rapidez de deformación coinciden, lo que implica que $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{D}})$.

IV. Cuando no existen deformaciones en el fluido ($\underline{\underline{D}} = 0$) el esfuerzo es hidrostático, o sea $\underline{\underline{\tau}}_{tot} = -p\underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{\tau}} = 0$.

2. 3.1. Fluido newtoniano.

Es el fluido en el que los componentes del esfuerzo dependen linealmente de las velocidades de deformación, siendo ésta la relación lineal más general. Matemáticamente se puede expresar esta relación de la siguiente forma:

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{\underline{D}}, \qquad \text{donde } \boldsymbol{A} \text{ es un tensor isotrópico de cuarto orden.} \qquad \textbf{(2. 54)}$$

Por la restricción de simetría en i, j, los componentes del tensor $\boldsymbol{A}$ pueden expresarse como:

$$A_{ijpq} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{pq} + \mu\,(\delta_{ip}\,\delta_{jq} + \delta_{iq}\,\delta_{jp}) \qquad \textbf{(2. 55)}$$

Luego entonces:

$$\tau_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{pq}\,D_{pq} + \mu\,\delta_{ip}\,\delta_{jq}\,D_{pq} + \mu\,\delta_{iq}\,\delta_{jp}\,D_{pq} = \lambda\,\delta_{ij}\,D_{pp} + \mu\,D_{ij} + \mu\,D_{ji}$$

$$\tau_{ij} = \lambda\,(\nabla\cdot\underline{v})\delta_{ij} + 2\,\mu\,D_{ij} \qquad o \qquad \underline{\underline{\tau}} = \lambda\,(\nabla\cdot\underline{v})\,\underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{D}} \qquad \textbf{(2. 56)}$$

Efectuando la traza de la ecuación **2. 56**:

$$0 = 3\lambda\,(\nabla\cdot\underline{v}) + 2\,\mu\,(\nabla\cdot\underline{v}) \qquad \text{de donde obtenemos la relación de Stokes:}$$

$$0 = 3\lambda + 2\,\mu \qquad \textbf{(2. 57)}$$

Substituyendo la ecuación **2. 57** en la **2. 56** obtenemos:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\underline{v})\,\underline{\underline{I}} + 2\,\mu\,\underline{\underline{D}} = -\frac{2}{3}\mu\,(\nabla\cdot\underline{v})\,\underline{\underline{I}} + \mu\,\left[\nabla\underline{v} + \nabla\underline{v}^{T}\right] \qquad \textbf{(2. 58)}$$

La ecuación **2. 58** es la ecuación constitutiva del fluido Newtoniano. Las constantes μ y λ son la viscosidad cortante y viscosidad volumétrica, respectivamente.

En el **Apéndice E** se encuentran las expresiones derivadas de la **2. 58** en los 3 sistemas de coordenadas.

2. 3.2. Ecuación de Navier-Stokes.

Esta ecuación se obtiene substituyendo la ecuación del fluido Newtoniano (**2. 58**) en la ecuación de conservación de momentum lineal (**2. 53**). Para ello, calculamos la divergencia del esfuerzo en la ecuación **2. 58**:

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu\,\nabla\,(\nabla\cdot\underline{v}) + \mu\,\left[\nabla\cdot\nabla\underline{v} + \nabla\cdot\nabla\underline{v}^{T}\right] = -\frac{2}{3}\mu\,\nabla(\nabla\cdot\underline{v}) + \mu\,\left[\nabla^{2}\underline{v} + \nabla\,(\nabla\cdot\underline{v})\right]$$

Substituyendo la divergencia del esfuerzo en la ecuación **2. 53** obtenemos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\,\frac{d}{dt}\underline{v} = -\nabla p + \frac{1}{3}\mu\,\nabla(\nabla\cdot\underline{v}) + \mu\,\nabla^{2}\underline{v} + \rho\,\underline{g} \qquad \textbf{(2. 59)}$$

Para un fluido incompresible, la ecuación **2. 59** se reduce a:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{v} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\underline{v} + \rho\,\underline{g} \qquad (\mathbf{2.\ 60})$$

donde se ha empleado la definición de derivada material.

En el **Apéndice D** se encuentran las expresiones derivadas de la **2. 60** en los 3 sistemas de coordenadas.

Para un fluido invíscido (sin viscosidad), la ecuación **2. 60** se reduce a:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{v} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right) = -\nabla p + \rho\,\underline{g} \qquad (\mathbf{2.\ 61})$$

y en equilibrio, $(\underline{v} = 0)$, obtenemos la ecuación de la hidrostática:

$$0 = -\nabla p + \rho\,\underline{g} \qquad (\mathbf{2.\ 62})$$

2. 3.3. Ecuación de la vorticidad.

Utilizando la siguiente relación vectorial: $\nabla^2\underline{v} = \nabla(\nabla\cdot\underline{v}) - \nabla\times\underline{\omega}$ (**2. 63**)

Para un fluido incompresible, substituyendo la ecuación **2. 63** en la **2. 60** obtenemos:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{v} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right) = -\nabla p - \mu\nabla\times\underline{\omega} + \rho\,\underline{g} \qquad (\mathbf{2.\ 64})$$

Conociendo que $\underline{\omega} = \nabla\times\underline{v}$, y $\underline{g} = -\nabla\Phi$, aplicamos el rotacional de la ecuación **2. 64**:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\omega} + \nabla\times\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right) = \mu\nabla\times\nabla\times\underline{\omega} = \mu\nabla^2\underline{\omega} \qquad (\mathbf{2.\ 65})$$

En el **Apéndice A**, se demuestra que la ecuación **2. 65** en flujo bidimensional se puede expresar de la siguiente forma:

$$\rho\left(\frac{d}{dt}\underline{\omega}\right) = \mu\nabla^2\underline{\omega} \qquad (\mathbf{2.\ 66})$$

2. 4. Teoría Molecular de la Viscosidad.

2. 4.1. Gases a baja densidad.

Ley de Avogadro.

A presiones iguales y temperaturas iguales, volúmenes iguales de gases contienen el mismo número de moléculas.

Considérese un gas cuyas moléculas tienen la misma masa. La presión es la fuerza por unidad de área que se aplica a un pistón para mantener el estado estacionario (ver figura **2.9**).

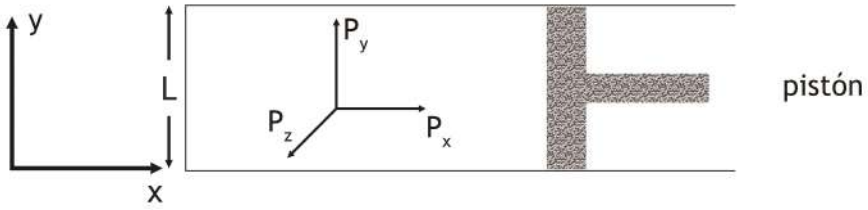


Figura **2.9**. *Moléculas de un gas colisionando con las paredes del pistón.*

La fuerza que el gas ejerce sobre el pistón es debida a la transferencia de momentum de las moléculas del gas que colisionan con el pistón. Las moléculas con momentum P_x chocan elásticamente con el pistón. El momentum se conserva, pero el sentido y su signo cambian. Los componentes P_y y P_z no cambian, porque no colisionan con el pistón.

Sea N_j el número de moléculas y v_j la velocidad de la molécula j. Si m es la masa molecular, entonces $2mv_{xj}$ es el momentum transferido al pistón:

$$\Delta p_x = \frac{1}{L^2} \sum_{j=1}^{n} \left(2mv_{xj}\right) \left(\frac{v_{xj}}{L}\right) N_j \qquad \textbf{(2. 67)}$$

$\frac{v_{xj}}{L}$ es la frecuencia de colisiones. La ecuación **2. 67** se puede expresar como:

$$\Delta p_x = \frac{2m}{L^3} \sum_{j=1}^{n} N_j \left(v_{xj}^2\right) \qquad \textbf{(2. 68)}$$

Definiendo el promedio cuadrático: $\left\langle v_x^2 \right\rangle = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} N_j \left(v_{xj}^2\right)}{\sum_j N_j}$ **(2. 69)**

Debido a que el número de moléculas que tienen dirección x es la mitad del número de moléculas con direcciones y y z, entonces $\sum_j N_j = N/2$. Substituyendo la ecuación **2. 69** en la ecuación **2. 68** obtenemos:

$$\Delta p_x = \frac{2m}{V} \frac{N}{2} \left\langle v_x^2 \right\rangle \qquad V = \text{volumen} \qquad \textbf{(2. 70)}$$

Definiendo la densidad de número $n = \frac{N}{V}$ y la densidad de masa $\rho = nm$, la ecuación **2. 70** se expresa:

$$\Delta p_x = nm \left\langle v_x^2 \right\rangle = \rho \left\langle v_x^2 \right\rangle \qquad \textbf{(2. 71)}$$

Como $\left\langle v^2 \right\rangle = \left\langle v_x^2 \right\rangle + \left\langle v_y^2 \right\rangle + \left\langle v_z^2 \right\rangle = 3 \left\langle v_x^2 \right\rangle$, entonces

$$P = \frac{1}{3} nm \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{2N}{3} \frac{E_c}{V} \qquad (E_c = \text{energía cinética promedio}) \qquad \textbf{(2. 72)}$$

2. 4.2. Distribución de Maxwell-Boltzmann.

Suposiciones:

a. En el estado de equilibrio no hay direcciones preferidas.

b. Los movimientos ortogonales son independientes entre sí.

La distribución de velocidades $f(\underline{v})$ debe ser función de v^2 y

$$f(\underline{v}) = g\left(v_x^2\right)\, g\left(v_y^2\right)\, g\left(v_z^2\right) \qquad \textbf{(2. 73)}$$

La distribución que cumple con estos requisitos se puede demostrar que tiene la forma:

$$f(\underline{v}) = C e^{-A v^2} \qquad \textbf{(2. 74)}$$

Si identificamos la temperatura del gas con su energía cinética promedio, en donde la constante de proporcionalidad es la constante de Boltzmann por un factor numérico:

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT \qquad \textbf{(2. 75)}$$

Entonces la ecuación **2. 72** toma la forma:

$$P = \frac{NkT}{V} \qquad \textbf{(2. 76)}$$

Si N es el número de Avogadro (número de moléculas por mol), entonces Nk es la constante de los gases R para dar:

$$PV = RT \qquad \textbf{(2. 77)}$$

La función de distribución **2. 74** consistente con la igualdad **2. 75** es:

$$f(\underline{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad \textbf{(2. 78)}$$

Para demostrarlo, en el **Apéndice B** se calculan los momentos de la función de distribución (ecuación **2. 78**) de tal forma que el momento cero (número de moléculas), el momento 1 (velocidad promedio molecular), el momento 2 (la igualdad entre energía cinética y energía térmica), frecuencia de colisiones y la presión (ley de los gases ideales) son:

$$\langle v^0 \rangle = \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} \qquad \textbf{(2. 79 a)}$$

$$\frac{\langle v^1 \rangle}{\langle v^0 \rangle} = \left(\frac{8kT}{\pi m} \right)^{1/2} \qquad \textbf{(2. 79 b)}$$

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v^0 \rangle} = \frac{3kT}{m} \qquad \textbf{(2. 79 c)}$$

$$Z = \frac{n \langle v \rangle}{4} \qquad \textbf{(2. 79 d)}$$

$$p = nkT = \frac{N}{V} kT \qquad \textbf{(2. 79 e)}$$

De la ecuación **2. 79 c** se deriva la ecuación **2. 75**: $\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT$, y de la ecuación **2. 79 e** se deriva la ley de los gases ideales, ecuación **2. 77**.

2. 4.3. Trayectoria libre media.

Es la distancia promedio del desplazamiento de una molécula de gas entre dos colisiones. Definiendo la masa reducida m_r como $\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, donde las masas m_1 y m_2 son las correspondientes a dos moléculas que colisionan. Si éstas son iguales, entonces $m_r = m/2$. La figura **2.10** describe la sección de colisión entre dos esferas rígidas (círculo de radio d).

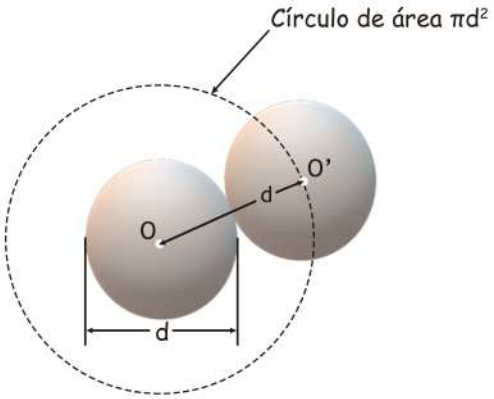


Figura **2.10**. *Sección de colisión entre dos esferas rígidas.*

Se puede describir el movimiento entre dos moléculas utilizando la definición del primer momento de la distribución (ecuación **2. 79 b**) para calcular la velocidad relativa promedio v_{rel} entre dos moléculas. El resultado es:

$$\langle v_{rel} \rangle = \left(\frac{8kT}{\pi m_r} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \langle v \rangle \qquad \textbf{(2. 80)}$$

La distancia libre media λ es la velocidad promedio dividida entre el promedio de colisiones.

$$\lambda = \frac{\langle v \rangle}{v} \tag{2. 81}$$

$$\text{donde} \quad v = \frac{\langle v_{rel} \rangle \left(\pi d^2\right) N}{V} = \sqrt{2}\,\frac{\langle v \rangle \left(\pi d^2\right) N}{V} \tag{2. 82}$$

La ecuación **2. 82** expresa que la frecuencia de colisiones es proporcional a la velocidad promedio de las moléculas entre una distancia característica (volumen/área característica).

$$\text{Luego:} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n} \tag{2. 83}$$

2. 4.4. Mecanismo de transferencia de momentum.

De acuerdo con la figura **2.11**, se considera un flujo de corte simple.

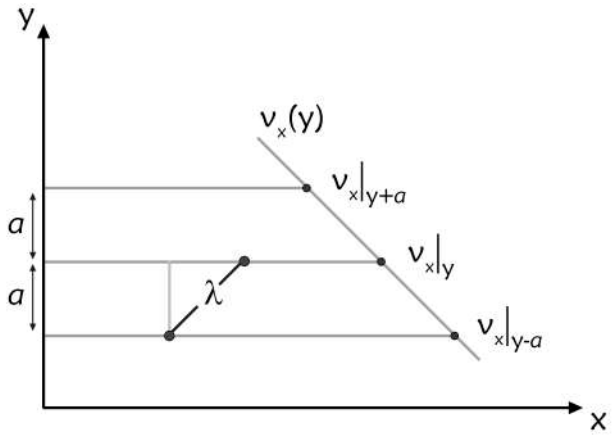


Figura **2.11**. *Transporte molecular de momentum entre superficies de corte*.

Debido al flujo en un gas, la distancia libre media es mayor que aquella bajo condiciones de equilibrio. Esto es, se puede estimar que esta distancia se incrementa entre superficies de corte adyacentes. Si la distancia entre capas de diferente velocidad es *a*, entonces la distancia libre media es aproximadamente:

$$\lambda = \frac{3}{2}a \tag{2. 84}$$

El flux de momentum es proporcional a la diferencia de velocidades entre capas de diferente velocidad en el fluido (superficies de corte).

$$\tau_{xy} = Zmv_x|_{y-a} - Zmv_x|_{y+a} \tag{2. 85}$$

El gradiente de velocidades se define de la siguiente forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v_x|_{y-a} - v_x|_{y+a}}{2a} \tag{2. 86}$$

De acuerdo a la ecuación **2. 85**, el momentum se transfiere a través de la frecuencia de colisiones Z entre capas que tienen diferente velocidad (ver ecuación **2. 79 d**). Por lo tanto, el flux de momentum resulta de la combinación de las ecuaciones **2. 85** y **2. 86**:

$\tau_{xy} = \frac{4}{3}\lambda Z m \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Substituyendo la ecuación **2. 79 d** para Z obtenemos:

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3}\lambda \frac{n}{4} m \langle v \rangle \frac{\partial v_x}{\partial y} \qquad \textbf{(2. 87)}$$

Por la ley de Newton, la viscosidad de corte es:

$$\mu = \frac{1}{3} n m \lambda \langle v \rangle = \frac{1}{3} \rho \lambda \langle v \rangle$$

La viscosidad cinemática (coeficiente de transferencia de momentum) es:

$$v = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{3}\lambda \langle v \rangle \qquad \textbf{(2. 88)}$$

Substituyendo las ecuaciones **2. 79 b** y **2. 83** en la ecuación **2. 88** obtenemos:

$$\mu = \frac{1}{3} n m \lambda \langle v \rangle = \frac{1}{3} n m \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}\frac{1}{\pi d^2}\left(\frac{mkT}{\pi}\right)^{1/2} = \frac{2}{3\pi}\frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi d^2} \qquad \textbf{(2. 89)}$$

La ecuación **2. 89** predice que la viscosidad es independiente de la presión, lo cual está de acuerdo con datos experimentales hasta una presión de 10 atm a $T > T_c$. Sin embargo, la viscosidad se incrementa más rápidamente que $T^{\frac{1}{2}}$. Es necesario, por lo tanto, introducir al modelo fuerzas de interacción intermoleculares. La teoría de Chapman-Enskog introduce un potencial intermolecular $\phi(r)$ que en moléculas no polares puede ser aproximado por el potencial de Lennard-Jones:

$$\phi(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right] \qquad \textbf{(2. 90)}$$

donde σ es el diámetro de colisiones y ε es la energía máxima de atracción intermolecular (pozo de potencial). Estos parámetros pueden ser calculados a partir de las propiedades críticas, puntos de ebullición y puntos de fusión (ver figura **2.12**).

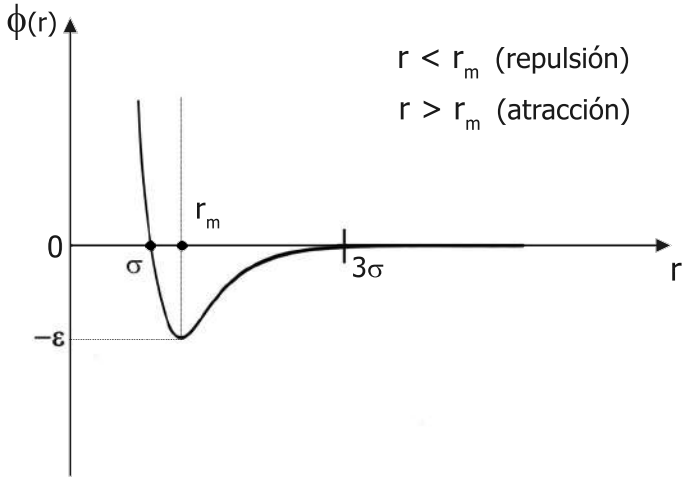


Figura **2.12**. *Gráfica del potencial de Lennard-Jones. Repulsión* $(r < r_m)$ *y atracción* $(r > r_m)$.

La viscosidad de un gas monoatómico de peso molecular M puede ser expresada en términos de los parámetros ε y σ como sigue:

$$\mu = \frac{5}{16}\frac{\sqrt{\pi m k T}}{\pi \sigma^2 \Omega_\mu} = 2.67 \times 10^{-5}\frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \qquad \textbf{(2. 91)}$$

El parámetro Ω_μ toma en cuenta desviaciones del comportamiento de esferas rígidas.

2. 4.5. Teoría molecular de la viscosidad de los líquidos.

Teoría de Eyring.

El cálculo de la viscosidad de líquidos considera que bajo flujo el arreglo molecular de un líquido considera sitios ocupados y sitios vacantes. Las moléculas se encuentran en un arreglo por capas o superficies de corte que se desplazan a diferentes velocidades, con un proceso simultáneo de desplazamientos de moléculas de sitios ocupados a sitios vacantes (ver figura **2.13**).

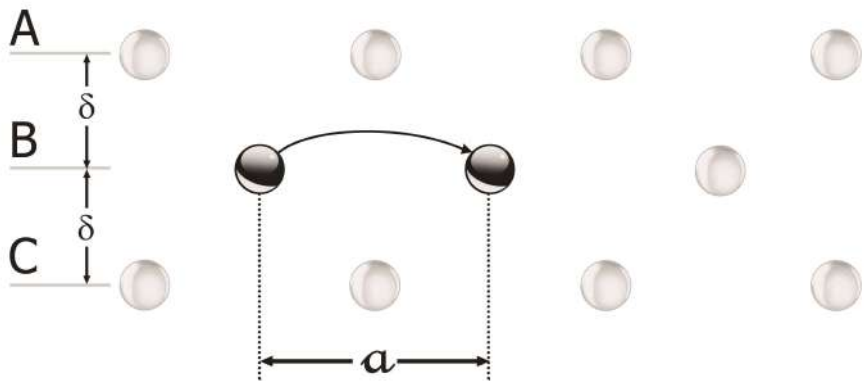


Figura **2.13**. *Arreglo molecular en un líquido bajo flujo. Una molécula determinada (círculo lleno) se desplaza a un sitio vacío recorriendo una distancia a. Las capas de fluido a diferentes velocidades se encuentran separadas una distancia* δ .

El desplazamiento molecular a sitios vacantes tiene que sobrepasar una barrera de potencial $\Delta G_0/N$, que es la energía libre de activación. La trayectoria tiene una longitud a con frecuencia de ν_m eventos por molécula. Esta frecuencia característica se define como:

$$\nu_m = \frac{kT}{h} e^{-\Delta G/RT} \qquad \textbf{(2. 92)}$$

donde h es la constante de Planck. La barrera energética y la frecuencia de desplazamiento molecular cambia cuando existe flujo externo, de acuerdo a:

$$-\Delta G = -\Delta G_0 \mp \frac{a}{\delta}\frac{\tau_{xy}\hat{V}}{2} \tag{2. 93}$$

Aquí $\tau_{xy}\hat{V}$ es la energía de flujo y $\hat{V}$ es el volumen molar. El signo positivo se asocia con un desplazamiento a favor del sentido del flujo y el negativo en contra del flujo, de tal forma que el segundo incrementa la barrera de potencial. Substituyendo la ecuación **2. 93** en **2. 92** se obtiene la frecuencia de desplazamientos:

$$\nu_m \mp = \frac{kT}{h} e^{-\Delta G_0/RT} e^{\mp\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\hat{V}/2RT} \tag{2. 94}$$

La velocidad de desplazamientos moleculares es igual a la distancia entre capas de diferente velocidad multiplicada por la frecuencia de desplazamientos positivos:

$$v_{xA} - v_{xB} = a\left(\nu_{x+} - \nu_{x-}\right) \tag{2. 95}$$

El gradiente de velocidades está expresado por:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{a\left(\nu_{x+} - \nu_{x-}\right)}{\delta} \tag{2. 96}$$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta}\frac{kT}{h} e^{-\Delta G_0/RT}\left[e^{\frac{\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\hat{V}}{2RT}} - e^{-\frac{\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\hat{V}}{2RT}}\right] = \frac{a}{\delta}\frac{kT}{h} e^{-\Delta G_0/RT}\left[2\,senh\left(\frac{\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\hat{V}}{2RT}\right)\right] \tag{2. 97}$$

Linealizando el término del seno hiperbólico:

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta}\frac{kT}{h} e^{-\Delta G_0/RT}\frac{\left(\frac{a}{\delta}\right)\tau_{xy}\hat{V}}{RT}. \quad \text{Despejando el esfuerzo: } \tau_{xy} = \frac{\delta^2}{a^2}\frac{hRT}{\hat{V}kT} e^{\Delta G_0/RT}\frac{dv_x}{dy}$$

$$\text{Por lo que la viscosidad es:} \quad \mu = \frac{\delta^2}{a^2}\frac{h\tilde{N}}{\hat{V}} e^{\Delta G_0/RT} \tag{2. 98}$$

donde $\tilde{N}$ es el número de Avogadro. El cálculo de la energía libre se puede aproximar de la siguiente forma:

$$\Delta G_0 \approx 0.408\,\Delta\hat{U}_{vap} = 0.408\left(\Delta\hat{H}_{vap} - RT_b\right) \approx 3.8\,RT_b \tag{2. 99}$$

$\Delta\hat{U}_{vap}, \Delta\hat{H}_{vap}$ y T_b son la energía interna molar de vaporización, la entalpia molar de vaporización y la temperatura de ebullición, respectivamente. Si se aproxima $\frac{\delta^2}{a^2} \approx 1$, entonces resulta:

$$\mu = \frac{h\tilde{N}}{\hat{V}} e^{3.8T_b/T} \tag{2. 100}$$

Apéndice A.

Con base a las siguientes relaciones vectoriales:

$$\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}=\frac{1}{2}\nabla(\underline{v}\cdot\underline{v})-\underline{v}\times\underline{\omega},\qquad\underline{\omega}=\nabla\times\underline{v}\tag{A-1}$$

$$\nabla\times(\underline{v}\times\underline{\omega})=\underline{v}(\nabla\cdot\underline{\omega})-\underline{\omega}(\nabla\cdot\underline{v})+\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}-\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega})\tag{A-2}$$

El rotacional de la ecuación **A-1** es:

$$\nabla\times(\underline{v}\cdot\nabla\underline{v})=-\nabla\times(\underline{v}\times\underline{\omega})\tag{A-3}$$

Substituyendo **A-2** en **A-3**:

$$\nabla\times(\underline{v}\cdot\nabla\underline{v})=-\underline{v}(\nabla\cdot\underline{\omega})+\underline{\omega}(\nabla\cdot\underline{v})-\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}+\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega}\tag{A-4}$$

$\nabla\cdot\underline{v}=0$ Flujo incompresible.

$\nabla\cdot\underline{\omega}=\nabla\cdot\nabla\times\underline{v}=0$ La divergencia del rotacional es igual a cero.

$\underline{\omega}\cdot\nabla\underline{v}=0$ En flujo bidimensional, la vorticidad es perpendicular a $\nabla\underline{v}$.

Entonces: $\nabla\times(\underline{v}\cdot\nabla\underline{v})=\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega}$

Por lo tanto, la ecuación **2. 65**:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\omega}+\nabla\times\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\right)=\mu\nabla\times\nabla\times\underline{\omega}=\mu\nabla^2\underline{\omega}$$

se reduce a:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\underline{\omega}+\underline{v}\cdot\nabla\underline{\omega}\right)=\mu\nabla^2\underline{\omega}$$ o equivalentemente:

$$\rho\frac{d\omega}{dt}=\mu\nabla^2\underline{\omega}$$ (Ecuación **2. 65**).

Apéndice B.

La solución de integrales relevantes es la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv^2/2kT}\, dv = \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(B-1)}$$

Sea un elemento de volumen en términos de las velocidades $d^3 v = v^2\, dv\, (sen\,\theta\, d\,\theta)\, d\,\phi$.

Los momentos de la función de distribución en coordenadas esféricas son:

$$\langle v^0 \rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^2\, dv\, (sen\,\theta\, d\,\theta)\, d\,\phi = 2\pi \left[\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} \qquad \textbf{(B-2)}$$

Puesto que el momento cero es el número de elementos en la distribución, los demás momentos serán normalizados por este momento.

$$\frac{\langle v^1 \rangle}{\langle v^0 \rangle} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^3\, dv\, (sen\,\theta\, d\,\theta)\, d\,\phi$$

$$= 4\pi \left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] \left[2\left(\frac{kT}{m}\right)^2\right] = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \qquad \textbf{(B-3)}$$

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v^0 \rangle} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mv^2/2kT} v^4\, dv\, (sen\,\theta\, d\,\theta)\, d\,\phi$$

$$= 2\pi \left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] \left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}\right] = \frac{3kT}{m} \qquad \textbf{(B-4)}$$

La frecuencia de colisiones z está asociada al primer momento (ver ecuación **2. 67**).

$$Z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} (v\cos\theta)\, e^{-mv^2/2kT} v^2\, dv\, (sen\,\theta\, d\,\theta)\, d\,\phi$$

$$= n\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta\, sen\,\theta\, d\,\theta \int_0^{\infty} v^3\, e^{-mv^2/2kT}\, dv$$

$$= n\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right] 2\pi \left(\frac{1}{2}\right) \left[2\left(\frac{kT}{m}\right)^2\right] = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2}$$

donde $v\cos\theta$ es la dirección de la velocidad proyectada sobre el eje z (el eje de la esfera). La relación del número de colisiones con el primer momento es:

$$Z = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} = \frac{n}{4}\left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = \frac{n}{4}\langle v\rangle \qquad \textbf{(B-5)}$$

La presión está relacionada con el segundo momento de la distribución (ver ecuación **2. 72**) a lo largo de un eje (el eje de la esfera):

$$p = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}(mv^2\cos^2\theta)\,e^{-mv^2/2kT}\,v^2\,dv\,(sen\,\theta\,d\theta)\,d\phi$$

$$= nm\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,sen\,\theta\,d\theta\int_0^{\infty}v^4\,e^{-mv^2/2kT}\,dv$$

$$= 2\pi nm\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\frac{1}{3}\left[\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}\right]$$

Así, $\qquad p = nkT \qquad \textbf{(B-6)}$

Las anteriores relaciones se pueden también obtener en coordenadas cartesianas:

$$\langle v_x^2\rangle = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}v_x^2\,e^{-mv^2/2kT}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$= \left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\int_0^{\infty}v_x^2\,e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-mv_y^2/2kT}\,dv_y\int_{-\infty}^{\infty}e^{-mv_z^2/2kT}\,dv_z$$

$$= \left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\left[\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right] = \frac{kT}{m} \qquad \textbf{(B-7)}$$

El resultado de la ecuación **B-7** $\left(m\langle v_x^2\rangle = kT\right)$ es consistente con la ecuación **2. 72**,

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle$$

La frecuencia de colisiones en coordenadas cartesianas:

$$Z = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} v_x e^{-mv^2/2kT}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$= n\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\int_{0}^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2/2kT}\,dv_y\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2/2kT}\,dv_z$$

$$= n\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\left[\frac{kT}{m}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right]$$

$$= n\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\right]\left[\frac{kT}{m}\right] = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{1/2} = \frac{n\langle v\rangle}{4}$$

(B-8)

Cálculo de la presión en coordenadas cartesianas:

$$p = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} (mv_x^2)\,e^{-mv^2/2kT}\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

$$= nm\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\int_{0}^{\infty} v_x^2 e^{-mv_x^2/2kT}\,dv_x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2/2kT}\,dv_y\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2/2kT}\,dv_z$$

$$= nm\left[\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\right]\left[\sqrt{2\pi}\left(\frac{kT}{m}\right)^{3/2}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right]\left[\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}\right] = nkT$$

(B-9)

Comparando las ecuaciones **B-7** y **B-9**:

$p = nm\langle v_x^2\rangle$, que es la ecuación **2. 71**

Apéndice C.

Balance de masa o ecuación de continuidad.

Coordenadas rectangulares (x, y, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \textbf{(C-1)}$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad \textbf{(C-2)}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta\, sen\,\theta) + \frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\rho v_\phi\right) = 0 \qquad \textbf{(C-3)}$$

Apéndice D.

Balance de momentum. Ecuación de movimiento.

Coordenadas cartesianas, en términos de τ:

Componente - x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho g_x \quad \textbf{(D-1)}$$

Componente - y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}+\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho g_y \quad \textbf{(D-2)}$$

Componente - z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \quad \textbf{(D-3)}$$

En términos del gradiente de velocidades, para un fluido newtoniano con ρ y μ constantes:
Componente - x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x \quad \textbf{(D-4)}$$

Componente - y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \quad \textbf{(D-5)}$$

Componente - z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z \quad \textbf{(D-6)}$$

Coordenadas cilíndricas, en términos de τ:

Componente - r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right)+\rho g_r \qquad \textbf{(D-7)}$$

Componente - θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right)+\rho g_\theta \qquad \textbf{(D-8)}$$

Componente - z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial z}+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right)+\rho g_z \qquad \textbf{(D-9)}$$

En términos del gradiente de velocidades, para un fluido newtoniano con ρ y μ constantes:

Componente - r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]+\rho g_r \qquad \textbf{(D-10)}$$

Componente - θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right)+\rho g_\theta \qquad \textbf{(D-11)}$$

Componente - z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]+\rho g_z \qquad \textbf{(D-12)}$$

Coordenadas esféricas, en términos de τ:

Componente - r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr})+\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{r\theta}\,sen\,\theta)+\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi}-\frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r}\right)+\rho\,g_r$$

(D-13)

Componente - θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\,cot\,\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\theta})+\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta\theta}\,sen\theta)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}-\frac{cot\,\theta}{r}\tau_{\phi\phi}\right)+\rho\,g_\theta$$

(D-14)

Componente - ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_\phi\,v_r}{r}+\frac{v_\theta\,v_\phi}{r}\,cot\,\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\phi})+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta}+\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi}+\frac{2\,cot\,\theta}{r}\tau_{\theta\phi}\right)+\rho\,g_\phi$$

(D-15)

En términos del gradiente de velocidades, para un fluido newtoniano con ρ y μ constantes:

Componente - r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}-\frac{v_\theta^2+v_\phi^2}{r}\right)$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\nabla^2 v_r-\frac{2}{r^2}v_r-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{2}{r^2}v_\theta\,cot\,\theta-\frac{2}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho\,g_r \tag{D-16}$$

Componente - θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}+\frac{v_r v_\theta}{r}-\frac{v_\phi^2\,cot\,\theta}{r}\right)$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\mu\left(\nabla^2 v_\theta+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta}{r^2\,sen^2\,\theta}-\frac{2\,cos\,\theta}{r^2\,sen^2\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right)+\rho\,g_\theta \tag{D-17}$$

Componente - ϕ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta}+\frac{v_\phi}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}+\frac{v_\phi\,v_r}{r}+\frac{v_\theta\,v_\phi}{r}\,cot\,\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}+\mu\left(\nabla^2 v_\phi-\frac{v_\phi}{r^2\,sen^2\,\theta}+\frac{2}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi}+\frac{2\,cos\,\theta}{r^2\,sen^2\,\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right)+\rho\,g_\phi \tag{D-18}$$

En éstas ecuaciones,

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{r^2\,sen^2\,\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)$$

Apéndice E.

El fluido newtoniano. Componentes del tensor de esfuerzos.

Coordenadas cartesianas. (x, y, z):

$$\tau_{xx} = \mu \left[2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad \textbf{(E-1)}$$

$$\tau_{yy} = \mu \left[2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad \textbf{(E-2)}$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot v) \right] \quad \textbf{(E-3)}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad \textbf{(E-4)}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad \textbf{(E-5)}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \quad \textbf{(E-6)}$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \textbf{(E-7)}$$

Coordenadas cilíndricas, (r, θ, z):

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-8}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-9}$$

$$\tau_{zz} = \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-10}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \tag{E-11}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \tag{E-12}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \tag{E-13}$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{E-14}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ):

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-15}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-16}$$

$$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r\,sen\,\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta\, cot\,\theta}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \right] \tag{E-17}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \tag{E-18}$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \mu \left[\frac{sen\,\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{sen\,\theta} \right) + \frac{1}{r\,sen\,\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \tag{E-19}$$

$$\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} = \mu \left[\frac{1}{r\,sen\,\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right] \tag{E-20}$$

$$(\nabla \cdot v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_r \right) + \frac{1}{r\,sen\,\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(v_\theta\, sen\,\theta \right) + \frac{1}{r\,sen\,\theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \tag{E-21}$$

Tarea 2

1. **Cálculo de la viscosidad de un gas denso.** (Problema 1A.1, Bird et al.)

   Estimar la viscosidad del nitrógeno a $68°F$ y 1000 *psig* por medio de la figura **2.14**. Las temperatura, presión y viscosidad críticas son, respectivamente: 126.2 K, 33.5 atm y 0.00018 $g/cm\,s$. Dar el resultado en unidades de $^{lb_m}/_{ft\cdot s}$.

   Respuesta: $1.4\times10^{-5}\,{}^{lb_m}/_{ft\cdot s}$.

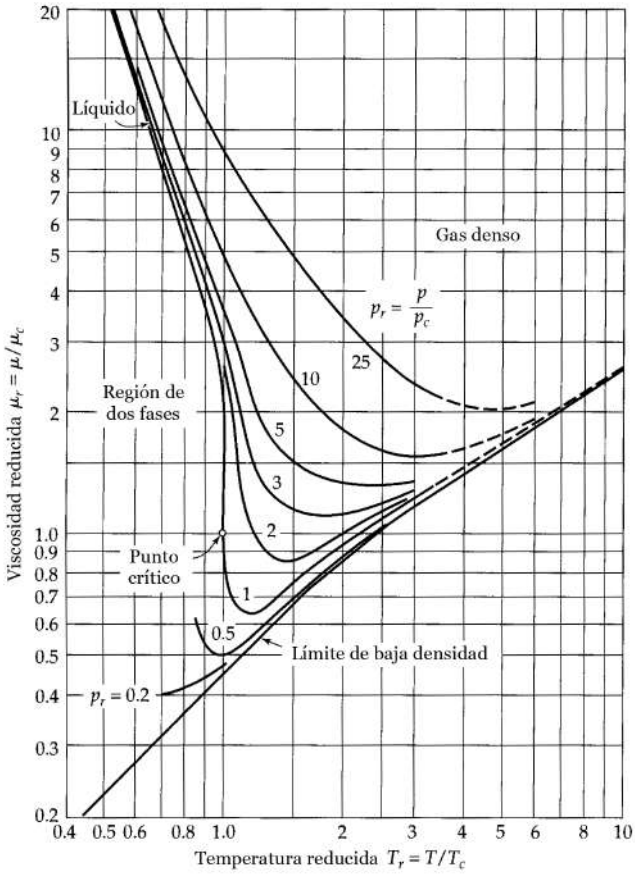


Figura **2.14**. *Viscosidad reducida* $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_c}$ *como función de la temperatura reducida* $T_r = \frac{T}{T_c}$ *para varios valores de la presión reducida* $p_r = \frac{p}{p_c}$.

2. **Cálculo de las viscosidades de gases a baja densidad.** (Problema 1A.3, Bird et al.)

   Predecir las viscosidades de oxígeno molecular, nitrógeno y metano a $20°C$ y presión atmosférica. Expresar el resultado en *mPas*. Comparar los resultados con los datos experimentales.

   Los parámetros moleculares para el oxígeno son: $\sigma = 3.433$ Å y $\varepsilon/K = 113\ K$, la integral de colisión $(\Omega\mu)$ es 1.086. Para el nitrógeno son: $\sigma = 3.667$ Å y $\varepsilon/K = 99.8\ K$, la integral de colisión $(\Omega\mu)$ es 1.0447. Para el metano son: $\sigma = 3.78$ Å y $\varepsilon/K = 154\ K$, la integral de colisión $(\Omega\mu)$ es 1.197.

   Respuestas: 0.0202, 0.0172, 0.0107 $mPa\cdot s$.

3. **Viscosidades de mezclas de gases a baja densidad.** (Problema 1A.4, Bird et al.)

Los siguientes datos de viscosidades de mezclas de hidrógeno y freón-12 (diclorofluorometano) a $25^\circ C$ y $1\,atm$:

Fracción molar de H_2	0	0.25	0.50	0.75	1.0
$\mu \times 10^6$ poises	124	128.1	131.9	135.1	88.4

Utilizar las viscosidades de los componentes puros para calcular las viscosidades de las 3 composiciones intermedias por medio de las ecuaciones:

$$\mu_{mix} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{x_\alpha \mu_\alpha}{\sum_\beta x_\beta \Phi_{\alpha\beta}}$$

en el que las cantidades adimensionales $\Phi_{\alpha\beta}$ son

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}\right)^{1/2} \left(\frac{M_\beta}{M_\alpha}\right)^{1/4}\right]^2$$

4. **Cálculo de viscosidades de líquidos.** (Problema 1A.6, Bird et al.)

Estimar la viscosidad de agua líquida saturada a $0^\circ C$ y a $100^\circ C$ por medio de:

a) Ecuación **2. 98**, con $\Delta \hat{U}_{vap} = 897.5\, BTU/lb_m$ a $100^\circ C$

b) Ecuación **2. 100**. Comparar los resultados con los valores experimentales: a $0^\circ C$ es 1.787 y a $100^\circ C$ es 0.28.

Respuestas: b) $4\,cp$, $0.95\,cp$.

5. **Velocidad molecular y trayectoria libre media.** (Problema 1A.7, Bird et al.)

Calcular la velocidad molecular promedio $\overline{u}$ (en $^{cm}/_{s}$) y la trayectoria libre media λ (en cm) para el oxígeno a $1\,atm$ y $273.2\,K$. El valor de d es $3\mathring{A}$. ¿Cuál es la relación entre la trayectoria libre media y el diámetro molecular bajo estas condiciones? ¿Cuál sería la relación en el estado líquido?

Respuestas:

$\overline{u} = 4.25 \times 10^4\ ^{cm}/_{s}$.

$\lambda = 9.3 \times 10^{-6}\ cm$.

Capítulo 3

Balances Diferenciales

En este capítulo se analizarán varios tipos de flujos de fluidos Newtonianos isotérmicos. El análisis comprende 5 tipos de flujos: por arrastre, por gravedad, por presión, flujos radiales y aquellos con simetría esférica.

Los flujos por arrastre son producidos por el movimiento de las fronteras del sistema y se han utilizado para medir la viscosidad de los fluidos en dispositivos controlados, denominados viscosímetros. Se describirán 4 tipos de flujos viscosimétricos: placas paralelas, cilindros concéntricos, discos paralelos y cono-plato.

3. 1. Viscosimetría.

3. 1.1. Viscosímetro de placas paralelas.

Considérese un líquido Newtoniano incompresible en la región entre dos placas separadas una distancia h, de acuerdo a la figura **3.1**. La placa superior se mueve a una velocidad constante U y la placa inferior permanece estática. El flujo es estacionario independiente del tiempo. Se puede considerar que en estos flujos el gradiente de presión en la dirección del movimiento es cero. Se tiene como objetivo calcular la fuerza de arrastre y a partir de ella medir la viscosidad del líquido.

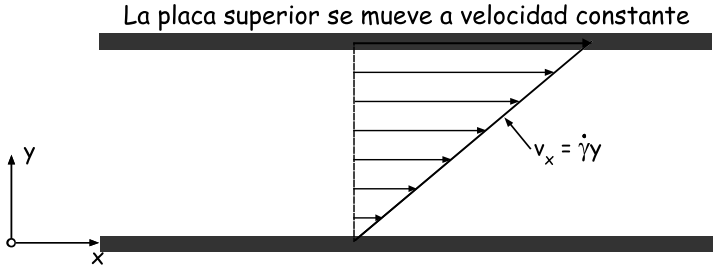


Figura **3.1**. *Geometría de placas paralelas separadas una distancia h. La placa superior se mueve con una velocidad constante U.*

El vector velocidad en este caso es $\underline{v} = (v_x(y), 0, 0)$ **(3. 1)**

Con condiciones de frontera: $v_x|_{y=0} = 0$ y $v_x|_{y=h} = U$ **(3. 2)**

La ecuación de continuidad para fluidos incompresibles es $\nabla \cdot \underline{v} = 0$,

que en coordenadas cartesianas implica que $$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(3. 3)}$$

por lo que $v_x = v_x(y)$. La ecuación de Navier-Stokes (ecuación de movimiento) contiene 3 ecuaciones escalares para los componentes de la presión, velocidad y esfuerzo en las 3 direcciones cartesianas.

Eje x: $\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$, debido a que $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ **(3. 4)**

Eje y: $-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g = 0$, que podemos integrar para obtener: $\Delta p = \rho g \Delta y$ **(3. 5)**

Eje z: $-\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ **(3. 6)**

Por lo tanto, el gradiente de presión es $\nabla p = (0, \rho g, 0)$. La ecuación **3. 5** corresponde a la presión hidrostática. La resolución de la ecuación **3. 4** con las condiciones **3. 2** nos da el perfil de velocidades:

$v_x = C_1 y + C_2$ Aplicando las condiciones **3.2** obtenemos: $0 = C_1(0) + C_2$ y

$U = C_1(h) + C_2$. Substituyendo las constantes en la ecuación anterior:

$$v_x = \frac{U}{h} y \qquad \textbf{(3. 7)}$$

que nos describe un perfil lineal de velocidades.

La ecuación del fluido Newtoniano es $\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu \frac{U}{h}$ **(3. 8)**

Es ahora posible calcular el flujo volumétrico y la fuerza de arrastre.

$$Q = \iint \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \int_0^w \int_0^h v_x n_x dy dz = \frac{U}{h} w \int_0^h y dy = \frac{1}{2} U w h \qquad \textbf{(3. 9)}$$

donde wh es el área de flujo. Se puede calcular la velocidad promedio $\langle v_x \rangle$. Esto es

$$\langle v_x \rangle = \frac{Q}{S} = \frac{1}{2} U \qquad \textbf{(3. 10)}$$

que corresponde a un flujo tapón con velocidad $\frac{U}{2}$. El área del perfil lineal $\left(\frac{Uh}{2}\right)$ es la misma que la de un flujo tapón con velocidad $\frac{U}{2}$. La fuerza de arrastre o de fricción es:

$$F_x = \iint \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS = \int_0^w \int_0^L \tau_{xy} n_y dx dz = \mu \frac{U}{h} (wL) \qquad \textbf{(3. 11)}$$

donde wL es el área de cada placa. La fuerza de arrastre se puede medir por medio de un dinamómetro, en donde la fuerza es proporcional a la deflexión $F_x = k_r \Delta x$, donde k_r es la constante elástica. La viscosidad se mide a partir de una curva de regresión de la deflexión en función de U, en donde μ es la pendiente de la curva.

Otro método.

Se puede utilizar el balance de momentum lineal en términos de las componentes del esfuerzo, en donde los componentes cartesianos del esfuerzo son, para cada eje:

Eje x: $0 = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$

Eje y: $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g$

Eje z: $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

Pero $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = 0$ por la ecuación **3. 3**, recobrando las ecuaciones **3. 4** - **3. 6** al usar la ecuación **3. 8**.

La figura **3.2** muestra la curva de regresión de la deflexión en función de la velocidad (ecuación **3. 11**).

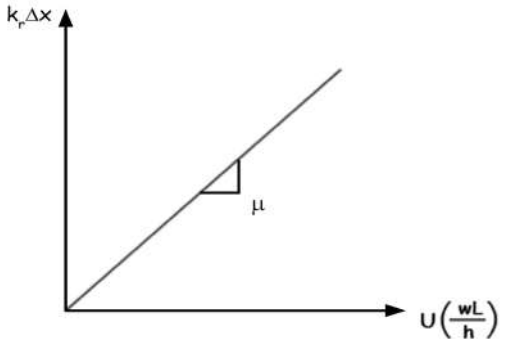


Figura **3.2**. *Curva de regresión para cálculo de la viscosidad.*

3. 1.2. Flujo torsional entre dos cilindros concéntricos. Viscosímetro de Couette.

Como se muestra en la figura **3.3**, el movimiento rotatorio del líquido causa un torque inducido sobre el cilindro interior debido al movimiento del cilindro exterior.

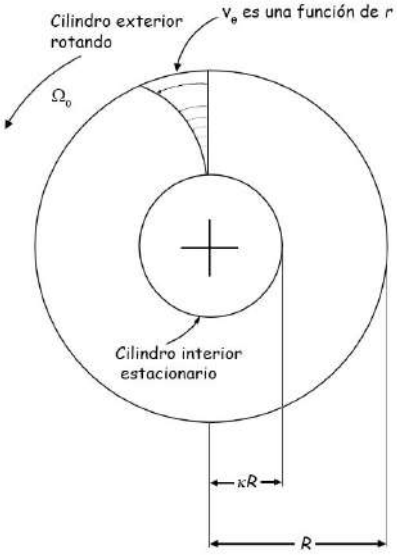


Figura **3**.3. *Vista del plano $r - \theta$ de un sistema de cilindros concéntricos.*

El torque es debido a la transferencia de momentum en el fluido que es medido por la deflexión de un dinamómetro con constante de torsión k_r. El desplazamiento angular es proporcional a la viscosidad a determinada velocidad angular Ω_0. El fluido es incompresible y a régimen permanente. El vector velocidad es:

$$\underline{v} = (0, v_\theta(r), 0) \qquad \textbf{(3. 12)}$$

Como es flujo por arrastre, $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$. La ecuación de continuidad $\nabla \cdot \underline{v} = 0$, implica que:

$$\frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = 0. \qquad \textbf{(3. 13)}$$

Los 3 componentes de la ecuación de movimiento son:

$$\text{Eje r:} \quad -\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \textbf{(3. 14)}$$

$$\text{Eje } \theta\text{:} \quad 0 = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right] \qquad \textbf{(3. 15)}$$

$$\text{Eje z:} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \qquad \textbf{(3. 16)}$$

$$\text{El gradiente de presión es:} \quad \nabla p = \left(\rho \frac{v_\theta^2}{r}, 0, -\rho g\right) \qquad \textbf{(3. 17)}$$

La resolución de la ecuación **3. 15** nos da el perfil de velocidades $v_\theta(r)$ que substituyéndolo en la ecuación **3. 14** describe la variación de la presión por la fuerza centrípeta. Integrando **3. 15** obtenemos:

$C_1 = \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta)\right]$, lo que resulta en la ecuación general al integrar de nuevo:

$v_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$.

$$\text{con condiciones de frontera:} \quad v_\theta|_{r=\kappa R} = 0 \quad \text{y} \quad v_\theta|_{r=R} = R\Omega_0 \qquad \textbf{(3. 18)}$$

La solución particular es:

$$v_\theta = \frac{\Omega_0 R}{\left(\frac{1}{\kappa} - \kappa\right)}\left(\frac{r}{\kappa R} - \frac{\kappa R}{r}\right) \qquad \textbf{(3. 19)}$$

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr}\frac{v_\theta}{r} = 2\mu\Omega_0 \frac{R^2}{r^2}\frac{\kappa^2}{1-\kappa^2} \qquad \textbf{(3. 20)}$$

El torque en el cilindro interior está dado por:

$$|T|_\theta = \iint \left|\underline{r} \times \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}\right)\right| dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} r\, \tau_{r\theta} n_r r\, d\theta\, dz = 2\mu\Omega_0 (2\pi L) R^2 \frac{\kappa^2}{1-\kappa^2}$$

$$= (R\kappa)(2\pi R \kappa L)(2\mu\Omega_0)\frac{1}{1-\kappa^2} \qquad \textbf{(3. 21)}$$

La ecuación **3. 21** describe que el torque = (brazo de palanca) (área del cilindro interior) (esfuerzo cortante). El esfuerzo en la ecuación **3. 20** es función de r^{-2}. Sin embargo, se puede aproximar a un esfuerzo constante en el límite $\kappa \to 1$. Esto es:

$$\tau_{r\theta}\big|_{\kappa\to 1} = \mu \frac{\Omega_0 R}{(1-\kappa)R} \qquad \textbf{(3. 22)}$$

Comparando la ecuación **3. 22** con la ecuación **3. 8**, $U = \Omega_0 R$, $h = R - \kappa R$. Así, se aproxima a un flujo de corte simple. El torque en este caso sería:

$$\frac{\frac{|T|_\theta}{R}}{2\pi RL} = \mu \frac{\Omega_0}{(1-\kappa)} \qquad \text{donde: } |T|_\theta = k_r \Delta\theta \text{ (}\theta \textit{ es la deflexión angular)} \qquad \textbf{(3. 23)}$$

que tiene la misma forma de la ecuación del fluido Newtoniano.

El otro caso límite es cuando $\kappa \to 0$ (no existe el cilindro interior). El movimiento del fluido es ahora rotacional, sin corte (movimiento de cuerpo sólido). En este caso, la ecuación **3. 19** se reduce a:

$$v_\theta = \Omega_0 r \qquad \textbf{(3. 24)}$$

Los gradientes de presión son (ecuaciones **3. 14** y **3. 16**):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega_0^2 r, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \textbf{(3. 25)}$$

Integrando: $$\int_{p_{atm}}^{p} dp = \int \frac{\partial p}{\partial r} dr + \int \frac{\partial p}{\partial z} dz = \int_0^r \rho \Omega_0^2 r\, dr - \rho g \int_{z_0}^{z} dz$$

$$p - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho \Omega_0^2 r^2 - \rho g (z - z_0) \qquad \textbf{(3. 26)}$$

En la interfase $P = P_{atm}$, la ecuación **3. 26** se reduce a: $z - z_0 = \frac{\Omega_0^2}{2g} r^2$ **(3. 27)**

Por lo que la superficie es parabólica (ver Figura **3.4**).

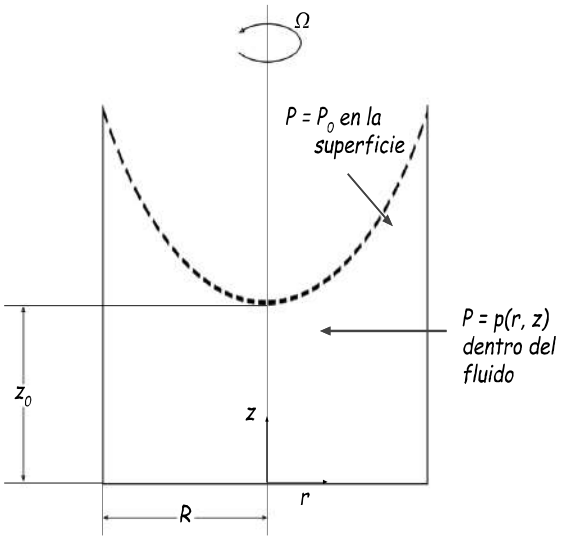


Figura **3.4**. *Fluido en rotación uniforme*.

3. 1.3. Viscosímetro de discos paralelos.

En este aparato el disco superior se mueve a una velocidad angular constante Ω_0 que causa un torque debido a la transferencia de momentum en el fluido (ver figura **3.5**). El disco inferior estático detecta el torque por medio de un dinamómetro con constante $k\,r$.

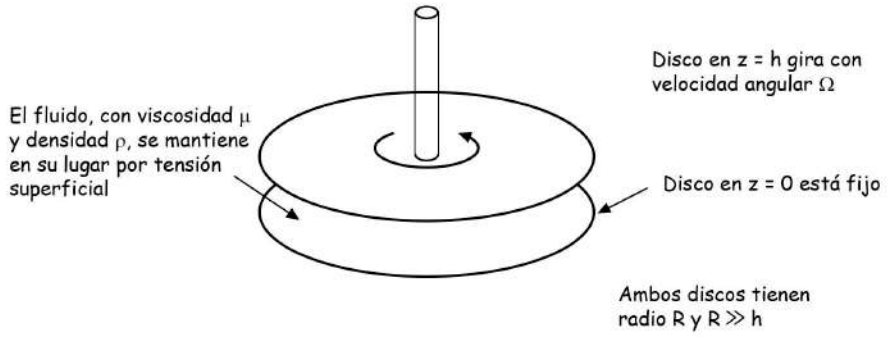


Figura **3.5**. *Viscosímetro de discos paralelos.*

El vector velocidad es: $\underline{v} = (0,\, v_\theta\,(r, z),\, 0)$ **(3. 28)**

Con condiciones de frontera en z: $v_\theta|_{z=0} = 0 \quad y \quad v_\theta|_{z=h} = r\,\Omega_0$ **(3. 29)**

Consideremos flujo estacionario, en el que $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$. Con respeto a la distancia radial, la condición en el disco superior (ecuación **3. 29**) indica que $v_\theta|_{r=0} = 0$ y $v_\theta|_{r=R} = R\,\Omega_0$. Por esto, existen dos gradientes de velocidad $\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$ y $\frac{\partial v_\theta}{\partial z}$. Las consideraciones sobre la geometría requieren que $R \gg h$, por lo que $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \approx \frac{R\Omega_0}{R}$ y $\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \approx \frac{R\Omega_0}{h}$ implica que $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \ll \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$.

Y por la ley de Newton $\tau_{\theta z} \gg \tau_{\theta r}$, por lo que el esfuerzo dominante es:

$$\tau_{\theta z} = \mu\,\frac{\partial\, v_\theta}{\partial\, z} \qquad \textbf{(3. 30)}$$

La ecuación de continuidad indica que: $\dfrac{\partial\, v_\theta}{r\,\partial\,\theta} = 0$ **(3. 31)**

Las ecuaciones de movimiento en las 3 coordenadas son:

$$\rho\,\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial\, p}{\partial\, r} \qquad \textbf{(3. 32)}$$

$$0 = \mu\,\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\, z^2} \qquad \textbf{(3. 33)}$$

$$0 = -\frac{\partial\, p}{\partial\, z} - \rho\, g \qquad \textbf{(3. 34)}$$

Integrando la ecuación **3. 33** obtenemos: $v_\theta = C_1\, z + C_2$, sujeta a las condiciones (**3. 29**). Aplicándolas, obtenemos dos ecuaciones algebraicas: $0 = C_1\,(0) + C_2$, $r\,\Omega_0 = C_1\, h + C_2$ de donde podemos determinar las constantes. El perfil de velocidades obtenido es:

$$v_\theta = \frac{r\,\Omega_0}{h}\, z \qquad \textbf{(3. 35)}$$

Este perfil satisface la condición geométrica de que el gradiente radial sea cero. Esto es:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right] = 0. \text{ El esfuerzo cortante es:} \quad \tau_{\theta z} = \mu\,\frac{r\Omega_0}{h} \tag{3. 36}$$

El torque en el disco inferior es:

$$|T|_\theta = \iint \left|\underline{r} \times \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n}\right)\right| dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,\tau_{\theta z} n_z\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\frac{\mu}{h}\Omega_0 \int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2h}\mu\,\Omega_0$$

$$\frac{\frac{|T|_\theta}{R}}{\pi\frac{R^2}{2}} = \mu\frac{R\Omega_0}{h} \tag{3. 37}$$

Que es a su vez similar a la ecuación **3. 11** de flujo de corte simple.

3. 1.4. Viscosímetro de cono y plato.

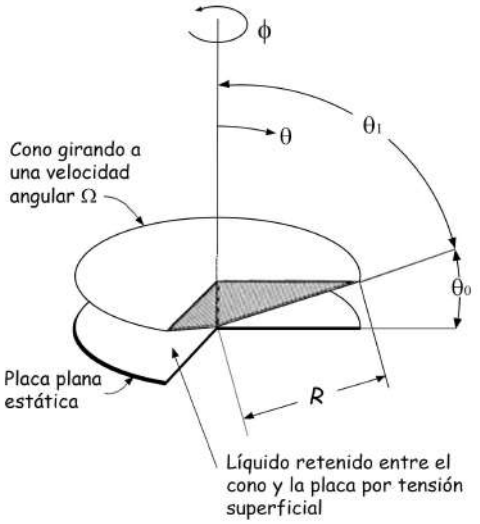


Figura **3.6**. *Viscosímetro de cono y plato. El cono gira a una velocidad angular Ω_0 constante, el radio de ambos es R y el ángulo entre el cono y el plato es θ_0.*

En esta geometría el fluido se encuentra en el espacio entre el cono y el plato. El disco estático se encuentra conectado a una barra de torsión de constante k_r. El líquido tiene un perfil esférico en un sector con ángulo θ_0. El vector velocidad en coordenadas esféricas es:

$$\underline{v} = (0,\, 0,\, v_\phi\,(r, \theta)) \tag{3. 38}$$

Que implica dos gradientes característicos: $\frac{\partial v_\phi}{\partial r}$ y $\frac{\partial v_\phi}{r\partial\theta}$. La consideración geométrica en este caso es que $R \gg \theta_0 R$, donde $\theta_0 R$ es el arco entre el disco y el cono cuando $r = R$. Esto implica que $\theta_0 \ll 1$, y por lo tanto en la región del fluido $\operatorname{sen}\theta \approx 1$. Las condiciones de frontera son:

$$v_\phi\,|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{y} \quad v_\phi\,|_{\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_0} = \Omega_0 r \operatorname{sen}\theta \approx \Omega_0 r \tag{3. 39}$$

La ecuación de continuidad es: $$\frac{\partial v_\phi}{r\partial\phi} = 0 \tag{3. 40}$$

Las consideraciones geométricas requieren, puesto que

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial r} \approx \frac{R\Omega_0}{R} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v_\phi}{r\partial\theta} \approx \frac{R\Omega_0}{R\theta_0} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{\partial v_\phi}{r\partial\theta} \gg \frac{\partial v_\phi}{\partial r},$$

por lo que el componente del esfuerzo dominante es:

$$\tau_{\theta\phi} = \mu \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{r\operatorname{sen}\theta}\right) \approx \mu\frac{\partial v_\phi}{r\partial\theta} \tag{3. 41}$$

Las ecuaciones del balance lineal de momentum en términos del esfuerzo son:

$$\rho\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \tag{3. 42}$$

$$0 = \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{r\partial\theta} \tag{3. 43}$$

$$0 = \frac{\partial p}{r\partial\theta} + \rho g_\theta \tag{3. 44}$$

La ecuación **3. 43** implica que la componente del esfuerzo es constante:

$$\tau_{\theta\phi} = C_1 \tag{3. 45}$$

Que substituyendo en la ecuación **3. 41** obtenemos: $\frac{v_\phi}{r} = C_1\theta + C_2$ que junto con las condiciones de frontera se obtienen las ecuaciones algebraicas siguientes:

$0 = C_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2$, $\quad r\Omega_0 = C_1\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) + C_2$ de donde se obtiene el perfil de velocidades:

$$\frac{v_\phi}{r} = \frac{\Omega_0}{\theta_0}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{3. 46}$$

El esfuerzo cortante se calcula con la ecuación **3. 41**: $\quad \tau_{\theta\phi} = \mu\frac{\Omega_0}{\theta_0}$ **(3. 47)**

Cálculo del torque:

$$|T|_\phi = \int_0^R\int_0^{2\pi}(r\operatorname{sen}\theta)\,\tau_{\theta\phi}\,n_\theta\,dr\,(r\operatorname{sen}\theta)d\phi \approx 2\pi\int_0^R \tau_{\theta\phi}\,r^2\,dr$$

$$|T|_\phi = \frac{2}{3}\pi\mu\frac{\Omega_0}{\theta_0}R^3 \quad \text{o expresado como la ley de Newton:} \quad \frac{\frac{|T|_\phi}{R}}{3\pi R^2/2} = \mu\frac{R\Omega_0}{R\theta_0} \tag{3. 48}$$

La ecuación **3. 48** es similar a flujo de corte simple, donde el esfuerzo cortante es constante (ecuación **3. 8**).

3. 2. Flujos por Gravedad.

3. 2.1. Flujo en una película descendente.

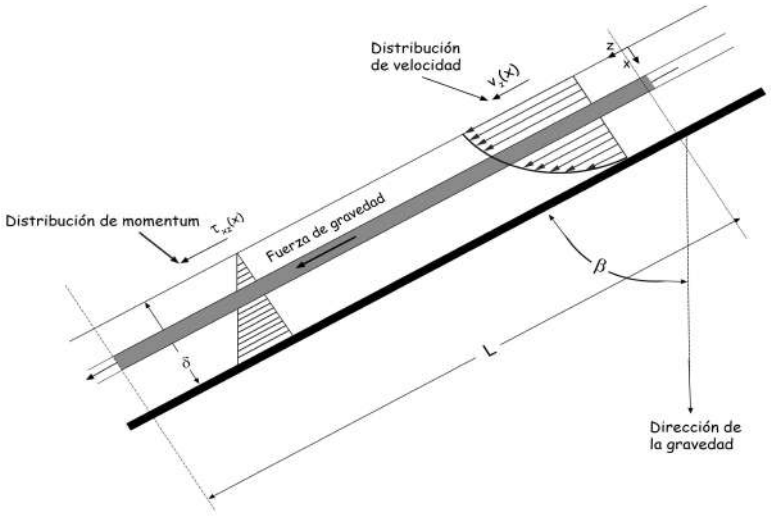


Figura **3.7.** *Flujo de una película descendente en un plano inclinado, con un ángulo* β *respecto a la vertical. La vista es transversal y el plano tiene una anchura w y longitud L. El grosor de la película es* δ .

Considerar la región de flujo desarrollado lejos de la entrada del fluido. El vector velocidad es:

$$\underline{v} = (0,\ 0,\ v_z(x)) \qquad \textbf{(3. 49)}$$

Con condiciones de frontera $v_z|_{x=\delta} = 0$ y $\tau_{zx}|_{x=0} = 0$ (interfase aire-líquido). Esta condición implica que la fricción en la interfase es despreciable. Igualmente, esto implica

que el gradiente $$\left.\frac{\partial v_z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \textbf{(3. 50)}$$

Por lo que el máximo en la velocidad se ubica en la interfase.

En coordenadas cartesianas, la ecuación de continuidad es: $$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(3. 51)}$$

El esfuerzo cortante es: $$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \qquad \textbf{(3. 52)}$$

Se considera que $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, porque el movimiento es causado por la gravedad.

Las ecuaciones de momentum lineal en término del esfuerzo son:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \operatorname{sen}\beta$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$0 = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho g \cos\beta \qquad \textbf{(3. 53)}$$

Integrando la ecuación **3. 53**:

$\tau_{xz} = -(\rho g \cos\beta) x + C_1$ Como $\tau_{xz}|_{x=0} = 0$, entonces $C_1 = 0$

Substituyendo el esfuerzo en la ecuación **3. 52**, podemos integrar la siguiente ecuación:

$$\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} = -(\rho g \cos\beta) x, \qquad \text{resultando:} \quad v_z = -(\rho g \cos\beta) \frac{x^2}{2\mu} + C_2$$

Con la condición $v_z|_{x=\delta} = 0$, se puede evaluar C_2, lo que resulta en el perfil de velocidades:

$$v_z = (\rho g \cos\beta) \frac{\delta^2}{2\mu} \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right) \qquad \textbf{(3. 54)}$$

En la interfase $(x = 0)$ la velocidad es máxima: $v_{zmx} = (\rho g \cos\beta) \frac{\delta^2}{2\mu}$ **(3. 55)**

El gasto volumétrico es:

$$Q = \int_0^w \int_0^\delta v_z n_z dx dy = \frac{(\rho g \cos\beta)}{2\mu} w \delta^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{x^2}{\delta^2}\right) dx = \frac{(\rho g \cos\beta)}{2\mu} w \frac{2}{3} \delta^3 \qquad \textbf{(3. 56)}$$

La velocidad promedio es

$$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{w\delta} = \frac{(\rho g \cos\beta)}{3\mu} \delta^2 = \frac{2}{3} v_{z,mx} \qquad \textbf{(3. 57)}$$

La fuerza de fricción.

$$F_z = \int_0^L \int_0^w \tau_{xz} n_x dy dz = \rho g \cos\beta(x)(Lw) \qquad \textbf{(3. 58)}$$

que tiene un máximo en $x = \delta$.

3. 3. Flujos por Presión.

3. 3.1. Flujo a través de un tubo circular.

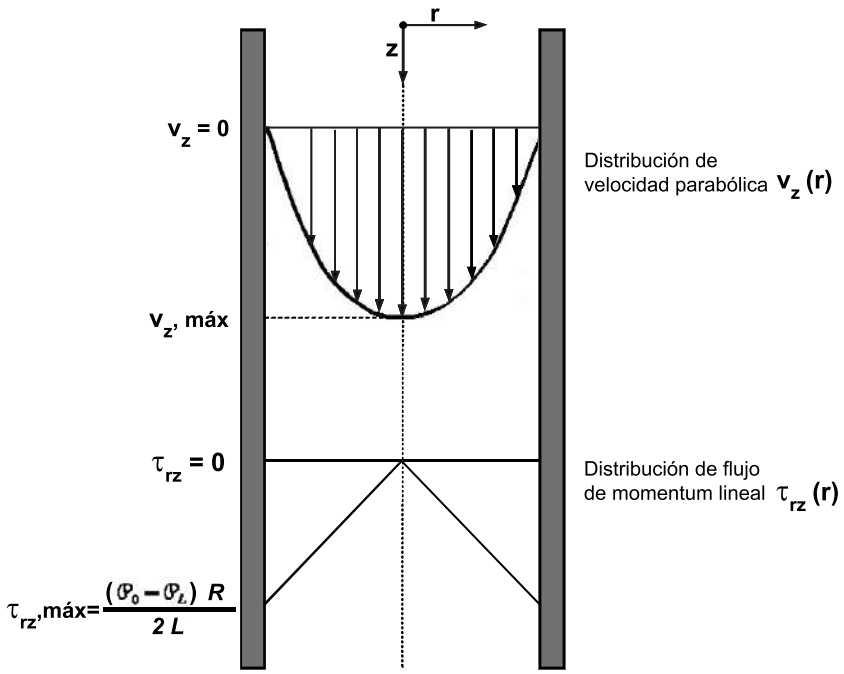


Figura **3.8**. *Tubo con sección transversal circular de radio R y largo L.*

A régimen permanente, el vector velocidad es: $\underline{v} = (0,\ 0,\ v_z(r))$ **(3. 59)**

con condiciones de frontera: $v_z|_{r=R} = 0$ y $\tau_{rz}|_{r=0} = 0 \left(\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \right)$ **(3. 60)**

La ecuación de continuidad correspondiente es: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ **(3. 61)**

y la ecuación de Newton es: $\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}$ **(3. 62)**

El movimiento es causado por un gradiente de presiones en la dirección del movimiento. En términos del esfuerzo, el balance de momentum en coordenadas cilíndricas es:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \textbf{(3. 63)}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{r\,\partial \theta} \quad \textbf{(3. 64)}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,\tau_{rz})}{\partial r} + \rho g \quad \textbf{(3. 65)}$$

Introduciendo la variable $P = p - \rho g z \cos\beta$ **(3. 66)**

Donde β es el ángulo que el tubo hace con la vertical. Substituyendo la ecuación **3. 66** en la **3. 65** obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} \tag{3. 67}$$

El lado izquierdo de la ecuación **3. 67** es función de z, por lo que $\frac{\partial P}{\partial z} = C_0$, una constante. Ésta se determina considerando una caída de presión ΔP en una distancia L. Esto es, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta P}{L}$.

Integrando **3. 67** obtenemos: $\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{L}\frac{r}{2} + C_1$. La condición de frontera en el centro del tubo $\tau_{rz}|_{r=0} = 0$ implica que $C_1 = 0$,

por lo que: $\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{L}\frac{r}{2}$ (**3. 68**)

El esfuerzo en la pared se define como: $\tau_w = \frac{\Delta P}{L}\frac{R}{2}$ (**3. 69**)

Substituyendo la ecuación **3. 68** en la **3. 62** obtenemos: $\mu\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\Delta P}{L}\frac{r}{2}$. Integrando se obtiene: $v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L}r^2 + C_2$. Utilizando la condición de frontera en la pared $v_z|_{r=R} = 0$ obtenemos:

el perfil de velocidades siguiente: $v_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ (**3. 70**)

La velocidad máxima se obtiene en $r = 0$: $v_{z,mx} = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$ (**3. 71**)

Con el cálculo del flujo volumétrico se obtiene la ley de Poiseuille:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z n_z r\,dr\,d\theta = \frac{(2\pi R^2\Delta P)}{4\mu L}\int_0^R\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta P}{L} \tag{3. 72}$$

La velocidad promedio es:

$$\langle v_z\rangle = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L} = \frac{1}{2}v_{z,mx} \tag{3. 73}$$

La ecuación **3. 72** contiene contribuciones del gradiente Δp, de la gravedad ρg y de la inclinación del tubo $\cos\beta$ (ver ecuación **3. 66**). Esto es:

$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu L}(\Delta p - \rho g z\cos\beta)$. En tubos horizontales o verticales, $\cos\beta = 0$ o $\cos\beta = 1$, respectivamente. En flujos por gravedad, $Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}(\rho g)$. La fuerza de fricción es:

$$F_z = \int_0^L\int_0^{2\pi}\tau_{rz}n_r\,r\,d\theta\,dz = \frac{\Delta P}{L}\frac{r^2}{2}(2\pi L) = \pi r^2\Delta P = \pi r^2(\Delta p - \rho g L) \tag{3. 74}$$

3. 3.2. Flujo por presión a través de una región anular.

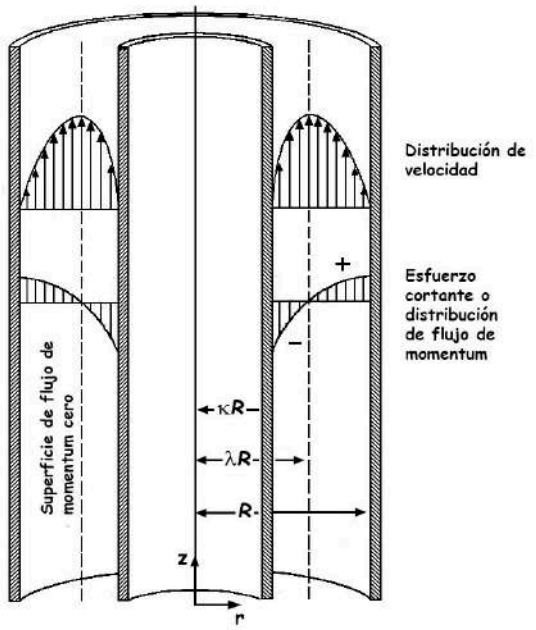


Figura **3.9**. *Flujo axial en una región anular entre dos tubos concéntricos.*

Partimos de la ecuación **3. 67**: $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\,\tau_{rz})}{\partial r}$. Integrando:

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta P}{L}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \qquad \textbf{(3. 75)}$$

A partir de la ecuación **3. 62**: $\frac{\Delta P}{L}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} = \mu\,\frac{\partial v_z}{\partial r}$. Integrando de nuevo:

$v_z = \dfrac{\Delta P}{4\mu L} r^2 + C_1\, ln(r) + C_2$. Aplicando las siguientes condiciones de frontera:

$$v_z|_{r=\kappa R} = v_z|_{r=R} = 0 \qquad \textbf{(3. 76)}$$

obtenemos las ecuaciones algebraicas siguientes:

$$0 = \frac{\Delta P}{4\mu L}\kappa^2 R^2 + C_1\, ln(\kappa R) + C_2 \quad \text{y} \quad 0 = \frac{\Delta P}{4\mu L} R^2 + C_1\, ln(R) + C_2$$

El perfil resultante es:

$$v_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left[1 - \frac{r^2}{R^2} + \frac{1-\kappa^2}{ln\,\frac{1}{\kappa}}\, ln\,\frac{r}{R}\right] \qquad \textbf{(3. 77)}$$

El esfuerzo cortante es:

$$\tau_{rz} = \mu\,\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\Delta P R}{2L}\left[\frac{r}{R} - \frac{1-\kappa^2}{2ln\,\frac{1}{\kappa}}\frac{R}{r}\right] = \frac{\Delta P R}{2L}\left[\frac{r}{R} - f(\kappa)\frac{R}{r}\right] \text{donde} f(\kappa) = \frac{1-\kappa^2}{2ln\,\frac{1}{\kappa}} \qquad \textbf{(3. 78)}$$

La velocidad máxima se obtiene de la condición $\tau_{rz} = 0$. Esto implica que $f(\kappa) = \frac{r^2}{R^2}$.

La ecuación **3. 77** se reduce a: $v_{z,máx} = \dfrac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left[1 - f(\kappa) + f(\kappa)\, ln\, f(\kappa)\right]$ **(3. 79)**

El flujo volumétrico es:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} v_z n_z r\,dr\,d\theta = \frac{(\Delta P \pi R^4)}{8\mu L}\left[1 - \kappa^4 - 2\left(1 - \kappa^2\right) f(\kappa)\right] \qquad \textbf{(3. 80)}$$

El cálculo de la fuerza de fricción en las paredes involucra las siguientes expresiones para el esfuerzo, a partir de la ecuación **3. 78**:

$$\tau_{rz}|_{r=R} = \frac{\Delta P R}{2L}\left[1 - f(\kappa)\right]$$

$$\tau_{rz}|_{r=\kappa R} = \frac{\Delta P R}{2L}\left[\kappa - \frac{1}{\kappa} f(\kappa)\right]$$

$$F_z = \int_0^{L}\int_0^{2\pi} \left(\tau_{rz}|_{r=R}\right) n_r R\,d\theta\,dz + \int_0^{L}\int_0^{2\pi} \left(\tau_{rz}|_{r=\kappa R}\right)\left(-n_r\right)\kappa R\,d\theta\,dz =$$
$$= 2\pi L\left(\frac{\Delta P R^2}{2L}\right)\left[1 - f(\kappa) - \kappa^2 + f(\kappa)\right]$$

$$F_z = \Delta P\left(\pi R^2\right)\left(1 - \kappa^2\right) \qquad \textbf{(3. 81)}$$

3. 3.3. Flujo por presión de líquidos inmiscibles.

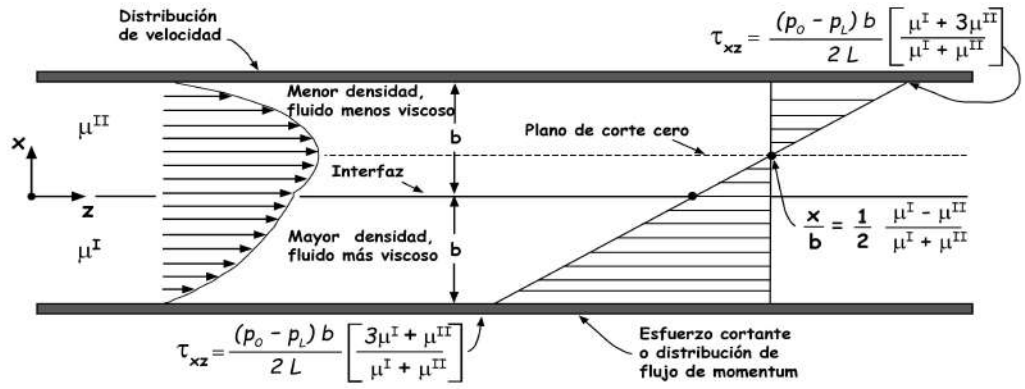


Figura **3.10**. *Flujo por presión entre placas paralelas de dos líquidos inmiscibles.*

Problema de interfase líquido-líquido en una ranura de largo L y ancho w. z es la dirección del movimiento.

Fase I: fluido más denso y más viscoso.

Fase II: fluido menos denso y menos viscoso.

Vector velocidad: $\underline{v} = (0,\ 0,\ v_z(x))$ **(3. 82)**

Ecuación de continuidad: $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ **(3. 83)**

Balance de momentum en z: $\quad 0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial (\tau_{xz})}{\partial x}$ **(3. 84)**

Ecuación de Newton: $\quad \tau_{xz} = \mu \dfrac{\partial v_z}{\partial x}$ **(3. 85)**

Integrando la ecuación **3. 84** para las dos fases, donde $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\Delta p}{L}$ es constante.

$$\tau_{xz}^{I} = \frac{\Delta p}{L} x + C_1 \quad \text{y} \quad \tau_{xz}^{II} = \frac{\Delta p}{L} x + C_2 \qquad \textbf{(3. 86)}$$

Substituyendo en la ecuación **3. 85** obtenemos:

$$\mu^{I} \frac{\partial v_z^{I}}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} x + C_1 \quad \text{y} \quad \mu^{II} \frac{\partial v_z^{II}}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L} x + C_2 \qquad \text{integrando:}$$

$$v_z^{I} = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{I}}\right) \frac{x^2}{2} + C_1 \frac{x}{\mu^{I}} + C_3 \qquad \textbf{(3. 87)}$$

$$v_z^{II} = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{II}}\right) \frac{x^2}{2} + C_2 \frac{x}{\mu^{II}} + C_4 \qquad \textbf{(3. 88)}$$

Hay 4 condiciones de frontera:

En las paredes: $\quad v_z^{I}\big|_{x=-b} = 0, \quad v_z^{II}\big|_{x=b} = 0$

En la interfase: $\quad \tau_{xz}^{I} = \tau_{xz}^{II}, \quad v_z^{I} = v_z^{II}$ **(3. 89)**

Por las condiciones de interfase, en la ecuación **3. 86**, $C_1 = C_2$. Igualmente, en las ecuaciones **3. 87** y **3. 88**, $C_3 = C_4$.

Por las condiciones en las paredes, se obtienen dos ecuaciones algebraicas para C_1 y C_3.

$$0 = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{I}}\right) \frac{b^2}{2} - C_1 \frac{b}{\mu^{I}} + C_3 \quad \text{y} \quad 0 = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{II}}\right) \frac{b^2}{2} + C_1 \frac{b}{\mu^{II}} + C_3$$

El resultado es:

$$\tau_{xz} = \frac{\Delta p}{L} b \left[\frac{x}{b} - \frac{1}{2} \frac{\mu^{I} - \mu^{II}}{\mu^{I} + \mu^{II}}\right] \qquad \textbf{(3. 90)}$$

$$v_z^{I} = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{I}}\right) \frac{b^2}{2} \left[\frac{2\mu^{I}}{\mu^{I} + \mu^{II}} + \left(\frac{x}{b}\right) \frac{\mu^{I} - \mu^{II}}{\mu^{I} + \mu^{II}} - \frac{x^2}{b^2}\right] \qquad \textbf{(3. 91)}$$

$$v_z^{II} = \left(\frac{\Delta p}{L\mu^{II}}\right) \frac{b^2}{2} \left[\frac{2\mu^{II}}{\mu^{I} + \mu^{II}} + \left(\frac{x}{b}\right) \frac{\mu^{I} - \mu^{II}}{\mu^{I} + \mu^{II}} - \frac{x^2}{b^2}\right] \qquad \textbf{(3. 92)}$$

El máximo en la velocidad ocurre cuando $\tau_{xz} = 0$. Esto es, de la ecuación **3. 90**, $\frac{x}{b} = \frac{1}{2}\frac{\mu^I - \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}$. Este se encuentra en la fase II, ya que $\mu^I > \mu^{II}$ y $x/b > 0$.

El esfuerzo en la interfase $(x = 0)$ es negativo (ecuación **3. 90**). La velocidad en la interfase es:

$$v_z^I = v_z^{II} = \left(\frac{\Delta p b^2}{L}\right)\left[\frac{1}{\mu^I + \mu^{II}}\right] \qquad \textbf{(3. 93)}$$

El esfuerzo en las paredes es:

$$\tau_{xz}|_{x=b} = \frac{\Delta p}{2L} b \frac{\mu^I + 3\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}, \quad \text{y} \quad \tau_{xz}|_{x=-b} = \frac{\Delta p}{2L} b \frac{3\mu^I + \mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}} \qquad \textbf{(3. 94)}$$

La fuerza de fricción en $x = b$ es:

$$F_z = \int_0^L \int_0^w (\tau_{xz}|_{x=b})\, n_x\, dy\, dz = \frac{\Delta P b}{2L}\left(\frac{\mu^I + 3\mu^{II}}{\mu^I + \mu^{II}}\right) wL \qquad \textbf{(3. 95)}$$

3. 4. Flujos Radiales.

3. 4.1. Flujo radial entre dos discos paralelos.

Un sistema de lubricación consiste en dos discos circulares en donde fluye radialmente un líquido lubricante. Este flujo se genera debido a una diferencia de presiones entre el radio interior r_1 y el radio exterior r_2 (ver figura **3.11**).

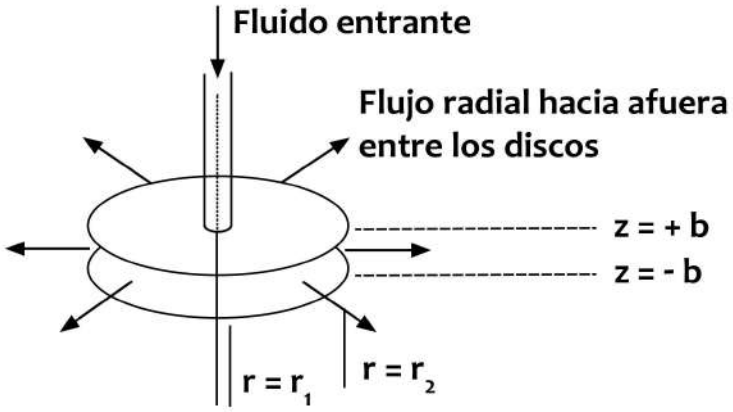


Figura **3.11**. *Dos discos paralelos separados una distancia 2b. El fluido desciende verticalmente y se adapta a la situación de flujo radial desarrollado entre los radios r_1 y r_2.*

El vector velocidad en este caso es: $\underline{v} = (v_r(z),\, 0,\, 0)$. La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas es $\frac{\rho}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0$, lo que implica que:

$$r v_r = \phi(z), \quad r_1 \leq r \leq r_2 \qquad \textbf{(3. 96)}$$

El componente radial de la ecuación de movimiento es:

$$\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \qquad \textbf{(3. 97)}$$

Substituyendo la ecuación **3. 96** en **3. 97** obtenemos:

$$-\rho \frac{\phi^2}{r^3} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \qquad \textbf{(3. 98)}$$

Suponiendo flujo lento, tal que $\phi^2 \ll 1$, obtenemos:

$0 = -r\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ que se puede integrar para obtener: $-\Delta p = \mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$.

Integrando de nuevo: $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{\mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} z + C_1$. La constante se evalúa considerando el máximo de la velocidad, y de ϕ (ver ecuación **3. 96**) en $z = 0$. Por lo tanto, $C_1 = 0$.

Integrando nuevamente: $\phi = -\frac{\Delta p}{\mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \frac{z^2}{2} + C_2$, con condición $\phi|_{z=b} = 0$.

Se obtiene: $$\phi = -\frac{\Delta p}{\mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \frac{b^2}{2} \left[1 - \frac{z^2}{b^2} \right] \qquad \textbf{(3. 99)}$$

Por la ecuación **3. 96** se obtiene el perfil de velocidad: $$v_r = -\frac{\Delta p}{\mu r \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \frac{b^2}{2} \left[1 - \frac{z^2}{b^2} \right]$$

Velocidad máxima: $$v_{r,máx} = -\frac{\Delta p}{\mu r \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \frac{b^2}{2}$$

Flujo volumétrico: $$Q = \int_0^{2\pi} \int_{-b}^{b} v_r n_r r \, dz \, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\frac{-\Delta p b^2}{2\mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \right) \left(2b - \tfrac{2}{3} b \right) = \frac{4}{3} \frac{\pi b^3 \Delta p}{3\mu \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} \qquad \textbf{(3. 100)}$$

Velocidad promedio: $$\langle v_z \rangle = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{2\pi r (2b)} = \frac{\Delta p b^2}{3\mu r \left(ln \frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{2}{3} v_{r,máx} \qquad \textbf{(3. 101)}$$

3. 5. Flujos con Simetría Esférica.

3. 5.1. Flujo alrededor de una esfera rotatoria.

Se requiere evaluar el torque para mantener el movimiento de la esfera.

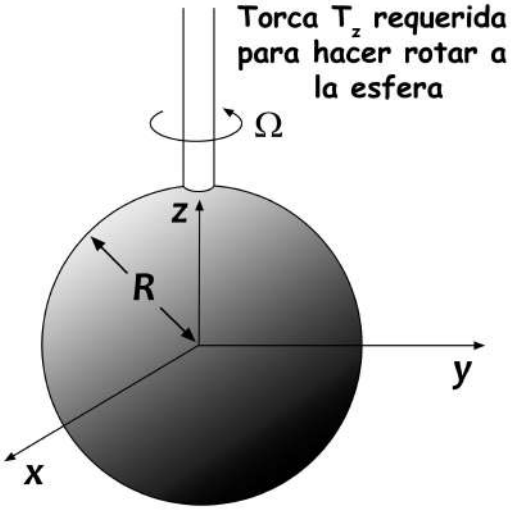


Figura **3.12**. *Esfera de radio R girando a una velocidad angular* Ω_0 *en un líquido incompresible.*

El vector velocidad es: $\underline{v} = (0,\, 0,\, v_\phi(r))$.

Ecuación de continuidad: $$\frac{\rho}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \qquad \textbf{(3. 102)}$$

Con condiciones de frontera: $v_\phi\big|_{r=R} = R\,\Omega_0 \operatorname{sen}\theta\,, \qquad v_\phi\big|_{r\to\infty} = 0$

La ley de Newton es: $$\tau_{r\phi} = \mu r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right) \qquad \textbf{(3. 103)}$$

En términos del esfuerzo, el balance de momentum se expresa en los 3 ejes:

Eje r: $$-\rho\frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \textbf{(3. 104)}$$

Eje θ: $$-\rho\frac{v_\phi^2}{r}\cot\theta = -\frac{\partial p}{r\,\partial\theta} + \rho g_\theta; \qquad \textbf{(3. 105)}$$

Eje ϕ: $$0 = -\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\tau_{r\phi}\right) \qquad \textbf{(3. 106)}$$

Este es un flujo por arrastre, por lo que $\dfrac{\partial p}{\partial \phi} = 0.$

La ecuación **3. 106**, por lo tanto, implica que: $r^3\tau_{r\phi} = C_1$. Substituyendo la ecuación **3. 103**,

$\frac{C_1}{\mu r^4} = \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)$. Integrando:

$\frac{v_\phi}{r} = \frac{C_1}{-3r^3} + C_2$ aplicando la primera condición de frontera:

$v_\phi\big|_{r\to\infty} = 0$, implica que $C_2 = 0$.

Aplicando la condición $v_\phi\big|_{r=R} = R\,\Omega_0 \operatorname{sen}\theta$, se obtiene:

$\frac{C_1}{-3R^2} = R\,\Omega_0 \operatorname{sen}\theta$, por lo que el perfil de velocidades es:

$$v_\phi = \Omega_0 \frac{R^3}{r^2}\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(3. 107)}$$

El esfuerzo está dado por la ecuación **3. 103**. Efectuando la derivación se obtiene:

$$\tau_{r\phi} = 3\mu\Omega_0\left(\frac{R}{r}\right)^3 \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(3. 108)}$$

De donde se obtiene el torque:

$$|T|_\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tau_{r\phi}\,(r\operatorname{sen}\theta)\,(rd\theta)\,(r\operatorname{sen}\theta d\phi) = 3\mu\Omega_0 R^3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta d\phi = \tfrac{4}{3}6\pi R^3\Omega_0$$

$$|T|_\phi = 8\pi\mu R^3\Omega_0 \qquad \textbf{(3. 109)}$$

Tarea 3

1. **Torque requerido en una flecha que gira en un cojinete de fricción. Fig. 3.13** (Problema 3A.1 Bird et al.)

   Calcular el torque requerido en $lb_f \cdot ft$ y la potencia consumida en HP para que una flecha gire en el cojinete mostrado en la figura **3.13**. El diámetro de la flecha es de $2\,in$ y gira a $200\,rpm$. El espacio entre la flecha y el cojinete es de $0.002\,in$. La viscosidad del lubricante es de $200\,cp$ y su densidad es de $50\,{}^{lb_m}/_{ft^3}$. La potencia consumida es el producto del torque por la velocidad angular.

   Respuesta: $0.32\,lb_f \cdot ft;\ 0.012\,HP = 0.009\,kW$

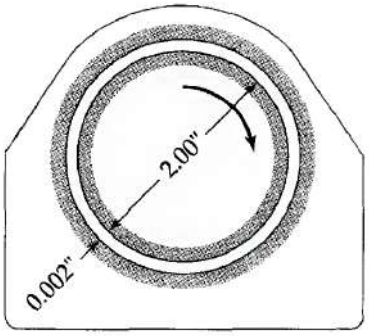


Figura **3.13**. *Cojinete de fricción.*

2. **Flujo entre dos cilindros coaxiales.** (Problema 3B.1 Bird et al.)

   El espacio entre dos cilindros coaxiales contiene un líquido incompresible a temperatura constante. Los radios interior y exterior son κR y R, respectivamente. Las velocidades angulares son Ω_i y Ω_0. Determinar la distribución de velocidades en el fluido y los torques en los dos cilindros para mantener el movimiento.

   Respuestas: La distribución de velocidades es:

$$v_\theta = \frac{\kappa R}{1-\kappa^2}\left[\left(\Omega_0 - \Omega_i\,\kappa^2\right)\left(\frac{r}{\kappa R}\right) + \left(\Omega_i - \Omega_0\right)\left(\frac{\kappa R}{r}\right)\right]$$

Tarea 4

1. **Flujo laminar en una ranura estrecha.** (Problema 2B.3. Bird et al.)
   Ver figura **3.14**.

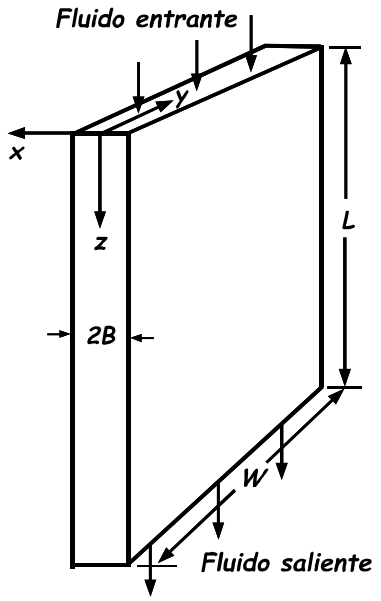


Figura **3.14**. *Flujo a través de una ranura, con* $B \ll W \ll L$.

a) Un fluido Newtoniano en flujo laminar fluye en una ranura de grosor $2B$, en donde $B \ll W$. Obtener los campos de velocidades y esfuerzos siguientes:

$$v_z = \frac{\Delta P B^2}{2\mu L}\left[1 - \left(\frac{x}{B}\right)^2\right]$$

$$\tau_{xz} = \frac{\Delta P}{L}x$$

donde

$$P = p + \rho g h = p - \rho g z$$

b) ¿Cuál es el cociente de la velocidad promedio y la velocidad máxima en este flujo?

c) Obtener el flujo volumétrico.

Respuesta:

b) $\frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,max}} = \frac{2}{3}$.

c) $Q = \frac{2}{3}\frac{\Delta P B^3 W}{\mu L}$

2. **Flujo de una película descendente en el exterior de un tubo.** (Problema 2B.6 Bird et al.)

   En un experimento de absorción de gas un fluido viscoso fluye hacia arriba dentro de un tubo y luego fluye hacia abajo sobre la superficie exterior del tubo.

   a) Demostrar que la distribución de velocidades en la película descendente es

   $$v_z = \frac{\rho g R^2}{4\mu}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2a^2 ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

   b) Obtener el flujo másico de la película.

Tarea 5

1. **Flujo radial entre dos cilindros concéntricos.** (Problema 3B.11 Bird et al.)

   Considerar un fluido incompresible de densidad constante que fluye radialmente entre dos paredes porosas cilíndricas con radios κR y R, respectivamente.

   a) Demostrar que la ecuación de continuidad se reduce a $v_r = {}^{C}/_{r}$, donde C es una constante.

   b) A partir de la ecuación de movimiento, obtener las siguientes expresiones de la presión modificada:

   $$\frac{dP}{dr} = -\rho\, v_r \frac{dv_r}{dr}$$

   $$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dP}{dz} = 0$$

   Integrar la presión radial para obtener:

   $$P(r) - P(R) = \frac{1}{2}\rho\, [v_r(R)]^2 \left[1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]$$

2. **Flujo lento entre dos esferas concéntricas.** (Problema 3B.4 Bird et al.)

   Un fluido Newtoniano viscoso fluye en el espacio entre dos esferas concéntricas, como se muestra en la figura **3.15**. El flujo es producido por un gradiente de presión. Suponer que v_θ depende solamente de r y θ. Los otros componentes de la velocidad son cero.

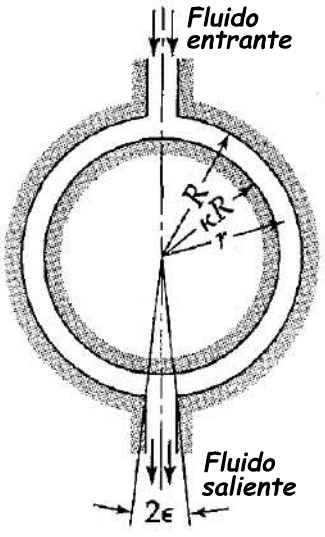


Figura **3.15**. *Flujo lento en la región entre dos esferas concéntricas estacionarias.*

   a) A partir de la ecuación de continuidad demostrar que $v_\theta\, sen\,\theta = u(r)$ donde u será determinada después.

b) Escribir el componente θ de la ecuación de movimiento para flujo lento, de tal forma que el término $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ es muy pequeño. Este es:

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{sen\,\theta}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)\right]$$

c) Separar esta ecuación en dos ecuaciones siguientes:

$$sen\,\theta\,\frac{\partial p}{\partial \theta} = B$$

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = B$$

donde B es la constante de separación. Resolver las dos ecuaciones para obtener:

$$B = \frac{P_2 - P_1}{2\,ln\,cot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

$$u(r) = \frac{(P_1 - P_2)\,R^3\,(1-\kappa)^3\,\rho}{12\,\mu\,ln\,cot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

donde P_1 y P_2 son los valores de la presión modificada en $\theta = \varepsilon$ y $\theta = \pi - \varepsilon$, respectivamente.

d) Encontrar el flujo másico:

$$w = \frac{\pi\,(P_2 - P_1)\,R}{4\,\mu\,ln\,cot\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\left[\left(1 - \frac{r}{R}\right) + \kappa\left(1 - \frac{R}{r}\right)\right]$$

Capítulo 4

Fluidos no-Newtonianos

Este capítulo abarca a los fluidos newtonianos generalizados (ley de potencia y viscoplásticos) en flujos tangenciales y en tubos.

4. 1. La ecuación de Weissenberg-Rabinowitch (W-R).

Esta ecuación se utiliza para obtener la viscosidad no-newtoniana de datos que se obtienen de un viscosímetro capilar. Se parte de la definición de flujo volumétrico:

$$Q = 2\pi \int_0^R v_z \, r \, dr \tag{4. 1}$$

Realizando un cambio de variable: $u = v_z$,

$du = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) dr$, se obtiene: $Q = 2\pi v_z \frac{r^2}{2}\Big|_0^R - 2\pi \int_0^R \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) dr$

Definiendo la velocidad de corte: $\dot{\gamma}_w = \left(-\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$, obtenemos:

$$Q = \pi \int_0^R \dot{\gamma}_w \, r^2 \, dr \tag{4. 2}$$

Por balance de momentum lineal:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{r}{2} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right) \frac{r}{2} \tag{4. 3}$$

y definiendo el esfuerzo en la pared:

$$\tau_w = \left(\frac{\Delta p}{L}\right) \frac{R}{2} \tag{4. 4}$$

obtenemos: $dr = \frac{1}{\frac{\Delta p}{2L}} d\tau_{rz} = \frac{R}{\tau_w} d\tau_{rz}$

luego, la ecuación **4. 2** puede expresarse como: $Q = \pi \int_0^{\tau_w} \frac{R^3}{\tau_w^3} \dot{\gamma}_w \left(\tau_{rz}^2\right) d\tau_{rz}$

o similarmente:

$$\frac{Q\tau_w^3}{\pi R^3} = \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma}_w \left(\tau_{rz}^2\right) d\tau_{rz} \qquad \textbf{(4. 5)}$$

Derivando con respecto a τ_w:

$$\frac{\tau_w^3}{\pi R^3}\frac{dQ}{d\tau_w} + \frac{3Q}{\pi R^3}\tau_w^2 = \dot{\gamma}_w \left(\tau_w^2\right)$$

$$\frac{1}{\pi R^3}\left[\tau_w \frac{dQ}{d\tau_w} + 3Q\right] = \dot{\gamma}_w, \quad \text{obtenemos:}$$

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{\tau_w}{Q}\frac{dQ}{d\tau_w}\right] = \frac{4Q}{\pi R^3}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{d\,lnQ}{d\,ln\tau_w}\right] \qquad \textbf{(4. 6)}$$

que es la ecuación W-R.

En el caso de un fluido newtoniano, y por la ley de Hagen-Poiseuille, el esfuerzo en la pared está dado por:

$$\tau_w = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{R}{2} = \mu\left(\frac{4Q}{\pi R^3}\right) \qquad \textbf{(4. 7)}$$

En este caso $d\ln\tau_w = d\ln Q$, por lo que la ecuación **4. 6** se reduce a $\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3}$. Con esta ecuación es posible obtener la viscosidad no Newtoniana del fluido:

$$\eta = \left(\frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w}\right) \qquad \textbf{(4. 8)}$$

4. 2. Flujos no-Newtonianos en Tuberías.

4. 2.1. Ley de potencias.

En este caso, la ley de Newton se generaliza a:

$$\tau_{rz} = K\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^n \qquad \textbf{(4. 9)}$$

Donde K (índice de consistencia) y n (coeficiente de la ley de la potencia) son constantes. Por balance de momentum,

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{r}{2} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)^n \qquad \textbf{(4. 10)}$$

De donde $v_z = \left(\frac{\Delta p}{2KL}\right)^{\frac{1}{n}} \int r^{\frac{1}{n}}\, dr + C_1$, con condiciones de frontera: $v_z = 0$ en $r = R$. Aplicando las condiciones de frontera obtenemos:

$$v_z = \left(\frac{\Delta p}{2KL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}}{n+1}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}+1}\right] \qquad \textbf{(4. 11)}$$

En el caso newtoniano $(K = \mu \quad y \quad n = 1)$ se obtiene:

$$v_z = \left(\frac{\Delta p R^2}{4\mu L}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad \textbf{(4. 12)}$$

Lo que recupera el perfil parabólico. El gasto volumétrico correspondiente es:

$$Q = \iint \underline{v}\cdot\underline{n}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\left(\frac{\Delta p}{2KL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{nR^{\left(\frac{1}{n}+1\right)}}{n+1}\int_0^R \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}-1}\right] r\, dr$$

Ya que $\int_0^R \left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}-1}\right] r\, dr = \frac{n+1}{2(3n+1)}R^2$, entonces:

$$Q = \left(\frac{\Delta p R}{2KL}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n\,\pi R^3}{3n+1} \qquad \textbf{(4. 13)}$$

Nuevamente, si $K = \mu \quad y \quad n = 1$, obtenemos la ley de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta p}{L} \qquad \textbf{(4. 14)}$$

La ecuación **4.13** puede ser expresada como:

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{L}\frac{R}{2} = K\left[\frac{4Q}{\pi R^3}\left(\frac{3n+1}{4n}\right)\right]^n \qquad \textbf{(4. 15)}$$

En donde:

$$\dot{\gamma}_w = \frac{4Q}{\pi R^3}\left[\frac{3n+1}{4n}\right] \tag{4. 16}$$

Comparando la ecuación **4. 16** con la ecuación **4. 6** se obtiene:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{d\ln Q}{d\ln \tau_w} = \frac{3n+1}{4n} \tag{4. 17}$$

debido a que por la ecuación **4. 15** $d\ln\tau_w = (n)\,d\ln Q$.

4. 2.2. Fluidos de Bingham (viscoplásticos).

Estos fluidos poseen un esfuerzo característico, el esfuerzo de cedencia, el cual es necesario superar para que el líquido fluya. Para valores menores a este esfuerzo, el material es un sólido que no fluye. En un tubo, el esfuerzo de cedencia se encuentra a una distancia radial determinada (r_0), de acuerdo a la figura **4.1**.

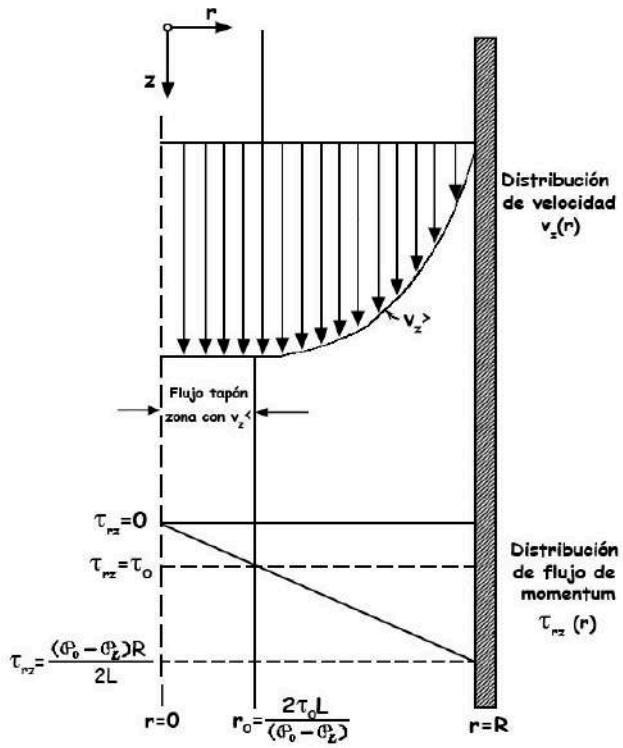


Figura **4.1**: *Vista del plano $r-z$ de un tubo. La zona sólida $(r < r_0)$ se encuentra en la parte central y la zona líquida $(r > r_0)$ se encuentra en la vecindad de la pared.*

En este caso, la componente del tensor de esfuerzos τ_{rz} está dada por:

$$\tau_{rz} = \tau_0 + \mu_0 \frac{\partial v_z}{\partial r} \tag{4. 18}$$

donde τ_0 es el esfuerzo de cedencia. Por el balance lineal de momentum se tiene que:

$$\tau_{rz} = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{r}{2} \qquad si \qquad r \geq r_0$$

$$\tau_{rz} = \tau_0 = \left(\frac{\Delta p}{L}\right)\frac{r_0}{2} \qquad si \qquad r \leq r_0$$

Existen dos fases en el líquido: una fase sólida cuando $\tau_{rz} < \tau_0$ y una fase fluida cuando $\tau_{rz} > \tau_0$. Esto es:

$$\tau_{rz} = \tau_0 + \mu_0 \frac{\partial v_z}{\partial r} \qquad si \qquad \tau_{rz} > \tau_0 \qquad \textbf{(4. 19)}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \qquad si \qquad \tau_{rz} < \tau_0 \qquad \textbf{(4. 20)}$$

Perfil de velocidad en la fase líquida (1). Se obtiene integrando la ecuación **4. 18**,

$v_{z_1} = \frac{\Delta p}{2\mu_0 L}\int r\,dr - \frac{\tau_0}{\mu_0}\int dr + C_1$. La constante C_1 se evalúa con la condición:

$v_{z\,(r=R)} = 0$,

resultando en:

$$v_{z_1} = \left(\frac{\Delta p R^2}{4\mu_0 L}\right)\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0 R}{\mu_0}\left[1 - \frac{r}{R}\right] \qquad para \qquad r \geq r_0 \qquad \textbf{(4. 21)}$$

En la fase sólida (2), si $r = r_0$, entonces

$$v_{z_2} = \left(\frac{\Delta p R^2}{4\mu_0 L}\right)\left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right] - \left[\frac{\Delta p}{L}\frac{r_0}{2}\right]\frac{R}{\mu_0}\left[1 - \frac{r_0}{R}\right]$$

resultando en la siguiente simplificación:

$$v_{z_2} = \left(\frac{\Delta p R^2}{4\mu_0 L}\right)\left[1 - \frac{r_0}{R}\right]^2 \qquad para \qquad r \leq r_0 \qquad \textbf{(4. 22)}$$

El flujo volumétrico se evalúa por partes:

$$Q = 2\pi\int_0^R v_z\, r\,dr = 2\pi\, v_z\,\frac{r^2}{2}\bigg|_0^R - 2\pi\int_0^R \frac{r^2}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)dr = -\pi\int_{r_0}^R \left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) r^2\, dr$$

ya que $\int_0^{r_0}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) r^2\, dr = 0$. Por la ecuación **4. 19**, tenemos que:

$$Q = \pi\int_{r_0}^R \left(\frac{\Delta p}{\mu_0 L}\frac{r}{2} - \frac{\tau_0}{\mu_0}\right) r^2\, dr = \pi\left[\frac{\Delta p}{8\mu_0 L}\left(R^4 - r_0^4\right) - \frac{\tau_0}{3\mu_0}\left(R^3 - r_0^3\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{\Delta p R^4}{8\mu_0 L}\left(1 - \frac{r_0^4}{R^4}\right) - \frac{\Delta p R^4}{8\mu_0 L}\left(\frac{\tau_0}{3\mu_0}\right)\left(\frac{4\mu_0}{\tau_w R^3}\right)\left(R^3 - r_0^3\right)\right]$$

debido a que $\dfrac{\Delta p\, R^4}{8\mu_0 L} = \dfrac{\tau_w R^3}{4\mu_0}$, entonces:

$$Q = \pi \frac{\Delta p\, R^4}{8\mu_0 L}\left[\left(1 - \frac{r_0^4}{R^4}\right) - \left(\frac{4\tau_0}{3\tau_w}\right) + \frac{4\tau_0}{3\tau_w}\frac{r_0^3}{R^3}\right].$$ Como $\dfrac{r_0}{R} = \dfrac{\tau_0}{\tau_w}$, entonces:

$$Q = \pi \frac{\Delta p\, R^4}{8\mu_0 L}\left[\left(1 - \frac{\tau_0^4}{\tau_w^4}\right) + \frac{4}{3}\frac{\tau_0^4}{\tau_w^4} - \frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_w}\right] = \pi \frac{\Delta p\, R^4}{8\mu_0 L}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{\tau_0^4}{\tau_w^4} - \frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_w}\right] \quad \textbf{(4. 23)}$$

La ecuación **4. 23** es conocida como la ecuación de Buckingham-Reiner.

4. 3. Flujo Torsional en Fluidos no-Newtonianos.

4. 3.1. Ley de potencias.

Se hace referencia aquí al flujo similar al de un viscosímetro de Couette, en donde el fluido está contenido entre dos cilindros concéntricos, y uno de los cilindros gira a una velocidad angular determinada. Se obtendrá el torque en función de la velocidad angular.

La expresión de la ley de la potencia en este caso es la generalización al caso no-newtoniano de la ley de potencia. El único componente del tensor de esfuerzos diferente de cero es:

$$\tau_{r\theta} = K\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^n \quad \textbf{(4. 24)}$$

junto con el balance de momentum:

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\tau_{r\theta}\right) = 0\,, \quad \textbf{(4. 25)}$$

de donde se obtiene:

$$r^2\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right]^n = C_1$$

luego: $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right) = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{C_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}}$. Integrando: $\dfrac{v_\theta}{r} = \displaystyle\int \frac{1}{r}\left(\frac{C_1}{r^2}\right)^{\frac{1}{n}} dr + C_2$

con condiciones de frontera: $v_\theta = 0$ en $r = \kappa R$ y $v_\theta = R\,\Omega_0$ en $r = R$

El resultado de determinar las constantes por medio de las condiciones de frontera es el perfil de velocidades:

$$\frac{v_\theta}{\Omega_0\, r} = \frac{1 - \left(\frac{\kappa R}{r}\right)^{\frac{2}{n}}}{1 - \kappa^{2/n}} \quad \textbf{(4. 26)}$$

El torque resultante es:

$$|\underline{T}|_\theta \;=\; \int_0^L \int_0^{2\pi} r\,\tau_{r\theta}\,r\,d\theta\,dz \;=\; r^2\,\tau_{r\theta}\,(2\,\pi\,L) \qquad \textbf{(4. 27)}$$

donde $r^2\,\tau_{r\theta} \;=\; K\,r^2\left[r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{v_\theta}{r}\right)\right]^n \;=\; K\,r^2\left[r\dfrac{d}{dr}\,\dfrac{1-\left(\dfrac{\kappa R}{r}\right)^{\frac{2}{n}}}{1-\kappa^{2/n}}\right]^n$.

Ahora: $\dfrac{d}{dr}\left(1-\left(\dfrac{\kappa R}{r}\right)^{\frac{2}{n}}\right) \;=\; -\,(\kappa R)^{\frac{2}{n}}\left(-\dfrac{2}{n}\,r^{\left(-\frac{2}{n}-1\right)}\right)$. Por lo tanto,

$r^2\,\tau_{r\theta} \;=\; K\,r^2\left[r\left(\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{(\kappa R)^{\frac{2}{n}}}{1-\kappa^{2/n}}\,r^{\left(-\frac{2}{n}-1\right)}\right]^n \;=\; K\,\kappa^2\,R^2\left[\dfrac{\frac{2}{n}}{1-\kappa^{2/n}}\right]^n$, lo que da como resultado:

$$|\underline{T}\,|_\theta = 2\,\pi\,L\,K\,\Omega_0^n\,\kappa^2\,R^2\left[\frac{\frac{2}{n}}{1-\kappa^{2/n}}\right]^n \qquad \textbf{(4. 28)}$$

4. 3.2. Fluidos de Bingham.

En este caso, la ecuación constitutiva de Bingham con el componente del tensor de esfuerzos es:

$$\tau_{r\theta} \;=\; \tau_0 \;+\; \mu_0\,r\,\frac{\partial}{\partial\,r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) \qquad \textbf{(4. 29)}$$

Este caso involucra, como uno anterior, al fluido comprendido entre dos cilindros concéntricos.

En la figura **4.2** el fluido presenta dos fases: una fase sólida en la región de menor esfuerzo (que es la zona adyacente a la superficie en movimiento) y una fase líquida en la región de mayor esfuerzo (zona adyacente a la superficie estática).

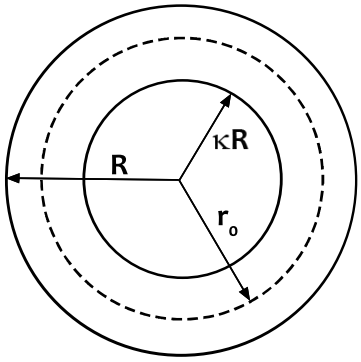


Figura **4.2**. *Flujo torsional visto en el plano* $(r-\theta)$. *El cilindro interior está estático y el exterior se mueve a una velocidad angular* Ω_0.

Las condiciones de frontera para la velocidad son:

$$v_\theta \;=\; 0 \quad en \quad r \;=\; \kappa R \qquad y \qquad v_\theta \;=\; R\,\Omega_0 \quad en \quad r \;=\; R \qquad \textbf{(4. 30)}$$

Además, la condición de interfase:

$$v_\theta = r_0 \Omega_0 \qquad en \qquad r = r_0 \tag{4. 31}$$

Substituyendo la ecuación **4. 27** en la **4. 29** obtenemos:

$$\frac{T}{2\pi L \mu_0 r^3} = \frac{\tau_0}{r\mu_0} + \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right), \quad \text{integrando:}$$

$$\frac{v_\theta}{r} = -\frac{T}{4\pi L \mu_0 r^2} - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln(r) + C_1 \qquad \text{Utilizando la condición } \mathbf{4.\ 31} \text{ obtenemos:}$$

$$\Omega_0 = -\frac{T}{4\pi L \mu_0 r_0^2} - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln(r_0) + C_1 \qquad \text{Esto implica que:}$$

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega_0 + \frac{T}{4\pi L \mu_0}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Por lo que el campo de velocidades entre los dos cilindros es el siguiente:

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega_0 + \frac{T}{4\pi L \mu_0 r_0^2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \qquad \kappa R \le r \le r_0 \tag{4. 32}$$

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega_0 \qquad r_0 \le r \le R \tag{4. 33}$$

Si $r_0 \to R$, entonces la ecuación **4. 32** con la condición **4. 30** se modifica a:

$$\frac{v_\theta}{r} = \Omega_0 + \frac{T}{4\pi L \mu_0 R^2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right) \tag{4. 34}$$

Utilizando la condición de velocidad cero en el cilindro interior se obtiene:

$$\Omega_0 = \frac{T}{4\pi L \mu_0 R^2}\left(\frac{1}{\kappa^2} - 1\right) + \frac{\tau_0}{\mu_0}\ln\kappa \tag{4. 35}$$

La ecuación **4. 35** es la ecuación de Reinier-Rivlin. Se utiliza para determinar el esfuerzo de cedencia y la viscosidad a partir de datos viscosimétricos.

Tarea 6

1. Los siguientes datos fueron obtenidos en un tubo capilar de un material x.

a) En caso de que x fuera un fluido Newtoniano, calcular su viscosidad.

b) En caso de que x fuera un fluido de ley de potencia, calcular K y n.

c) Graficar la curva de viscosidad en función de la rapidez de corte $(log - log)$ para x.

$4Q/\pi R^3$	$\tau_w \ (lb_f/ft^2)$
11	1.46
24	1.97
42	2.49
75	3.30
125	4.20

Capítulo 5

Flujo a bajo número de Reynolds, Flujo Potencial y Capa Límite

5. 1. Flujo a Bajo Número de Reynolds.

En flujos bidimensionales incompresibles, se puede definir una función que satisfaga la ecuación de continuidad. En coordenadas cartesianas tenemos:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(5. 1)}$$

La función de corriente ψ se define de la siguiente forma:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \textbf{(5. 2)}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad \textbf{(5. 3)}$$

la cual satisface idénticamente a la ecuación **5. 1**. Esta función debe también satisfacer la condición de irrotacionalidad. Esto es, en dos dimensiones, el vector vorticidad se define como:

$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ El componente z (normal al plano de flujo) de esta ecuación es:

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(5. 4)}$$

Substituyendo las ecuaciones **5. 2** y **5. 3** en la ecuación **5. 4**, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \qquad \textbf{(5. 5)}$$

lo que implica que ψ satisface la condición de irrotacionalidad. Como ψ es función de x y y, entonces:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy \qquad \textbf{(5. 6)}$$

Luego, las ecuaciones a ψ constante son:
$0 = -v_y\,dx + v_x\,dy$ lo que implica que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v_y}{v_x} \tag{5. 7}$$

que es la ecuación de líneas de corriente en un plano. Por lo tanto, las líneas a ψ constante son líneas de corriente. Ahora, el flujo volumétrico en un plano podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$Q = -\int_A^B v_y\,dx + \int_A^B v_x\,dy \tag{5. 8}$$

Integrando la ecuación **5. 6** se obtiene:

$$\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = -\int_A^B v_y\,dx + \int_A^B v_x\,dy$$

Por lo tanto: $Q = \psi_2 - \psi_1$ (**5. 9**)

En el caso de un fluido incompresible bidimensional a régimen permanente, la función de corriente puede reducir las ecuaciones de continuidad y de movimiento a una sola ecuación para ψ. Consideremos las ecuaciones mencionadas (ecuación **5. 1**) y las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas sin inercia:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) + \rho\, g_x, \qquad g_x = -\nabla_x \phi \tag{5. 10}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) + \rho\, g_y, \qquad g_y = -\nabla_y \phi \tag{5. 11}$$

Si derivamos la ecuación **5. 10** con respecto a y y la ecuación **5. 11** con respecto a x, al restarlas se eliminarán los términos de presión y gravedad. Esto es:

$$\left(\frac{\partial^3 v_x}{\partial y\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v_y}{\partial x\,\partial y^2} - \frac{\partial^3 v_y}{\partial x^3}\right) = 0 \tag{5. 12}$$

Sustituyendo las ecuaciones **5. 2** y **5. 3** en la ecuación **5. 12** se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}\right) = 0$$

que implica que: $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = 0$

que resulta en la ecuación bi-armónica:

$$\nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0 \tag{5. 13}$$

El laplaciano en coordenadas esféricas es:

$$\nabla^2 \psi \;=\; \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) + \frac{sen\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)$$

Por lo que la ecuación **5. 13** adopta la forma siguiente:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{sen\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]^2 \psi \;=\; 0 \qquad \textbf{(5. 14)}$$

En donde:

$$v_r \;=\; -\frac{1}{r^2\,sen\,\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right), \qquad v_\theta \;=\; \frac{1}{r\,sen\,\theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \qquad \textbf{(5. 15)}$$

Las ecuaciones **5. 14** y **5. 15** satisfacen la ecuación de continuidad en coordenadas esféricas.

La ecuación de Laplace (**5. 5**) se derivó considerando flujo irrotacional, es decir, con vorticidad cero. En coordenadas esféricas, el componente de la vorticidad normal al plano de flujo es:

$$(\nabla \times \underline{v})_\phi \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_\theta) \;-\; \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \;=\; 0 \qquad \textbf{(5. 16)}$$

Substituyendo las ecuaciones **5. 15** en la ecuación **5. 16**, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) \;=\; 0 \qquad \text{y efectuando las derivadas,}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) + \frac{sen\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right) \;=\; 0, \qquad \text{que es la ecuación de Laplace.}$$

Esta demostración expone un resultado general, el hecho de que la función de Laplace satisface la condición de irrotacionalidad.

Ejemplo. Flujo lento alrededor de una esfera.

Consideremos un flujo lento ($R_e \to 0$) de un fluido incompresible, axisimétrico, alrededor de una esfera sólida (ver figura **5.1**).

Puesto que el flujo es planar, el vector velocidad está dado por:

$$\underline{v} \;=\; (v_r\,,\, v_\theta\,,\, 0) \qquad \textbf{(5. 17)}$$

A partir de la ecuación **5. 14** en coordenadas esféricas:

Las condiciones de frontera son: $\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) + \frac{sen\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right]^2 \psi = 0.$

$$v_r \;=\; -\frac{1}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \;=\; 0 \qquad en \qquad r \;=\; R \qquad \textbf{(5. 18)}$$

$$v_\theta \;=\; -\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} \;=\; 0 \qquad en \qquad r \;=\; R \qquad \textbf{(5. 19)}$$

$$\psi \;=\; -\frac{1}{2}\,v_\infty\,r^2\,sen^2\,\theta \qquad cuando \qquad r \to \infty \qquad \textbf{(5. 20)}$$

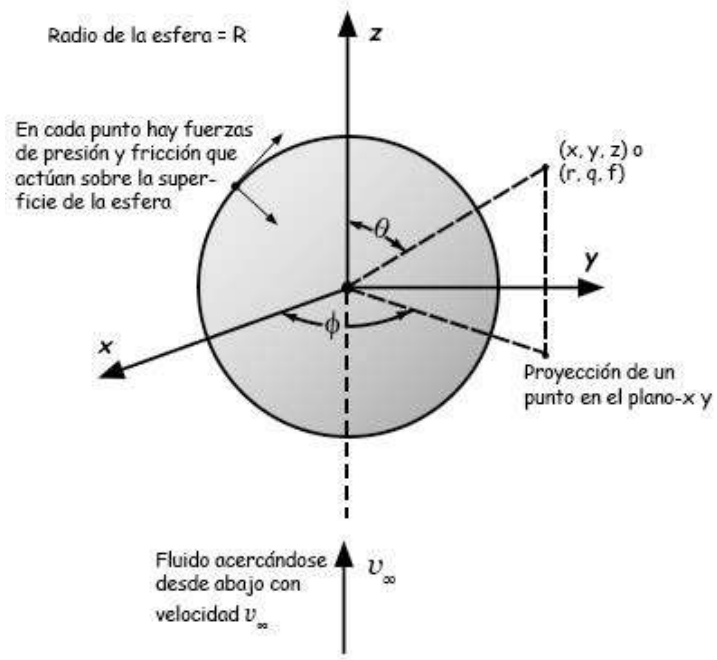


Figura **5.1.** *Flujo ascendente alrededor de una esfera sólida. La velocidad del fluido lejos de la esfera es* v_∞.

La condición **5. 20** implica que, lejos de la esfera:

$$v_r = -\frac{r^2}{r^2\, sen\,\theta}\, v_\infty cos\,\theta\, sen\,\theta = -v_\infty cos\,\theta \qquad \text{cuando} \quad r \to \infty$$

$$v_\theta = -\frac{r}{r\, sen\,\theta}\, v_\infty sen^2\,\theta = -v_\infty sen\,\theta \qquad \text{cuando} \quad r \to \infty$$

Postulamos una solución de la forma: $\psi(r, \theta) = f(r)\, sen^2\theta$ (**5. 21**)

Substituyendo en la ecuación **5. 14**:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) f\, sen^2\,\theta - 2\,\frac{f}{r^2}\, sen^2\,\theta\right]^2 = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\,\frac{1}{r^2}\right]^2 f = 0 \qquad \textbf{(5. 22)}$$

Se propone una solución en series:

$$\psi(r, \theta) = \left(\frac{c_1}{r} + c_2\, r + c_3\, r^2 + c_4\, r^4\right) sen^2\,\theta \qquad \textbf{(5. 23)}$$

La condición de la ecuación **5. 20** implica que:

$$-\tfrac{1}{2}\, v_\infty\, r^2\, sen^2\,\theta = c_2\, r + c_3\, r^3 \qquad \text{de donde} \quad c_4 = 0 \quad \text{y} \quad c_3 = -\tfrac{1}{2} v_\infty$$

Por lo tanto: $\psi(r, \theta) = \left(\frac{c_1}{r} + c_2\, r - \frac{1}{2} v_\infty r^2\right) sen^2\,\theta$ (**5. 24**)

Utilizando las ecuaciones **5. 15** y **5. 16** se calculan los componentes de la velocidad:

$$v_r = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{2\operatorname{sen}\theta}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left(\frac{c_1}{r} + c_2 r - \frac{1}{2}v_\infty r^2\right)\cos\theta$$

$$= \left(-\frac{2c_1}{r^3} - \frac{2c_2}{r} + v_\infty\right)\cos\theta \qquad \textbf{(5. 25)}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(-\frac{c_1}{r^2} + c_2 - v_\infty r\right)\operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \left(-\frac{c_1}{r^3} + \frac{c_2}{r} - v_\infty\right)\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(5. 26)}$$

De acuerdo a las condiciones de frontera (ecuaciones **5. 18** y **5. 19**) se obtiene:

$0 = -\frac{2c_1}{R^3} - \frac{2c_2}{R} + v_\infty$

$0 = -\frac{c_1}{R^3} + \frac{c_2}{R} - v_\infty$

Resolviendo: $c_1 = -\frac{v_\infty R^3}{4}$, $c_2 = \frac{3v_\infty R}{4}$

Así se obtiene el campo de velocidades:

$$v_r = v_\infty\left[1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3}\right]\cos\theta \qquad \textbf{(5. 27)}$$

$$v_\theta = -v_\infty\left[1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3}\right]\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(5. 28)}$$

Distribución de presiones. Para ello, nos referiremos a la relación entre ψ y los gradientes de presión es:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right) f \operatorname{sen}^2\theta\right] \qquad \textbf{(5. 29)}$$

$$\frac{\partial P}{r\partial \theta} = \frac{\mu}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\right) f \operatorname{sen}^2\theta\right] \qquad \textbf{(5. 30)}$$

donde $f = \frac{c_1}{r} + c_2 r - \frac{1}{2}v_\infty r^2.$

Luego, $$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2f}{r^2} = \frac{2c_1}{r^3} - v_\infty - \frac{2f}{r^2} = \frac{-2c_2}{r} = -\frac{3v_\infty R}{2r} \qquad \textbf{(5. 31)}$$

Substituyendo la ecuación **5. 31** en las ecuaciones **5. 29** y **5. 30**, obtenemos:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{3\mu}{2}v_\infty\frac{R}{r^3}(2\cos\theta) = 3\mu v_\infty\frac{R}{r^3}\cos\theta \qquad \textbf{(5. 32)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3\mu}{2}v_\infty\frac{R}{r^2}\operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(5. 33)}$$

Integrando:

$$\int \partial P = \int \frac{\partial P}{\partial r} dr + \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta$$

$$P = -\frac{3}{2} \mu v_\infty \frac{R}{r^2} cos\,\theta + c_0 \qquad \text{donde} \quad c_0 = P_\infty \,(r \to \infty) \tag{5. 34}$$

Distribución de esfuerzos.

Los componentes del esfuerzo son:

$$\tau_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} = 2\mu v_\infty \left[\frac{3R}{2r^2} - \frac{3R^3}{2r^4}\right] cos\,\theta = \mu \frac{3}{R} v_\infty \left[\frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4}\right] \tag{5. 35}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta} &= 2\mu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right] \\ &= -2\mu v_\infty \left[\frac{1}{r} - \frac{3R}{4r^2} - \frac{R^3}{4r^4}\right] cos\,\theta + 2\mu v_\infty \left[\frac{1}{r} - \frac{3R}{2r^2} + \frac{R^3}{2r^4}\right] \\ &= 2\mu v_\infty \frac{1}{R} \left[-\frac{3R^2}{4r^2} + \frac{3R^4}{4r^4}\right] = -\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R} \left[\frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4}\right] \end{aligned} \tag{5. 36}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \mu \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r}\right] \\ &= \mu v_\infty \left[\frac{1}{r} - \frac{3R}{2r^2} - \frac{R^3}{r^4}\right] sen\,\theta + \mu v_\infty \left[-\frac{1}{r} + \frac{3R}{2r^2} - \frac{R^3}{2r^4}\right] \\ &= -\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R} \left[\frac{R^4}{r^4}\right] sen\,\theta \end{aligned} \tag{5. 37}$$

Fuerza normal.

$$F_N = \iint \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\tau_{rr} - p)|_{r=R} R^2 cos\,\theta\, sen\,\theta\, d\,\theta\, d\,\phi$$

De la ecuación **5. 34**, si $P = p + \rho g z = p + \rho g R cos\,\theta$,

entonces $P|_{r=R} = P_\infty - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R} cos\,\theta - \rho g R cos\,\theta, \qquad \tau_{rr}|_{r=R} = 0$

Luego,

$$F_N = -2\pi R^2 \left[\int_0^{\pi} P_\infty sen\,\theta\, cos\,\theta\, d\,\theta - \frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R} \int_0^{\pi} cos^2\theta\, sen\,\theta\, d\,\theta - \rho g \int_0^{\pi} cos^2\theta\, sen\,\theta\, d\,\theta\right]$$

$$F_N = 2\pi R^2 \left[\frac{\mu v_\infty}{R} + \frac{2}{3}\rho g R\right] = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g + 2\pi R \mu v_\infty \tag{5. 38}$$

La ecuación **5. 38** incluye las contribuciones por fuerzas de flotación y de fricción por forma.

Fuerza tangencial (fuerza de fricción).

$$F_T = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} ((-\tau_{r\theta})|_{r=R}\, sen\,\theta) R^2\, sen\,\theta cos\,\theta\, d\,\theta\, d\,\phi = 2\pi R^2 \left[\frac{3\mu v_\infty}{2R}\right] \int_0^{\pi} sen^3\,\theta\, d\,\theta$$

donde se ha incluido que $\tau_{r\theta}|_{r=R} = -\frac{3}{2}\frac{\mu v_\infty}{R} sen\,\theta$, luego,

$$F_T = 4\pi\mu R v_\infty \qquad \textbf{(5. 39)}$$

La fuerza total actuando sobre la esfera es:

$$F = F_N + F_T = 6\pi\mu R v_\infty + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad \textbf{(5. 40)}$$

Coeficiente de arrastre.
Este se define como el cociente del esfuerzo de fricción entre la energía cinética:

$$C_D = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \frac{\frac{6\pi\mu R v_\infty}{\pi R^2}}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \frac{24}{R_e} \qquad \textbf{(5. 41)}$$

Donde el número de Reynolds es $R_e = \frac{2\rho R v_\infty}{\mu}$

5. 2. Flujo Potencial.

Los flujos ideales, en los cuales los efectos viscosos son despreciables (flujos invíscidos) la ecuación de conservación de momentum es la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\nabla\underline{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \underline{f} \qquad \textbf{(5. 42)}$$

Esta ecuación, junto con la ecuación de continuidad, son denominadas ecuaciones de la hidrodinámica. Si el flujo es irrotacional (vorticidad cero) se tiene que:

$$\nabla \times \underline{u} = 0 \qquad \textbf{(5. 43)}$$

lo que implica que $\underline{u} = \nabla\phi$,

(5. 44)

donde ϕ es el potencial de velocidad. Substituyendo la ecuación **5. 44** en la ecuación de continuidad (1), se obtiene:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad \textbf{(5. 45)}$$

Para determinar la presión se utiliza la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \Phi = F(t) \qquad \textbf{(5. 46)}$$

Siendo Φ el potencial gravitatorio.

5. 2.1. Flujo potencial bidimensional.

Si ϕ es función de x y y, entonces:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy \tag{5. 47}$$

Entonces, las líneas correspondientes a ϕ constante son líneas equipotenciales: $0 = v_x dx + v_y dy$ lo que implica que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{v_x}{v_y} \tag{5. 48}$$

Comparando la ecuación **5. 48** con la ecuación **5. 7**:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi} \tag{5. 49}$$

Por lo tanto, las líneas a ϕ constante y aquellas a ψ constante son ortogonales. Ya que

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Así, estas igualdades tienen la forma de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que:

es posible definir el potencial complejo $F(z)$ como $F(z) = \phi + i\psi$ (**5. 50**)

en donde ϕ e $i\psi$ satisfacen $\nabla^2\phi = 0$ y $\nabla^2\psi = 0$. La derivada de $F(z)$ es la velocidad compleja:

$$W(Z) = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y \tag{5. 51}$$

Multiplicando por el complejo conjugado, se obtiene:

$$W\overline{W} = (v_x - i v_y)(v_x + i v_y) = v_x^2 + v_y^2 \tag{5. 52}$$

El producto $\nabla\phi \cdot \nabla\phi$ de la ecuación **5. 46** es igual a $v_x^2 + v_y^2$. En coordenadas cilíndricas, en donde

$$v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \, sen\,\theta\,, \quad v_y = v_r \, sen\,\theta + v_\theta \cos\theta$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} W &= (v_r \cos\theta - v_\theta \, sen\,\theta) - i(v_r \, sen\,\theta + v_\theta \cos\theta) \\ &= v_r(\cos\theta - i \, sen\,\theta) - i v_\theta(\cos\theta - i \, sen\,\theta) = (v_r - i v_\theta)\, e^{-i\theta} \end{aligned} \tag{5. 53}$$

Flujo uniforme.

Este flujo se muestra en la figura **5.2**. En ésta, se grafica el flujo uniforme en la dirección x, dirección y, y con un ángulo α con respecto a la dirección x.

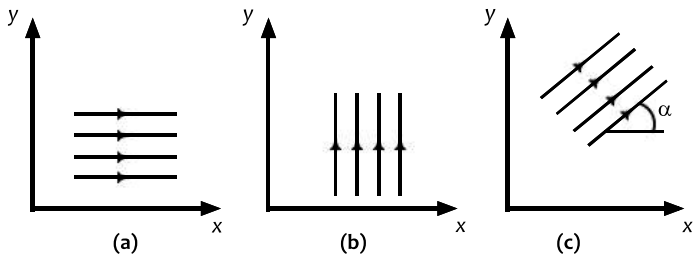


Figura **5.2**. *Flujo uniforme en* ***(a)*** *dirección x,* ***(b)*** *dirección y,* ***(c)*** *ángulo* α *con respecto a x.*

Considerando $F(z) = Ce^{-i\alpha}z$, siendo C y α reales, **(5. 54)**

se tiene que:

$W(z) = v_x - iv_y = C\cos\alpha - iC\,sen\alpha.$

Para este flujo, los componentes de la velocidad son:

$$v_x = C\cos\alpha\,, \qquad v_y = C\,sen\,\alpha$$

Por lo que el potencial complejo con velocidad V es:

$$F(z) = Ve^{i\alpha}z \qquad \textbf{(5. 55)}$$

Cuando $\alpha = 0$, $F(z) = Vz$, y la dirección del flujo es x. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $F(z) = -iV_z$, y la dirección del flujo será y.

Flujo fuente, de sumidero y de vórtice.

En este caso,

$$F(z) = C\log z = C\log\left(Re^{i\theta}\right) = C\log R + iC\theta \qquad \textbf{(5. 56)}$$

Como $F(z) = \phi + i\psi$, entonces $\phi = C\log R$ y $\psi = C\theta$. Luego, $W(z) = \dfrac{C}{z} = \dfrac{C}{R}e^{-i\theta}$,

con componentes, de acuerdo con la ecuación **5. 53**: $v_r = \dfrac{C}{R}, \quad v_\theta = 0$ **(5. 57)**

Se define m, la fuerza de la fuente (flujo volumétrico/grosor) de acuerdo a:

$$m = \int_0^{2\pi} v_r R\,d\theta = \int_0^{2\pi} C\,d\theta = 2\pi C \qquad \textbf{(5. 58)}$$

Substituyendo en la ecuación **5. 56**:

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} log(z) \qquad \textbf{(5. 59)}$$

En el caso de un sumidero, $m \rightarrow -m$. El potencial complejo de la ecuación **5. 56** adopta la forma:

$$F(z) = -iC log(z) \qquad \textbf{(5. 60)}$$

$$F(z) = -iC log\left(Re^{i\theta}\right) = -iC(log R + i\theta) = C\theta - iC log(R)$$

La ecuación **5. 50** sugiere que $\phi = C\theta$ y $\psi = C log(R)$ **(5. 61)**

La velocidad compleja es: $W(z) = \frac{dF(z)}{dz} = \frac{-iC}{z} = \frac{-iC}{R} e^{-i\theta}$

La ecuación **5. 53** da los componentes de la velocidad: $v_r = 0\,, \quad v_\theta = \dfrac{C}{R}$ **(5. 62)**

Para el caso en que $C > 0$, la dirección del flujo es positiva y es el caso de un vórtice. La fuerza del vórtice está caracterizada por la circulación Γ, definida como:

$$\Gamma = \oint \underline{v} \cdot dl = \oint_0^{2\pi} v_\theta R d\theta = \int_0^{2\pi} C d\theta = 2\pi C \qquad \textbf{(5. 63)}$$

Lo que resulta en el potencial complejo siguiente:

$$F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} log(z) \qquad \textbf{(5. 64)}$$

que es la ecuación de un vórtice libre.

En la figura **5.3**, se muestran las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de un flujo fuente y de un flujo de vórtice en el sentido positivo.

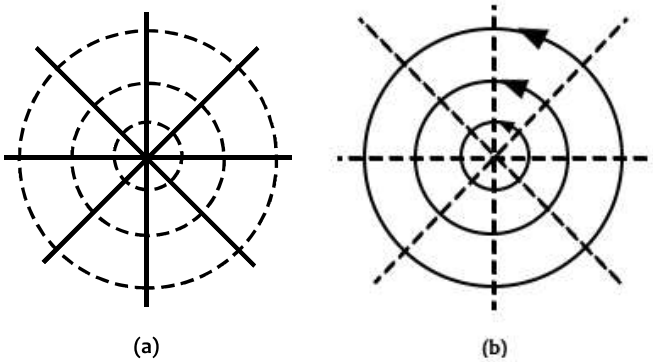


Figura **5.3**. *Líneas de corriente (sólidas) y líneas equipotenciales (punteadas) para:* ***(a)*** *flujo fuente, y para* ***(b)*** *flujo de vórtice.*

Flujo debido a un dipolo.

Considérese una fuente de fuerza m y un sumidero con fuerza $-m$ localizados a una pequeña distancia ε del origen. En este caso, el potencial complejo es:

$$F(z) = \frac{m}{2\pi} log(z+\varepsilon) - \frac{m}{2\pi} log(z-\varepsilon) = \frac{m}{2\pi} log\left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{z}}{1-\frac{\varepsilon}{z}}\right) \qquad \textbf{(5. 65)}$$

Si $\frac{\varepsilon}{z}$ es pequeño, $log\left(1+\frac{\varepsilon}{z}\right) \rightarrow \frac{\varepsilon}{z}$, por lo que:

$$F(z) = \frac{m}{2\pi}\left[\frac{\varepsilon}{z} - \left(-\frac{\varepsilon}{z}\right)\right] = \frac{m\varepsilon}{\pi z} \qquad \textbf{(5. 66)}$$

$$\text{Si } \lim_{\varepsilon\to 0, m\to\infty} m\varepsilon = \pi M, \text{ entonces} \qquad F(z) = \frac{M}{z} \qquad \textbf{(5. 67)}$$

que es el resultado de la superposición de fuente y sumidero fuertes separadas una distancia muy pequeña. La función de corriente se puede calcular de acuerdo a la ecuación **5. 50**:

$$F(z) = \frac{M}{z} = \frac{M}{x+iy} = M\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \phi + i\psi \quad \text{por lo que} \quad \psi = -M\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \textbf{(5. 68)}$$

La ecuación para ψ constante es $x^2 + y^2 + \frac{M}{\psi} = 0$, o lo que es lo mismo:

$$x^2 + \left(y + \frac{M}{2\psi}\right)^2 = \left(\frac{M}{2\psi}\right)^2 \qquad \textbf{(5. 69)}$$

Que es la ecuación de un círculo de radio $\frac{M}{2\psi}$ con centro en $y = \frac{M}{2\psi}$. La velocidad compleja se calcula con las ecuaciones **5. 51** y **5. 52**:

$W(z) = \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{M}{z^2} = -\frac{M}{R^2}e^{-2i\theta} = -\frac{M}{R^2}(cos\,\theta - i\,sen\,\theta)\,e^{-i\theta} = (v_r - iv_\theta)\,e^{-i\theta}$

Los componentes del campo de velocidades son:

$$v_r = -\frac{M}{R^2}cos\,\theta\,, \qquad v_\theta = -\frac{M}{R^2}sen\,\theta\,. \qquad \textbf{(5. 70)}$$

Flujo alrededor de un cilindro.

Resulta de la superposición de flujo rectilíneo (ecuación **5. 55**, $\alpha = 0$) y un dipolo (ecuación **5. 67**):

$$F(z) = Vz + \frac{\mu}{z} \qquad \textbf{(5. 71)}$$

Si $z = ae^{-i\theta}$, entonces,

$$F(z) = Vae^{-i\theta} + \frac{\mu}{a}e^{i\theta} = \left(Va + \frac{\mu}{a}\right)cos\,\theta + i\left(Va - \frac{\mu}{a}\right)sen\,\theta \qquad \textbf{(5. 72)}$$

Por lo que, $\psi = \left(V a - \frac{\mu}{a}\right) sen\,\theta$ **(5. 73)**

Escogiendo $\mu = V a^2$, entonces $\psi = 0$ en $R = a$, por lo que la ecuación **5. 71** se reduce a

$$F(z) = V\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \qquad \textbf{(5. 74)}$$

En la figura **5.4** se exponen los flujos debido a un dipolo (a), y alrededor de un cilindro (b).



Figura **5.4**. *Flujo potencial debido a un dipolo* ***(a)****, y flujo potencial alrededor de un cilindro* ***(b)****.*

5. 2.2. Flujo potencial tridimensional.

Si un flujo posee rotacional nulo, $\nabla \times \underline{u} = 0$, implica que la velocidad es derivable de un potencial $\underline{u} = \nabla \Phi$. La ecuación de continuidad $(\nabla \cdot \underline{u} = 0)$ implica que $\nabla^2 \Phi = 0$.

En coordenadas esféricas, para flujos axisimétricos, la ecuación de Laplace es:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0 \qquad \textbf{(5. 75)}$$

La solución de la ecuación se puede dar por separación de variables:

$$\phi(r, \theta) = R(r)T(\theta) \qquad \textbf{(5. 76)}$$

Que substituyéndola en la ecuación **5. 75** se obtiene:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\frac{1}{T sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\,\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) = l(l+1)$$

Ambos miembros son iguales a una constante. La parte radial de la ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) - l(l+1)R = 0 \qquad \textbf{(5. 77)}$$

Que sugiere una solución de la forma $R(r) = K r^{\alpha}$, con la cual la ecuación **5. 77** se transforma en:

$\alpha(\alpha+1)K r^{\alpha} - l(l+1)K r^{\alpha} = 0$ por lo que $\alpha(1) = l$ y $\alpha(2) = -(l+1)$.

La solución es la combinación lineal de ambas: $R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$ **(5. 78)**

La ecuación para la parte angular es:

$\frac{1}{sen\,\theta}\frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(sen\,\theta\,\frac{\partial\,T}{\partial\,\theta}\right)+l\,(l+1)\,T=0$

Que es la ecuación de Legendre. Su solución es:

$$T_l(\theta)=C_l\,P_l\,(cos\,\theta)+D_l\,Q_l\,cos\,\theta \qquad \textbf{(5. 79)}$$

Como$Q_l\,cos\,\theta$ es la función de Legendre de segunda clase, diverge para $cos\,\theta=\pm 1$ para toda l, implicando que $D_l=0$. $P_l\,(cos\,\theta)$ diverge igualmente, excepto que l sea entero. La solución general es entonces:

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l\,(cos\,\theta)\left(A_l\,r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right) \qquad \textbf{(5. 80)}$$

$P_l(x)=\frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l,\ x=cos\,\theta$ que son los polinomios de Legendre de orden l.

Los tres primeros son: $P_0(x)=1, P_1(x)=xP_2(x)=\left(3x^2-1\right)$.

Flujo uniforme.

Las soluciones de la ecuación **5. 80** para flujo uniforme se obtienen asignando los siguientes valores: $B_l=0, A_l=U$ para $l=1$ y $A_l=0$ para $l\neq 1$. Esto es, según la ecuación **5. 80**,

$$\phi(r,\theta)=U\,r\,cos\,\theta \qquad \textbf{(5. 81)}$$

Los componentes de la velocidad son:

$$v_r=\frac{\partial\,\phi}{\partial\,r}=U\,cos\,\theta\,,\quad v_\theta=\frac{\partial\,\phi}{r\,\partial\,\theta}=-U\,sen\,\theta \qquad \textbf{(5. 82)}$$

La función de corriente correspondiente está dada por la ecuación **5. 15**:

$$v_r=-\frac{1}{r^2\,sen\,\theta}\frac{\partial\,\psi}{\partial\,\theta}=U\,cos\,\theta\,,\quad v_\theta=\frac{1}{r\,sen\,\theta}\frac{\partial\,\psi}{\partial\,r}=-U\,sen\,\theta \qquad \textbf{(5. 83)}$$

De donde se encuentra ψ. La primera ecuación nos da $\psi=\frac{1}{2}U\,r^2\,sen^2\,\theta+f(r)$ y la segunda $\psi=\frac{1}{2}U\,r^2\,sen^2\,\theta+f(\theta)$, por lo que $f(r)=f(\theta)=0$. El gasto volumétrico es:

$Q=\int v_r\,n_r\,(r\,sen\,\theta)\,r\,d\theta=\frac{1}{2}U\,r^2\,sen^2\,\theta$

Flujo fuente y sumidero.

En este caso, en la ecuación **5. 80** tenemos: $A_l = 0$, $B_l = 0$ para $l \neq 0$ y $B_l = B_0$ para $l = 0$, y $P_0(cos\,\theta) = 1$. Luego entonces,

$$\phi(r,\theta) = \frac{B_0}{r} \tag{5. 84}$$

$$\text{de donde } v_r = -\frac{B_0}{r^2}, \quad v_\theta = 0 \tag{5. 85}$$

El gasto volumétrico es:

$$Q = \iint v_r\, n_r\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{r^2}(r\,sen\,\theta)\, r\, d\theta\, d\phi = -4\pi B_0$$

$$\text{Que implica:} \quad \phi(r,\theta) = \frac{-Q}{4\pi r} \tag{5. 86}$$

Flujo debido a un dipolo.

Este flujo se describe por superposición de fuente y sumidero, haciendo tender la distancia entre los dos a cero. A partir de la ecuación **5. 86**:

$$\phi(r,\theta) = \frac{-q}{4\pi r} + \frac{q}{4\pi(r-\delta r)} = \frac{-q}{4\pi r}\left(1 - \frac{1}{1-\frac{\delta r}{r}}\right) \tag{5. 87}$$

$$\phi(r,\theta) \approx \frac{q}{4\pi r}\frac{\delta r}{r}$$

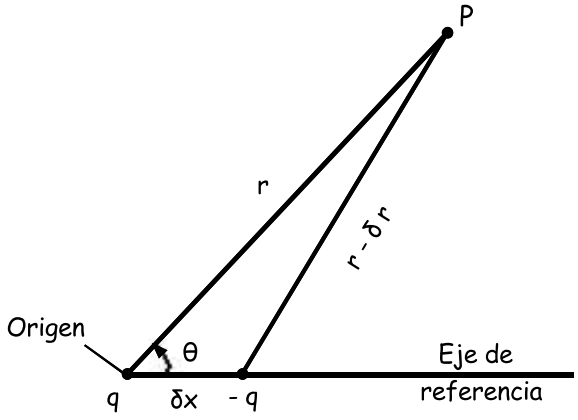


Figura **5.5**. *Dipolo con magnitudes q y $-q$ separados por una distancia δ.*

En la figura **5.5** se observa la construcción geométrica a partir de la cual se deducen las siguientes expresiones:

$(r-\delta r)^2 = r^2 sen^2\theta + (r\,cos\theta - \delta x)^2$ de donde $\delta r = \delta x\, cos\,\theta$,

por lo que: $\phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi r}\frac{\delta x}{r}\,cos\,\theta$

Ahora, tendiendo el límite siguiente:

$$\lim_{q\to\infty,\,\delta x\to 0} \phi(r,\theta) = \frac{M}{4\pi r}\frac{1}{r}\cos\theta \tag{5. 88}$$

Los componentes de la velocidad son:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{M}{2\pi r^3}\cos\theta = \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{5. 89}$$

$$v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{M}{4\pi r^3} sen\,\theta = \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{5. 90}$$

Integrando la ecuación **5. 89**: $\psi(r,\theta) = -\frac{M}{4\pi r} sen^2\theta + f(r)$.

Integrando la ecuación **5. 90**: $\psi(r,\theta) = -\frac{M}{4\pi r} sen^2\theta + g(\theta)$.

Por lo tanto, $g = f = 0$. La función de corriente resulta en:

$$\psi(r,\theta) = -\frac{M}{4\pi r} sen^2\theta \tag{5. 91}$$

Flujo alrededor de una esfera.

La función de corriente por superposición de flujo uniforme con flujo de dipolo es:

$$\psi(r,\theta) = \frac{1}{2}U r^2 sen^2\theta - \frac{M}{4\pi r} sen^2\theta \tag{5. 92}$$

Definiendo la superficie que corresponde a $\psi = 0$, tenemos que:

$$0 = \frac{1}{2}U r_0^2 sen^2\theta - \frac{M}{4\pi r} sen^2\theta, \qquad \text{de donde } r_0 = \left(\frac{M}{2\pi U}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Entonces, si $a = r_0,\ M = 2\,\pi\,U\,a^3$:

$$\psi(r,\theta) = -\frac{1}{2}U\left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right) sen^2\theta \tag{5. 93}$$

Y el potencial es:

$$\phi(r,\theta) = U r\cos\theta + \frac{2\pi U a^3}{4\pi r^2}\cos\theta = U\left(r + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta \tag{5. 94}$$

Los componentes del campo de velocidades son:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = U\cos\theta - \frac{a^3}{r^3}U\cos\theta = U\left[1 - \frac{a^3}{r^3}\right]\cos\theta$$

$$v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -U\,sen\,\theta - \frac{U}{2}\frac{a^3}{r^3} sen\,\theta = -U\left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right] sen\,\theta \tag{5. 95}$$

5. 3. Capa Límite.

La figura **5.6** expone la capa sólida en contacto con el fluido que se desplaza en dirección $+x$.

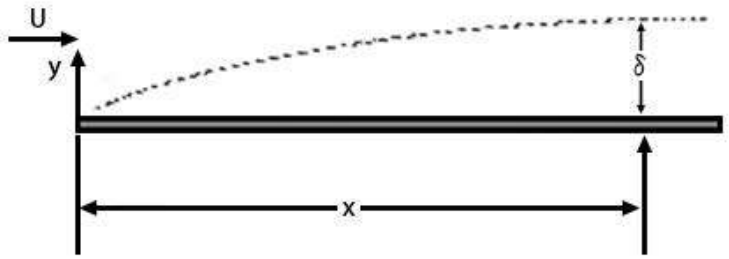


Figura **5.6**. *Capa de fluido de grosor δ en contacto con una superficie sólida.*

Las ecuaciones de la capa límite se pueden derivar de las ecuaciones de Navier-Stokes (N-S) llevando a cabo un procedimiento límite cuando el número de Reynolds es muy grande. La formulación sigue aquella derivada por Prandtl. Dentro de la capa límite las magnitudes de las variables siguen el siguiente orden: $v_x \sim U$, $v_y \sim U\,\frac{\delta}{x}$, $\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{x}$, $\frac{\partial}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta}$. En un flujo bidimensional, las ecuaciones de N-S son:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{5. 96}$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) \tag{5. 97}$$

Tomando en cuenta los órdenes de magnitud indicados:

$$\frac{U^2}{x} + \frac{U^2}{x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{U}{x^2} + \frac{U}{\delta^2}\right) \tag{5. 98}$$

$$\frac{\delta U^2}{x^2} + \frac{\delta U^2}{x^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\delta U}{x^3} + \frac{U}{x\delta}\right) \tag{5. 99}$$

Como $\frac{U}{x^2} \ll \frac{U}{\delta^2}$, entonces $\frac{U^2}{x} \sim \nu\,\frac{U}{\delta^2}$ (son del mismo orden), por lo que $\delta^2 \sim \nu\,\frac{x}{U}$.

Por lo tanto, el grosor de la capa límite crece con $\sqrt{x}$. Comparando términos en la ecuación **5. 99**:

$\frac{\delta U^2}{x^2} \sim \nu\,\frac{U}{x\delta}$, que implica que $\frac{\delta^2}{x^2} \sim \nu\,\frac{1}{xU}$ que a su vez implica que $Re \gg 1$.

Las ecuaciones **5. 96** y **5. 97** pueden ser aproximadas de la siguiente forma:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \tag{5. 100}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{5. 101}$$

junto con la ecuación de continuidad: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ **(5. 102)**

El flujo lejos de la capa límite es flujo potencial, que se describe por la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = constante$$

$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = U^2\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$, por lo que la ecuación **5. 100** se reduce a:

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \textbf{(5. 103)}$$

Con condiciones de frontera:

$$v_x(x,0) = 0, \quad v_y(x,0) = 0, \quad v_x(x, y\to\infty) \to U(x) \quad \textbf{(5. 104)}$$

Solución de Blasius (exacta).

En este caso U es constante. Las ecuaciones a resolver son:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Estas ecuaciones pueden reducirse a una sola ecuación por medio de la función de corriente que satisface la ecuación de continuidad:

$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, de tal forma que las anteriores ecuaciones se transforman en:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = \nu\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \textbf{(5. 105)}$$

La propuesta de solución: $\psi(x,y) \sim f(\eta)$, $\eta \sim \frac{y}{x^{1/2}}$ tal que $\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}$ **(5. 106)**

El componente de la velocidad queda expresado en términos de la variable η y sus derivadas.

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial f}f'(\eta)\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

Esto sugiere que $\psi = \sqrt{vUx}\, f(\eta)$, porque $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{vUx}\, f' \sqrt{\frac{U}{vx}} = f'U$

Como $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x}$, entonces:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{vUx}\frac{\partial f}{\partial x} + f\sqrt{vU}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$

$$= \sqrt{vUx}\, f'\left(\frac{-\eta}{2x}\right) + \frac{f}{2}\sqrt{v\frac{U}{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{v\frac{U}{x}}\,(f - \eta f')$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} f'U = U\frac{\partial f'}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U f''\sqrt{\frac{U}{vx}}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} f''U\sqrt{\frac{U}{vx}} = U\frac{\partial f''}{\partial \eta}\sqrt{\frac{U}{vx}}\sqrt{\frac{U}{vx}} = \frac{U^2}{vx} f'''$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\sqrt{\frac{U}{vx}}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Uv}{x}}\,(f - \eta f')\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{U}{x}\,(f' - \eta f'' - f') = -\frac{1}{2}\frac{U}{x}\eta f''$$

Substituyendo en la ecuación **5. 105** se obtiene: $f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$ **(5. 107)**

Sujeto a las condiciones: $f(0) = f'(0) = 0$

$$f'(\eta \to \infty) \to 1 \qquad \textbf{(5. 108)}$$

La función de corriente se obtiene de:

$$\psi = \sqrt{vUx}\, f\left(\frac{y}{\sqrt{vx}}\sqrt{U}\right) \qquad \textbf{(5. 109)}$$

Cálculo del esfuerzo:

$$\tau_0(x) = \mu\frac{\partial v_x}{\partial y}(x,0) = \mu\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(x,0) = \mu\sqrt{\frac{U^3}{vx}} f''(0) \qquad \textbf{(5. 110)}$$

El coeficiente de fricción: $\frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re}}$ donde $f''(0) = 0.332$ **(5. 111)**

La fuerza de arrastre:

$$F_x = \int_0^x \tau(\xi)\, d\xi = \mu\sqrt{\frac{U^3}{v}} f''(0)\int_0^x \xi^{-1/2} d\xi = 2f''(0)\sqrt{\mu\rho x U^3} \qquad \textbf{(5. 112)}$$

El coeficiente de arrastre: $C_D = \frac{\frac{F(x)}{x}}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{4f''(0)}{\sqrt{Re}}$ **(5. 113)**

Soluciones aproximadas

A partir de la integral de momentum (ver deducción en el **Apéndice B)** es posible obtener soluciones para la capa límite de la placa plana:

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|\bigg|_{y=0} = \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \rho\, v_x\,(U - v_x)\, dy \qquad \textbf{(5.114)}$$

Se analizarán dos casos, proponiendo varias distribuciones de velocidad. La primera es:

a) Perfil de velocidades

$$\frac{v_x}{U} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right), + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad \textbf{(5.115)}$$

con condiciones de frontera:

$$v_x(x, 0) = 0,\ v_y(x, \delta) = U,\ \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, \delta) = 0 \qquad \textbf{(5.116)}$$

Substituyendo las condiciones **5.116** en la ecuación **5.115** obtenemos:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_2 = -1. \qquad \text{Luego: } \frac{v_x}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \qquad \textbf{(5.117)}$$

La ecuación **5.114** involucra la siguiente integral

$$\int_0^{\delta} v_x\,(U - v_x)\, dy = U^2 \int_0^{\delta} \frac{v_x}{U}\left(1 - \frac{v_x}{U}\right) dy = U^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right)\left(1 - \frac{2y}{\delta} + \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy$$

$$= \delta U^2 \int_0^1 \left(2\eta - \eta^2\right)\left(1 - 2\eta + \eta^2\right) d\eta = \frac{2}{15}\,\delta U^2 \qquad \textbf{(5. 118)}$$

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|\bigg|_{y=0} = \mu U \frac{\partial}{\partial y}\bigg|\bigg|2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\bigg|\bigg|_{y=0} = 2\mu\frac{U}{\delta}$$

Substituyendo esta expresión en la ecuación **5.114** obtenemos:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{15}\,\delta U^2\right) = 2\mu\frac{U}{\delta}$ lo que implica que $\delta\, d\delta = 15\,\frac{v}{U}$, con condición de frontera en $\delta||_{y=0} = 0$. Integrando:

$$\delta = \sqrt{30}\sqrt{\frac{vx}{U}}, \qquad \text{que implica que} \qquad \frac{\delta}{x} = \frac{5.48}{\sqrt{Re}} \qquad \textbf{(5. 119)}$$

El esfuerzo resulta en:

$$\frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\mu U}{\delta}\frac{2}{\rho U^2} = \frac{0.73}{\sqrt{Re}} \tag{5. 120}$$

b) Nuevo perfil de velocidades.

$$\frac{v_x}{U} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{5. 121}$$

En este caso se obtiene:

$$\tau_0 = \frac{3}{2}\mu\frac{U}{\delta} = \frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho U^2\delta\right) \tag{5. 122}$$

Se obtiene el grosor de la capa $\delta = 4.64\sqrt{\frac{vx}{U}}$ y luego: $\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re}}$ (5. 123)

$$\frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{3\mu U}{2\delta}\frac{2}{\rho U^2} = \frac{3}{4.64}\frac{\mu}{\rho U x}\sqrt{Re} = \frac{0.646}{\sqrt{Re}} \tag{5. 124}$$

El cual es más cercano al valor exacto de 0.664. En este caso, la fuerza de fricción (arrastre) es:

$$F_x = 2\int_0^x \tau_0\, dx = 2\frac{3}{2}\mu U\int_0^x \frac{1}{\delta}\, dx = 2\frac{3}{4.64}\sqrt{\mu\rho x U^3} = 1.293\sqrt{\mu\rho x U^3} \tag{5. 125}$$

Apéndice A.

1. Flujo potencial alrededor de un cilindro. Cálculo del campo de velocidades en la superficie del cilindro y el campo de presiones.

   A partir de la velocidad compleja $W(z) = \frac{\partial F}{\partial z}$ en donde $F(z) = V\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$ (ver ecuación **5. 74**), tenemos que $W(z) = V\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = V\left(1 - \frac{a^2}{R^2}e^{(-2i\theta)}\right) = v_x - i v_y$.

   Luego: $W(z) = V - V\frac{a^2}{R^2}(cos2\theta - isen2\theta)$

   $$v_x = V\left[1 - \frac{a^2}{R^2}cos2\theta\right]$$

   $$v_y = -V\left[\frac{a^2}{R^2}sen2\theta\right] \qquad \textbf{(A-1)}$$

   En la superficie del cilindro:

   $$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = V^2\left[(1 - cos2\theta)^2 + (sen2\theta)^2\right] = 4V^2 sen^2\theta \qquad \textbf{(A-2)}$$

   El campo de presiones podemos calcularlo a partir de la ecuación de Bernoulli:

   $$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_\infty \qquad \textbf{(A-3)}$$

   $$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho V^2\left(1 - 4sen^2\theta\right) \qquad \textbf{(A-4)}$$

2. Flujo alrededor de una esfera.

   A partir de las ecuaciones **5. 95**, calculamos la velocidad en la superficie de la esfera:

   $$v^2 = v_\theta^2 = U^2\left(\frac{3}{2}\right)^2 sen^2\theta \qquad \textbf{(A-5)}$$

   Por la ecuación **A-3**, tenemos:

   $$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{9}{4}U^2 sen^2\theta\right) = \frac{1}{2}\rho U^2\left[1 - \frac{9}{4}sen^2\theta\right] \qquad \textbf{(A-6)}$$

Apéndice B.

La integral de momentum.

A partir de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(B-1)}$$

y de la ecuación de movimiento:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \textbf{(B-2)}$$

Con la equivalencia siguiente:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x^2}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

Substituyendo en la ecuación **B-2**:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Substituyendo en el segundo término la ecuación **B-1**:

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \text{que es equivalente a:}$$

$$\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \textbf{(B-3)}$$

sujeta a las condiciones:

$$v_x(d, 0) = 0, \quad v_x(d, \delta) = U, \qquad \nu \frac{\partial v_x(x, 0)}{\partial y} = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad \textbf{(B-4)}$$

Aplicando **B-4** a **B-3** se obtiene:

$$\int_0^\delta \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy + v_x v_y \quad = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad \textbf{(B-5)}$$

A partir de la ecuación **B-1** obtenemos:

$$v_y(x, \delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \qquad \text{que se puede substituir en } \textbf{B-5} \text{ para obtener:}$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} dy - U \int_0^{\delta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

Aplicando la regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - U^2 \frac{d\delta}{dx} - \left(U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x dy - U^2 \frac{d\delta}{dx} \right) = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad \textbf{(B-6)}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} U v_x dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad \text{por lo tanto:}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (U - v_x) dy = \frac{\tau_0}{\rho} \qquad \textbf{5. 114}$$

Capítulo 6

Transporte Interfacial de Momentum

Este capítulo consta de 3 partes: cálculo de coeficientes de fricción en tuberías, en cuerpos sumergidos y en medio poroso. El concepto fundamental es la fuerza de fricción que ejerce el fluido sobre la superficie sólida. Esta fuerza puede descomponerse en aquella asociada al fluido en reposo y la asociada al fluido en movimiento. Esta última es proporcional a la energía cinética del fluido y al área característica.

6. 1. Coeficiente de Fricción en Tuberías.

En este caso la fuerza de fricción es:

$$F = \left(\frac{1}{2}\rho \langle v\rangle^2\right)(2\pi RL)\, f \tag{6.1}$$

La constante de proporcionalidad es *f*, el coeficiente de fricción o factor de fricción. En tuberías, la fuerza *F* está dada por:

$$F = \pi R^2 \Delta p \tag{6.2}$$

$$\text{por lo que} \quad f = \frac{\pi R^2 \Delta p}{(2\pi RL)\left(\frac{1}{2}\rho \langle v\rangle^2\right)} = \frac{\Delta pR/2L}{\left(\frac{1}{2}\rho \langle v\rangle^2\right)} = \frac{\tau_w}{\left(\frac{1}{2}\rho \langle v\rangle^2\right)} \tag{6.3}$$

donde τ_w es el esfuerzo en la pared (ecuación 3.69). La velocidad promedio en un tubo (ver ecuación 3.73) para un fluido Newtoniano en régimen laminar es: $\langle v\rangle = \frac{\Delta pR^2}{8\mu L}$. Luego, el factor de fricción sigue la siguiente expresión:

$$f = \frac{\Delta pR/2L}{\left(\frac{1}{2}\rho \langle v\rangle\right)}\left(\frac{\Delta pR^2}{8\mu L}\right) = \frac{8\mu}{\rho \langle v\rangle R} = \frac{16}{R_e} \tag{6.4}$$

$$\text{donde el número de Reynolds es:} \quad R_e = \frac{\rho \langle v\rangle D}{\mu} \tag{6.5}$$

La ecuación **6. 3** describe al factor de fricción f como la relación entre la energía disipada por fricción por unidad de volumen entre la energía cinética del fluido, mientras que el número de Reynolds R_e representa la relación entre las fuerzas de inercia con respecto a las fuerzas viscosas. Conceptualmente, el producto $f\,R_e$ es una constante.

En flujo turbulento, la relación entre f y R_e no es lineal, siendo función de la rugosidad de la pared del tubo $\left(\frac{k}{D}\right)$ donde k es el coeficiente de rugosidad. En tubos rectos, la transición entre flujo laminar y turbulento se ubica en $R_e \approx 2100$. La variación del factor de fricción con el número de Reynolds se encuentra en la Figura **6.1**.

En ella, es posible observar la zona de flujo laminar a $R_e < 2100$, en donde $log(f) versus log(R_e)$ tiene pendiente de -1 y ordenada al origen $(x = log1 = 0,\ y = log16)$. Existe una expresión analítica para tubo liso, que es $f = \frac{0{,}08}{R_e^{1/4}}$. En la zona de flujo turbulento, el factor de fricción, además de ser función de R_e, es función de la rugosidad $\frac{k}{D}$.

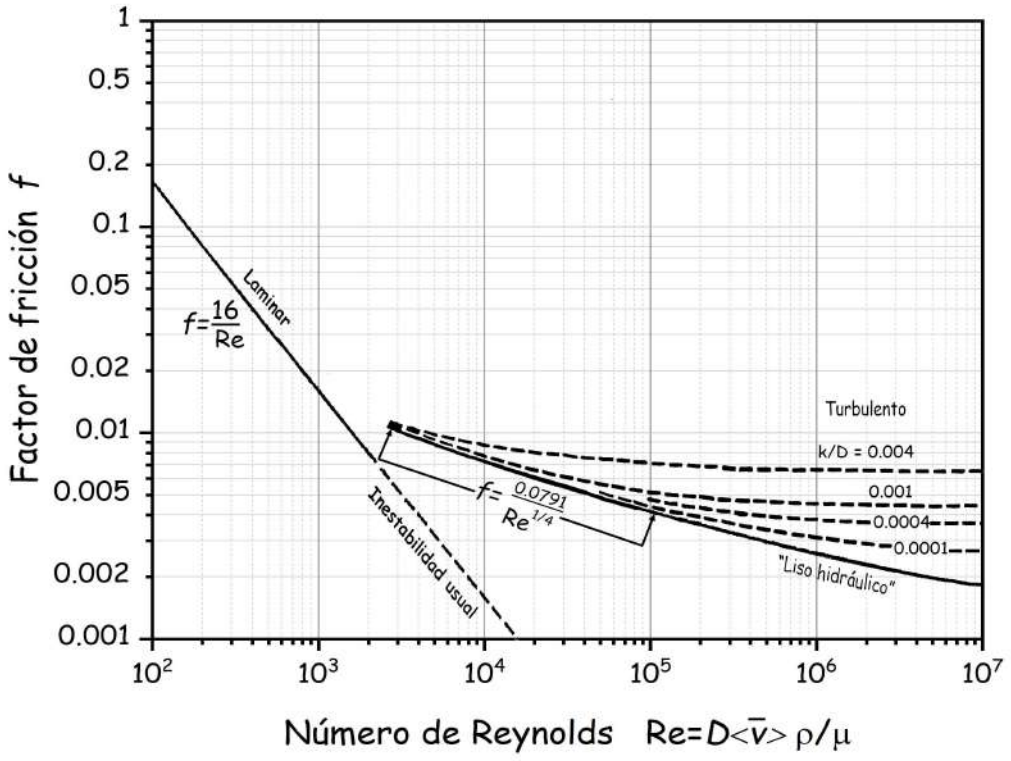


Figura **6.1**. *Factor de fricción versus número de Reynold*s.

A partir de esta gráfica, es posible resolver dos tipos de problemas:

a. Problema directo: Si se conoce el número de Reynolds, entonces es posible obtener f de la Figura **6.1** y utilizar la ecuación **6. 3** para obtener la caída de presión Δp.

b. Problema inverso: No se conoce la velocidad del fluido v (o R_e) y es necesario encontrar el flujo volumétrico Q a partir de Δp. Existen dos métodos para su resolución:

Método A. Puesto que el producto $R_e\sqrt{f} = \dfrac{D\langle v\rangle\rho}{\mu}\left(\dfrac{\Delta p\frac{R}{L}}{\rho\langle v\rangle^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{D\rho}{\mu}\left(\dfrac{\Delta p\, D}{2\rho\, L}\right)^{\frac{1}{2}}$ (**6. 6**)

es independiente de la velocidad v, se construye una gráfica de $R_e\sqrt{f}$ *versus* R_e (Figura **6.2**).

A partir de ella, dado un valor conocido del producto $R_e\sqrt{f}$, esta gráfica proporciona el número de Reynolds R_e a un valor dado de $\frac{k}{D}$.

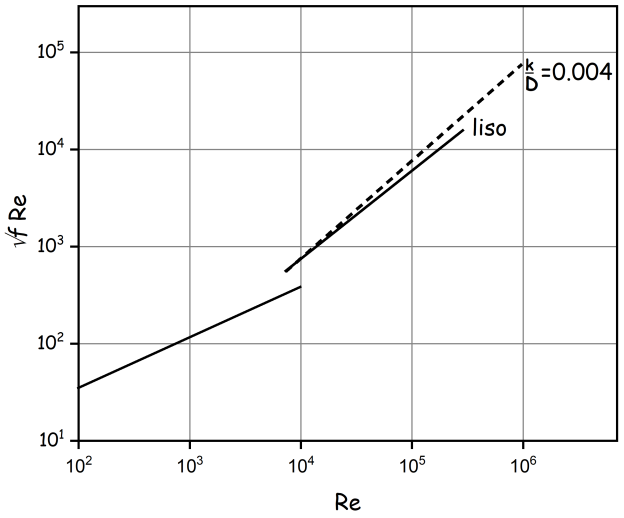


Figura **6.2.** *Producto* $Re\sqrt{f}$ *versus número de Reynolds para valores distintos de rugosidad.*

Método B. Se grafica la ecuación **6. 6**. Si $C = \frac{D\rho}{\mu}\left(\frac{\Delta p\, D}{2\rho\, L}\right)^{\frac{1}{2}}$, entonces $log\left(R_e\sqrt{f}\right) = log C$ que implica que $log f = log 2\, log C - 2\, log R_e$. Esta es una línea recta con pendiente -2 y ordenada $log C^2$. La intersección con la curva de $log f$ *versus* $log R_e$ a un valor de rugosidad $\frac{k}{D}$ dado, permite conocer el número de Reynolds requerido.

Ejemplos.

a. Problema directo.
Se calculará la caída de presión por unidad de longitud de la dietilanilina (a 20 $°C$, su viscosidad y densidad son $\mu = 1{,}95\,cp$, $\rho = 0{,}935 g/cm^3$) en un tubo liso de diámetro de $3\,cm$ y con un flujo másico de $1{,}028\,g/s$.

Solución.

El gasto másico es $w = \rho\ \langle v \rangle\ S$. El número de Reynolds $R_e = \frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu} = \frac{D\left(\frac{w}{S}\right)}{\mu} = \frac{4wD}{\pi D^2 \mu} = \frac{4w}{\pi D \mu}$

$R_e = \frac{4(1{,}028)}{\pi(0{,}0195)3} = 2{,}24 \times 10^4$. De la relación para tubo liso $f = \frac{0{,}08}{R_e^{1/4}}$ obtenemos $f = 0{,}0063$.

Por lo tanto, $\frac{\Delta p}{L} = \frac{4}{D}\left(\frac{1}{2}\rho\ \langle v\rangle^2\right) f = 95\ dinas/cm^3$.

b. Problema inverso.
Determinar el flujo másico de agua a 68 $°C$ en un tubo ($L = 1000\ ft$, $D = 0{,}665\ ft$). Su viscosidad y densidad son $6{,}93 \times 10^{-4}\ lbm/ft\,s$ y $62{,}4\ lbm/ft^3$, respectivamente, con una caída de presión de 3 *psi*. La rugosidad es de $\frac{k}{D} = 2{,}3 \times 10^{-4}$.

Solución.

Primero se calcula $R_e\sqrt{f}, = \frac{D\rho}{\mu}\left(\frac{\Delta p\, D}{2\rho L}\right)^{\frac{1}{2}} = 1{,}63 \times 10^4$

$\Delta p = 3\,\frac{\overline{lb}}{in^2}\left(144\,\frac{in^2}{ft^2}\right)\left(\frac{32{,}2\,\frac{lbm\,ft}{s^2}}{\overline{lb}}\right) = 1{,}39 \times 10^4$

Ambos métodos, **a** y **b** dan $R_e = 2{,}4 \times 10^5$.

El gasto másico es $w = \frac{R_e \pi \mu D}{4} = \frac{\frac{1}{4}\left(2{,}4\times10^5\right)(0{,}665)\left(6{,}93\times10^{-4}\right) lbm\,(ft)}{(ft)\,s} = 3{,}2 \times 10^5\ lbm/hr$

6. 2. Factores de Fricción en Cuerpos Sumergidos. Esferas.

La fuerza de fricción en este caso es:

$$F = \left(\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2\right)(\pi R^2) f \qquad \textbf{(6.7)}$$

La determinación de F para cualquier fluido debe considerar la ley de Newton en una dirección:

$$m_s \frac{dv}{dt} = m_s g - mg - f(\pi R^2)\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) \qquad \textbf{(6.8)}$$

mg es la fuerza de flotación, m es la masa desplazada de fluido, m_s es la masa de la esfera y v es la velocidad de la esfera. A tiempos largos, $\frac{dv}{dt} \rightarrow 0$ y $v \rightarrow v_\infty$, donde v_∞ es la velocidad terminal de la esfera. De la ecuación **6.8** se obtiene:

$$f = \frac{(m_s - m)g}{\pi R^2 (\frac{1}{2}\rho v_\infty^2)} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)g}{\pi R^2 v_\infty^2}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} = \frac{4}{3}\frac{Dg}{v_\infty^2}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \qquad \textbf{(6.9)}$$

En flujo laminar, la Ley de Stokes (ecuación **5.40**) es $F = 6\pi\mu R v$ **(6.10)**

Por la ecuación **6.7 s**e obtiene $f = \frac{6\pi\mu R \quad v_\infty}{\pi R^2 (\frac{1}{2}\rho v_\infty^2)} = \frac{12\mu}{\rho R v_\infty} = \frac{24}{R_e}$ **(6.11)**

Substituyendo *f* de la ecuación **6.9** en la ecuación **6.8** obtenemos:

$$m_s \frac{dv}{dt} = (m_s - m)g - (\pi R^2)\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)\left[\frac{(m_s - m)g}{(\pi R^2)\left(\frac{1}{2}\rho v_\infty^2\right)}\right] = (m_s - m)g - (m_s - m)g\frac{v^2}{v_\infty^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m_s - m}{m_s} g\left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right) = \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s} g\left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right) \quad \text{donde} \quad v_\infty^2 = \frac{4}{3}\frac{Dg}{f}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \qquad \textbf{(6.12)}$$

Al igual que en el caso de las tuberías, se puede construir una gráfica del factor de fricción a partir de las ecuaciones **6.9** y **6.10** en función de $Re = \rho\, v_\infty\, D/\mu$. La figura **6.3** muestra que la zona de flujo laminar se encuentra a $Re < 1$, en donde la pendiente es -1 e intercepta a la ordenada en log (24) (ver ecuación **6.11)**. A muy elevados números de *Re*, el factor de fricción alcanza una zona asintótica con valor de 0.44. En la figura **6.3** se expone la gráfica del factor de fricción en función del número de Reynolds para esferas.

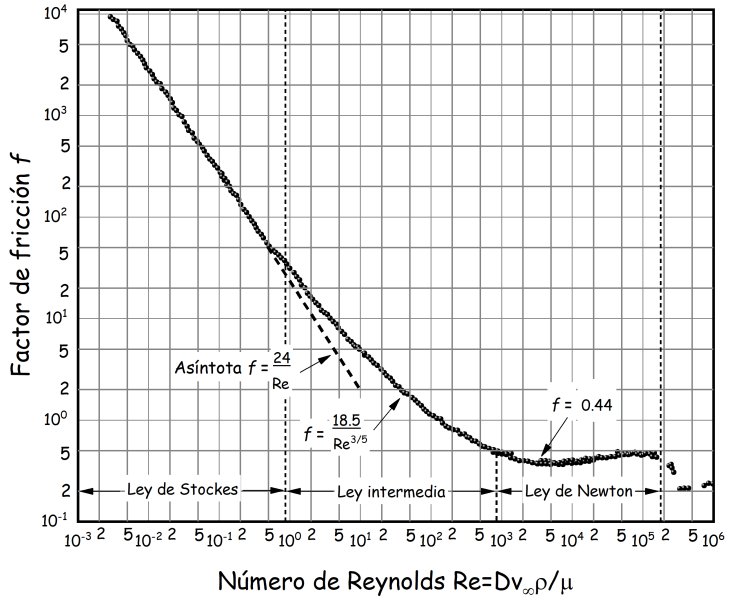


Figura **6.3.** *Factor de fricción (f) en función del número de Reynolds (Re) para el flujo alrededor de esferas.*

Para alcanzar números de *Re* grandes, es necesario que $\rho_s >> \rho$. En este caso, la ecuación **6.12** se reduce a:

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2}\right) \qquad \textbf{(6.13)}$$

$$v_\infty^2 = \frac{4}{3}\frac{Dg}{0.44}\frac{\rho_s}{\rho} \qquad \textbf{(6.14)}$$

La ecuación **6.13** se puede integrar: $\int_0^v \frac{1}{1-\frac{v^2}{v_\infty^2}}\, dv = gt$

El resultado de la integración es: $v_\infty tanh^{-1}(\frac{v}{v_\infty}) = gt$

$$\frac{v}{v_\infty} = \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) \qquad \textbf{(6.15)}$$

La distancia recorrida se obtiene de integrar el perfil de velocidades:

$\frac{dz}{dt} = v_\infty \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)$ integrando:

$$z = v_\infty \int_0^t \tanh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right) dt = \frac{v_\infty^2}{g}\ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_\infty}\right)\right] \qquad \textbf{(6.16)}$$

Las regiones asintóticas son las siguientes:

A tiempos cortos ($t \to 0$) las ecuaciones **6.15** y **6.16** tienden a:

$$v \to \mathrm{gt}, \qquad z \to \frac{v_\infty^2}{g}\ln\left[1 + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{v_\infty^2}\right] = \frac{v_\infty^2}{g}\left[\frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{v_\infty^2}\right] = \frac{1}{2}gt^2$$

A tiempos largos ($t \to \infty$) las ecuaciones **6.15** y **6.16** tienden a:

$$v \to v_\infty, \qquad z \to \frac{v_\infty^2}{g}\frac{gt}{v_\infty} = v_\infty t$$

A tiempos cortos se obtiene la expresión de caída libre (la velocidad de la esfera varía linealmente con el tiempo) y a tiempos largos, la velocidad tiende a una constante v_∞.

Si se observa la ecuación **6.9,** que es la definición general del factor de fricción, existen dos problemas inversos: el primero, en el cual se obtiene una expresión independiente de v_∞, y la segunda, que es independiente del diámetro de la esfera *D*. Estas son, respectivamente:

$fR_e^2 = C_1$ y $f/R_e = C_2$

Ejemplo.

Esferas con una densidad de ρ_s = 2.62 g/cm^3 sedimentan en CCl_4, el cual a la temperatura normal tiene una densidad de 1.59 g/cm^3 y viscosidad de 9.6 x 10^{-3} poises. La velocidad terminal es de 65 cm/s. ¿Cuál es su diámetro?

El producto del factor de fricción con el número de Reynolds que es independiente del diámetro es $f/R_e = C_2$. Esto es:

$f/Re = \frac{4}{3}\frac{g\mu}{\rho v_\infty^3}\frac{\rho_s - \rho}{\rho} = C_2 = 1.86 \times 10^{-5}$.

Log (f) = log (Re) + log (C_2)

Log (f) en función de log (Re) describe una recta con pendiente 1. Para $Re = 10^5$, $f = 1.86$. Punto y pendiente generan una recta que intersecta a la gráfica de la figura 6.3 a un valor de $Re = 2.4 \times 10^4$ y $f = 0.44$. Esto es Re = (0.44/1.86) x 10^5 = 2.4 x 10^4. Despejando el diámetro obtenemos $D = 2.2$ cm.

6. 3. Factores de Fricción en Medios Porosos.

Análogamente al caso de las tuberías, se define el factor de fricción en medios porosos sujetos a flujo laminar de la siguiente forma:

$$f = \frac{\Delta P R_p/2L}{\left(\frac{1}{2}\rho v_0^2\right)} \qquad \textbf{(6.17)}$$

L es la longitud de la zona empacada, Rp es el radio efectivo de la partícula y v_0 es la velocidad superficial, definida como: $v_0 = w/\rho S$. w = gasto másico.

La porosidad es la fracción hueca del medio poroso, y se define de la siguiente forma:

$\epsilon = \frac{volumen\ de\ huecos}{volumen\ del\ medio\ poroso}$. El volumen del medio poroso es el volumen de un tubo recto ocupado por el medio poroso $\pi R^2 L$. La velocidad superficial v_0 es la velocidad del fluido en los huecos. Esto es:

$$v_0 = \langle v \rangle \epsilon, \ \ donde \ \ \langle v \rangle = \frac{\Delta P R_h^{\ 2}}{2\mu L} \qquad \textbf{(6.18)}$$

El radio hidráulico Rh se define con base a la porosidad y a la superficie de las partículas del medio normalizada (a): $a = \frac{superficie\ externa\ de\ las\ partículas}{volumen\ del\ medio}$ **(6.19)**

Por lo tanto: $R_h = \frac{\frac{volumen\ del\ flujo}{volumen\ del\ medio}}{\frac{superficie\ de\ las\ partículas}{volumen\ del\ medio}} = \epsilon/a$ **(6.20)**

El cálculo de a se realiza con base a la caracterización de la superficie externa de las partículas normalizada:

$$a_v = \frac{superficie\ externa\ de\ las\ partículas}{volumen\ de\ las\ partículas} = \frac{4\pi R_p^2}{(4/3)\pi R_p^3} = \frac{3}{R_p} = \frac{6}{D_p} \qquad \textbf{(6.21)}$$

Luego entonces: $a = a_v(1-\epsilon) = \frac{6}{D_p}(1-\epsilon\ )$. Substituyendo en (**6.20**) obtenemos:

$$R_h = \left(\frac{D_p}{6}\right)\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \qquad \textbf{(6.22)}$$

A partir de las ecuaciones **6.18** y **6.22** obtenemos:

$$v_0 = \frac{\Delta P R_h^2}{2\mu L}\epsilon = \frac{\Delta P}{2\mu L}\frac{D_p^2}{36}\frac{\epsilon^3}{(1-\epsilon)^2}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = 150\frac{\mu v_0}{D_p^2}\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \qquad (\epsilon < 0.5,\ \ Re = \frac{D_p G_0}{\mu(1-\epsilon)} < 10) \qquad \textbf{(6.23)}$$

G_0 es el flux de masa ($G_0 = v_0\,\rho$) y $Re = \frac{D_p G_0}{\mu(1-\epsilon)}$ es el número de Reynolds del medio poroso.

Esta es la ecuación de Blake-Kozeni, donde el coeficiente de 150 se ajusta mejor a los datos experimentales. Substituyendo la ecuación **6.23** en la **6.17** obtenemos el factor de fricción en el régimen laminar:

$$f = 75\frac{\mu}{D_p G_0}\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} \qquad \textbf{(6.24)}$$

Flujo turbulento.

En este caso el factor de fricción f es constante $= f_0$ válido a $Re > 1000$. A partir de la ecuación **6.17** adaptada para este régimen:

$$f_0 = \frac{\Delta P R_h/L}{\left(\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2\right)}$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{1}{2}\frac{f_0}{R_h}\rho\langle v\rangle^2 = \frac{1}{2}\frac{f_0}{\epsilon^2}\rho v_0^2\frac{6}{D_p}\frac{1-\epsilon}{\epsilon} = 3\frac{f_0}{D_p}\rho v_0^2\frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \qquad \textbf{(6.25)}$$

Los experimentos muestran que $3f_0 = 1.75$. La ecuación **6.25** es la ecuación de Burke-Plummer.

Región de transición

Sumando las caídas de presión de las ecuaciones **6.23** y **6.25** obtenemos:

$$\frac{\Delta P}{L} = 150\frac{\mu v_0}{D_p^2}\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} + 1.75\frac{1}{D_p}\rho v_0^2\frac{1-\epsilon}{\epsilon^3} \qquad \textbf{(6.26)}$$

En cantidades adimensionales:

$$\frac{\Delta P\rho}{G_0^2}\frac{D_p}{L}\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon} = 150\frac{\mu(1-\epsilon)}{D_p G_0} + 1.75 \qquad \textbf{(6.27)}$$

que es la ecuación de Ergun. Cuando G_0 es pequeño, obtenemos la ecuación de Blake-Kozeni, mientras, si G_0 es grande, obtenemos la ecuación de Burke-Plummer. En la figura 6.4 se expone la gráfica que agrupa a las ecuaciones que rigen en el régimen laminar y turbulento. La ordenada $\left(y = \frac{\Delta P\rho}{G_0^2}\frac{D_p}{L}\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon}\right)$ se grafica en función de la abscisa $Re = \frac{D_p G_0}{\mu(1-\epsilon)}$.

La ecuación **6.27** puede ser expresada como $y = 150(\frac{1}{R_e}) + 1.75$ o sea, cuando $Re \to 0$ (régimen laminar) obtenemos:

Log (y) = -log Re + log (150), que es una línea recta con pendiente -1 y ordenada log (150). Cuando $Re \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 1.75$. En este caso se tiende a un valor constante.

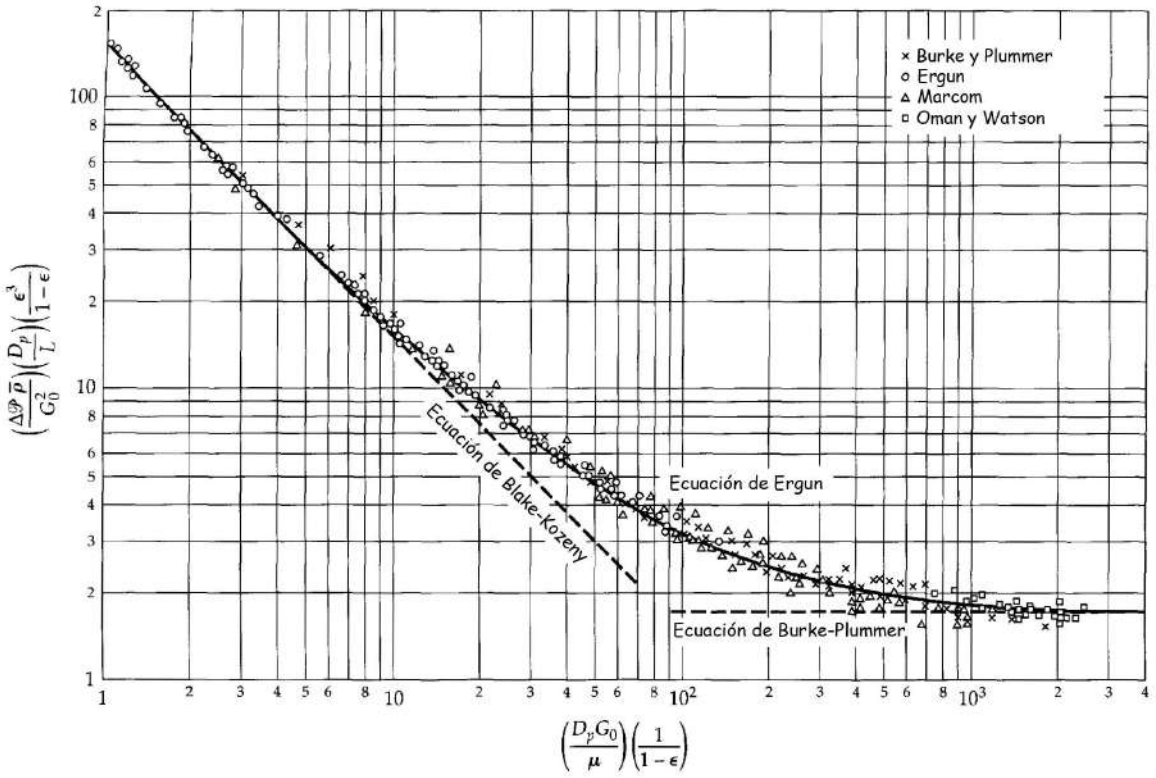


Figura **6.4.** *Gráfica de y* $\left(y = \frac{\Delta P \rho}{G_0^2}\frac{D_p}{L}\frac{\epsilon^3}{1-\epsilon}\right)$ *en función del número de Reynolds* ($Re = \frac{D_p G_0}{\mu(1-\epsilon)}$).

En el caso de gases ideales, en donde $\rho = \frac{pM}{RT}$, la ecuación **6.26** se transforma en :

$$\frac{dp}{dz} = 150\,\frac{\mu}{\rho}\frac{G_0}{D_p^2}\,\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} + 1.75\,\frac{G_0^2}{\rho\, Dp}\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon^3} \qquad \textbf{(6.28)}$$

$$\frac{M}{RT}\int_{P_L}^{P_0} p\,dp = \frac{M}{2RT}\left[P_0^2 - P_L^2\right] = \left[150\,\mu\,\frac{G_0}{D_p^2}\,\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^3} + 1.75\,\frac{G_0^2}{Dp}\frac{(1-\epsilon)}{\epsilon^3}\right] L \qquad \textbf{(6.29)}$$

Tarea 7

1.- Problema 6A.2 Bird et al. Diferencia de presión requerida para el flujo en un tubo con cambio de elevación (Ver figura **6.5**).

Agua a 68^0 F (viscosidad = 1.002 cp. y densidad = 0.9982 g/ml) se bombea a través de un tubo de 95 ft de longitud y 3 in de diámetro (diámetro interno de 3.068 in) a un recipiente que está a una altura determinada.

¿Cuál es la presión requerida a la salida de la bomba para bombear 18 gal/min?

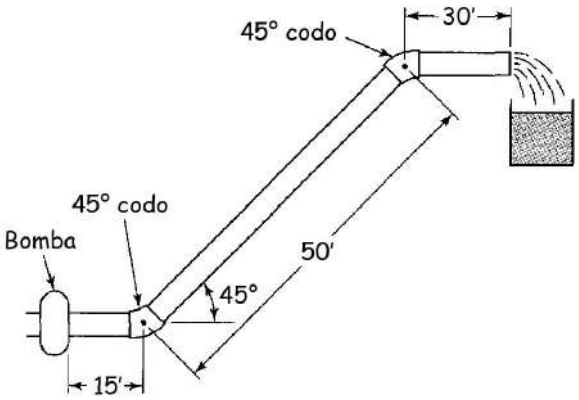


Figura **6.5.** *Sistema de flujo de tuberías*

Respuesta: 15.2 psig.

2.- Problema 6A.3 Bird et al. Determinación de flujo para una presión determinada.

¿Cuántos galones por hora de agua a 68^0 F se pueden bombear a través de un tubo liso de 1320 ft de longitud y 6 in de diámetro interno, bajo una diferencia de presión de 0.25 psi?

Respuesta: 68 gal /min.

3.- Problema 6A.4 Bird et al. Movimiento de una esfera en un líquido.

Una esfera hueca de 5 mm de diámetro con masa de 0.05 g se sedimenta en una columna de líquido y alcanza una velocidad terminal de 0.5 cm/s. La densidad del líquido es de 0.9 g/ cm^3 y la aceleración gravitacional es de 980.7 cm/s^2.

a)- Calcular la fuerza de arrastre sobre la esfera en dinas.

b)- Calcular el factor de fricción.

c)- Determinar la viscosidad del líquido.

Respuestas.

a)- 8.7 dinas.

b)- f = 396.

c)- 3.7 poises.

Tarea 8

1.- Problema 6A.6, Bird et al. Cálculo de la fracción hueca de una columna empacada.

Un tubo de 146 in^2 de sección transversal y 73 in de altura se empaca con partículas esféricas de 2mm de diámetro. Cuando la diferencia de presiones se mantiene a 158 psi en la columna, una solución de sacarosa al 60% fluye a través del lecho empacado a 244 lb/min. A esta temperatura, la viscosidad de la solución es 56.5 cp y su densidad es 1.2865 g/cm^3. ¿Cuál es la fracción hueca del lecho?

Respuesta: 0.30.

2.- Problema 6A.9, Bird et al. Flujo de gas a través de una columna empacada.

Un tubo horizontal de 4 in de diámetro y 5.5 ft de longitud se empaca con esferas de vidrio de 1/16 in de diámetro, y su fracción hueca es de 0.41. Dióxido de carbono se bombea a través del tubo a 300K, y su viscosidad a esa temperatura es de 1.495×10^{-4} g/cm s. ¿Cuál será el flujo másico a través de la columna cuando las presiones de entrada y salida son 25 y 3 atm, respectivamente?

Respuesta: 480 g/s.

Capítulo 7

Balances Integrales

En este capítulo se analizan los 3 balances integrales con ejemplos prácticos de ingeniería: masa, momentum y energía.

7. 1. Balance Integral de Masa.

Partimos de la integración del balance diferencial de masa en un volumen V:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{v}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho dV = -\iiint \rho\,(\nabla \cdot \underline{v})dV = -\iint_{1}^{2} \rho(\underline{v} \cdot \underline{n})dS = \rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 - \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2 = -\Delta w$$

En donde se ha utilizado el teorema de la divergencia y donde el flujo másico es $w = \rho\langle v\rangle S$.

Los límites de la integral son la entrada al sistema (1) y la salida del sistema (2). En términos de la masa total, podemos expresar el balance de masa de la siguiente forma:

$$\frac{dm_{tot}}{dt} = -\Delta w \qquad \textbf{(7.1)}$$

7. 2. Balance Integral de Momentum.

Integrando el balance diferencial de momentum: $\rho\,\frac{d\underline{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho\underline{g}$ **(7.2)**

$$\iiint \rho\,\frac{d\underline{v}}{dt}\,dV = -\iiint \nabla p\,dV + \iiint \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\,dV + \iiint \rho\,\underline{g}\,dV$$

Por la ecuación **2.24**, tenemos que $\iiint \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV = \frac{d}{dt} \iiint \rho \underline{v}\, dV$, y aplicando el teorema de Reynolds:

$\frac{d}{dt} \iiint \rho \underline{v}\, dV = \iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho \underline{v}\, dV + \iint_1^2 \rho \underline{v} \left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) dS$ que se sustituye en la ecuación **7.2**:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} \rho \underline{v}\, dV + \iint_1^2 \rho \underline{v} \left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) dS = \iiint \nabla p\, dV + \iiint \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\, dV + \iiint \rho\, \underline{g} dV$$

Definiendo el cambio del momentum total con respecto al tiempo y aplicando el teorema de la divergencia al término de la presión obtenemos:

$\frac{d}{dt} \underline{P_{tot}} = -\iint_1^2 \rho \underline{v} \left(\underline{v} \cdot \underline{n}\right) dS - \iint_1^2 p\, \underline{n} dS + \underline{F_f} + m_{tot} \underline{g}$ donde $\underline{F_f} = \iiint \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\, dV$ es la fuerza de fricción.

Efectuando las integrales de superficie, e introduciendo el vector unitario en la dirección *i*:

$$\frac{d}{dt} \underline{P_{tot}} = (\rho_1 \langle v_1^2 \rangle S_1 - \rho_2 \langle v_2^2 \rangle S_2) \underline{\delta i} + (p_1 S_1 - p_2 S_2) \underline{\delta i} + \underline{F_f} + m_{tot} \underline{g}$$

A régimen permanente:

$$\underline{F_f} = -\Delta(\rho \langle v^2 \rangle S + pS) \underline{\delta i} + m_{tot} \underline{g} \qquad \textbf{(7.3)}$$

7. 3. Balance Integral de Energía Mecánica.

(A régimen permanente y para líquidos incompresibles).

A régimen permanente, la ecuación **7.2** se reduce a:

$\rho\, \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} - \rho \nabla \Phi$ donde $\underline{g} = -\nabla \Phi$ (por ser campo conservativo derivable de un potencial). El producto punto de la velocidad con cada término resulta en:

$$\rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = -\underline{v} \cdot \nabla p + \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} - \rho \underline{v} \cdot \nabla \Phi \qquad \textbf{(7.4)}$$

Cada término puede ser expresado de la siguiente forma

$$\rho \underline{v} \cdot \left(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}\right) = \underline{v} \cdot \nabla (\frac{1}{2} \rho v^2)$$

$\underline{v} \cdot \left(\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}\right) = \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right) - \left(\underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v}\right)$ Substituyendo en la ecuación **7.4** obtenemos:

$$\underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2\right) = -\underline{v} \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right) - \left(\underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v}\right) - \rho \underline{v} \cdot \nabla \Phi$$

Integrando en el volumen V:

$$0 = \iiint \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2\right) dV + \iiint \underline{v} \cdot \nabla p\, dV - \iiint \left[\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right) - \left(\underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v}\right)\right] dV + \iiint (\rho \underline{v} \cdot \nabla \Phi) dV$$

Definiendo a E_v como la energía disipada por fricción:

$E_v = -\iiint \left[\nabla \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{v}\right) - \left(\underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v}\right)\right] dV$ obtenemos:

$$0 = \iiint \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) dV + \iiint \underline{v} \cdot \nabla p \, dV + E_v + \iiint (\rho \underline{v} \cdot \nabla \Phi) dV \qquad \textbf{(7.5)}$$

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$0 = \iint_1^2 \frac{1}{2}\rho v^2 (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS + \iint_1^2 p(\underline{v} \cdot \underline{n}) dS + E_v + \iint_1^2 \rho \Phi (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

Efectuando las integrales:

$$0 = \Delta \frac{1}{2}(\rho \langle v^3 \rangle S) + \Delta(p \langle v \rangle S) + E_v + \Delta(\rho \Phi \langle v \rangle S)$$

Dividiendo la ecuación entre el flujo másico $\rho\langle v\rangle S$:

$$0 = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle}\right) + \Delta \left(\frac{p}{\rho}\right) + \hat{E}_v + \Delta \Phi \qquad \Phi = gh \qquad \textbf{(7.6)}$$

Considerando el trabajo producido sobre el fluido por las fronteras del sistema

$$\Delta \left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3 \rangle}{\langle v \rangle}\right) + \left(\frac{p}{\rho}\right) + gh\right] = -\hat{E}_v + \widehat{W} \qquad \textbf{(7.7)}$$

La ecuación 7.7 es la ecuación de Bernoulli. Para resolver problemas específicos es necesario calcular la energía disipada por pérdida viscosa irreversible de energía.

Tramos rectos.

Considérese un flujo estacionario isotérmico a través de un tubo recto vertical de longitud L y diámetro D. La entrada (1) está en la parte inferior del tubo y la salida en su parte superior (2). En este caso, los balances integrales respectivos son:

Masa.

$\Delta w = 0$ que implica que $\rho_1 \langle v_1 \rangle S_1 = \rho_2 \langle v_2 \rangle S_2$. Puesto que las densidades son iguales y S es constante, entonces $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$.

Momentum.

En la dirección *y*: $F_f = \Delta(pS) + mg = S\Delta p + \rho S L g$

Energía mecánica.

$$0 = \Delta \left(\frac{p}{\rho}\right) + Lg + \hat{E}v$$

Comparando estas ecuaciones, obtenemos: $\hat{E}_v = \frac{F_f}{\rho S}$

La fuerza de fricción en tubo está dada por la ecuación **6.1**:

$F_f = (2\pi RL)(\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2)f$ Luego entonces:

$$\hat{E}_v = \frac{F_f}{\rho S} = \frac{(2\pi RL)(\frac{1}{2}\rho\langle v\rangle^2)f}{\pi R^2\rho} = \frac{1}{2}\frac{\langle v\rangle^2 Lf}{R_h} = \frac{\langle v\rangle^2}{2}e_v\ , \qquad R_h = R/2 \qquad \textbf{(7.8)}$$

$e_v = (L/R_h)\ f$ es el factor de pérdidas por fricción. En el caso de accesorios (válvulas, contracciones, expansiones, codos, etc.) e_v tiene valores de acuerdo a la geometría (ver siguiente tabla). Tramos no rectos. Valores de e_v.

Contracciones	$0.45(1-\beta)$
Expansiones	$(\beta^{-1} - 1)^2$
Región de entrada de tubos	0.05
Codos	0.3-1.9
Válvulas	6-10

Para incluir la contribución de tramos rectos y no rectos, la ecuación 7.7 se modifica:

$$\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle}\right) + \left(\frac{p}{\rho}\right) + gh\right] = \widehat{W} - \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\frac{\langle v\rangle^2 Lf}{R_h}]i - \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\langle v\rangle^2 e_v]i \qquad \textbf{(7.9)}$$

En flujo turbulento $\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle} = \langle v\rangle^2$ **(7.10)**

7. 4. Sistemas de Flujo.

7. 4.1. Tuberías de sección constante.

Potencia de la bomba.

Balance de masa: $\langle v_1\rangle = \langle v_2\rangle$

La fuerza de fricción es pequeña, por lo que solamente se considera el balance de energía.

De la ecuación 7.7 obtenemos: $\widehat{W} = \frac{\Delta p}{\rho}$. $Luego\ \frac{W}{\rho\langle v\rangle S} = \frac{\Delta p}{\rho}$

Por lo que W = Q Δ p **(7.11)**

En unidades c g s, Potencia = (dinas/cm^2)(cm^3/s) = dinas cm/s = erg/s

Curva de la tubería y curva de la bomba.

En un sistema de tuberías de sección constante la ecuación **7.7** se reduce a:

$$\Delta\left[\left(\frac{p}{\rho}\right)+gh\right]+\frac{1}{2}\frac{\langle v\rangle^2 Lf}{R_h}=0 \qquad \text{Despejando } f\text{:}$$

$$f=\frac{(\frac{\Delta P}{L})R_h}{(\frac{1}{2})\rho\langle v\rangle^2} \quad \text{, donde} \qquad \frac{\Delta P}{\rho}=\frac{\Delta p}{\rho}+g\Delta h \qquad \textbf{(7.12)}$$

Es posible construir una gráfica de caída de presión en función del gasto volumétrico a partir de la figura **6.1**. El factor de fricción y el número de Reynolds están dados por:

$$f=\frac{(\frac{\Delta P}{L})(\frac{R}{2})}{(\frac{1}{2})\rho\langle v\rangle^2} \qquad R_e=\rho\langle v\rangle D/\mu$$

El producto $f\,R_e^2$ es independiente de $\langle v\rangle$:

$$fR_e^2=\frac{(\frac{\Delta P}{L})(\frac{R}{2})}{(\frac{1}{2})\rho\langle v\rangle^2}\frac{(\rho\langle v\rangle D)^2}{\mu^2} \quad =(\frac{1}{2}\frac{D^3\rho}{\mu^2 L})\Delta P=C_1\Delta P, \qquad R_e=\frac{\rho\langle v\rangle D}{\mu}=(\frac{4\rho}{\pi D\mu})Q=C_2Q$$

C_1 y C_2 dependen de ρ, μ, L y D. La figura **7.1** muestra la gráfica de ΔP en función de Q.

Esto es, de fR_e^2/C_1 en función de R_e/C_2 en gráfica log-log. Esta curva es la curva de la tubería. La curva de la bomba es una recta (log ΔP = log W - log Q) de pendiente -1 y ordenada log W. La intersección con la curva de la tubería nos describe el punto de operación, a partir del cual encontramos la presión de entrega de la bomba y el gasto volumtrico de la tubería.

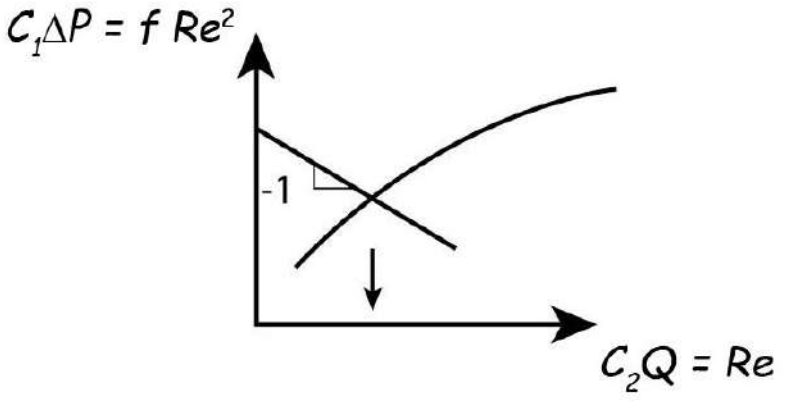


Figura **7.1.** *Curva de operación de la tubería y curva de operación de la bomba.*

Ejemplo.

Se requiere calcular la potencia de la bomba a régimen permanente del sistema de la figura **7.2**. Agua a 68^0 F (ρ = 62.4 lbm/ft^3, μ = 1 cp = 6.72 x 10^{-4} lbm/ft s). El gasto es de 12 ft^3/ min. El diámetro de la tubería es de 4 in y el tubo es de paredes lisas. Datos de e_v : contracción: 0.45, expansión: 1, codos: 0.5.

Solución.

Balance de masa. La densidad y sección de la tubería son constantes, entonces $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$.

Balance de energía. A partir de la ecuación **7.9**, considerando que no hay cambios de energía cintica ni cambio de presión (los puntos 1 y 2 están sobre la superficie de los tanques):

$$g\Delta h = \widehat{W} - \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\frac{\langle v \rangle^2 Lf}{R_h}]i - \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\langle v \rangle^2 e_v]i$$

Pérdidas por fricción entramos rectos: $\hat{E}_v = \frac{2v^2 f}{D}\sum_i L_i$. (Abreviando $\langle v \rangle^2 = v^2$)

El factor de fricción se evalúa a partir del número de Reynolds:

$R_e = \frac{\rho\langle v \rangle D}{\mu} = \frac{4\rho Q}{\pi D\mu} = \frac{4w}{\pi D\mu} = 7.11 \times 10^4$ Para tubo liso f = 0.0049.

$v = \frac{w}{\rho S} = \frac{12/60}{\pi/36} = 2.3\ ft/s$

$\hat{E}_v = \frac{2(2.3)^2(0.0049)}{\frac{1}{3}}(545) = 85\ \frac{ft^2}{s^2}$

Pérdidas por fricción en tramos no rectos:

$\hat{E}_v = \frac{v^2}{2}\sum_i e_{v_i} = \frac{v^2}{2}(0.45 + 3(0.5) + 1) = 8\frac{ft^2}{s^2}$

Energía potencial: $g\Delta h = (32.2\frac{ft}{s^2})(105 - 20)ft = 2740\frac{ft^2}{s^2}$ El trabajo de la bomba es:

$\widehat{W} = 2740 + 85 + 8 = 2833\frac{ft^2}{s^2}$

Las siguientes equivalencias son necesarias: $1\vec{lb}ft = 32.2\ lb_m\frac{ft^2}{s^2}$ $1HP = 550\vec{lb}ft/s$

El flujo másico es: $w = Q\rho = 12.5\ lb_m/s$.

La potencia por unidad de flujo másico puede ser calculada: $\widehat{W} = \frac{2833}{32.2}\ \left(\frac{ft^2}{s^2}\right)\left(\frac{\frac{1\vec{lb}ft}{lb_m}}{\frac{ft^2}{s^2}}\right) = 88\ \frac{1\vec{lb}ft}{lb_m}$

La potencia total es: W = $\widehat{W}\ w = (12.5)(88)\ \frac{1\vec{lb}ft}{s} = 2\ HP$

Otra forma de resolver el problema es a través de la figura **7.1**. a un gasto dado, para tubo liso. Conociendo las constantes C_1 y C_2, la curva de operación de la tubería nos da la presión de salida de la bomba. La potencia de la bomba se calcula con la ecuación **7.11**.

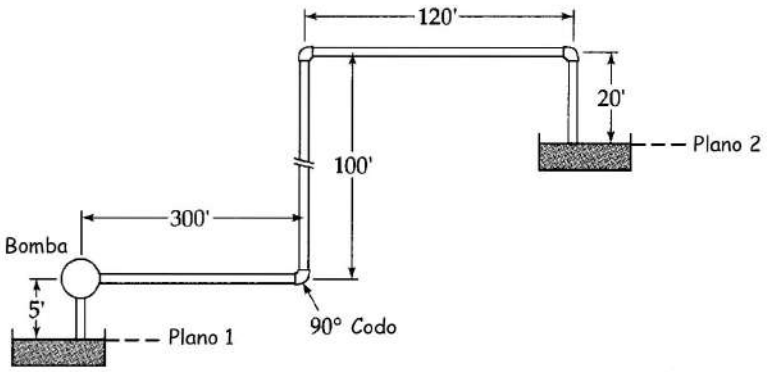


Figura **7.2**. *Sistema de flujo del ejemplo.*

7. 4.2. Flujo en expansión.

Encontrar el factor de pérdida por fricción de un flujo a través de la geometría de expansión (ver figura **7.3**).

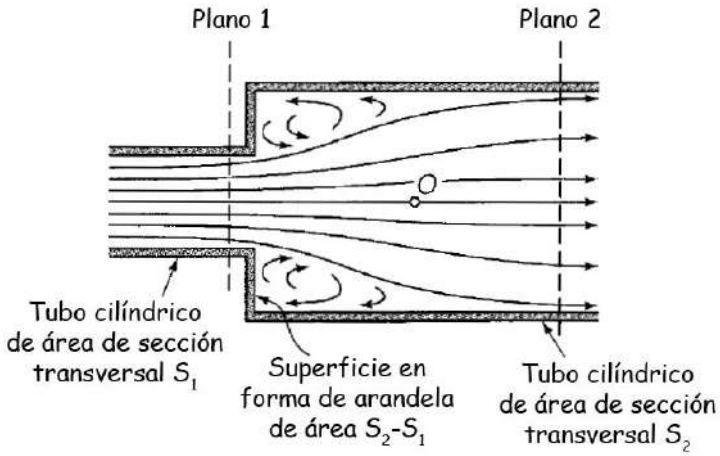


Figura **7.3**. *Flujo en expansión.*

Balance de masa: $v_1 S_1 = v_2 S_2$, $definiendo \quad \beta = \frac{S_1}{S_2}$, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{\beta}$ **(7.13)**

Balance de momentum:

$F_f = (\rho_1 v_1^2 S_1 - \rho_2 v_2^2 S_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2)$ **(7.14)**

Cálculo de la fuerza de fricción.

En un tubo recto de sección constante $F_f = S\ \Delta p$. Cuando S no es constante, se puede generalizar la ecuación **7.3**,

$F_f = \Delta\,(pS) = (p_2 - p_1)(S_2 - S_1) \approx (-p_1)(S_2 - S_1)$

debido a que $p_2 \ll p_1$. Esto es, la presión inmediatamente antes de la contracción es mucho mayor a la de después de la contracción. La ecuación **7.14** se reduce a:

$$-p_1(S_2 - S_1) = \rho(v_1 v_2 S_2 - v_2^2 S_2) + (p_1 S_1 - p_2 S_2)$$

$$-p_1(S_2) = \rho v_2 S_2 (v_1 - v_2) - (p_2 S_2)$$

$$p_2 - p_1 = \rho v_2 (v_1 - v_2) = \rho v_2^2 (\frac{1}{\beta} - 1) \qquad \textbf{(7.15)}$$

Balance de energía.

$$\left[\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho}\right) + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)\right] = \hat{E}_v$$

Substituyendo en la ecuación **7.15** obtenemos:

$$\left[v_2^2(1 - \frac{1}{\beta}) + \frac{1}{2}v_2^2\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)\right] = \hat{E}_v = \frac{1}{2}v_2^2\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación **7.8**:

$$e_v = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)^2 \qquad \textbf{(7.17)}$$

7. 4.3. Flujo en contracción.

Como se muestra en la figura **7.4**, el flujo en contracción se utiliza para medir el flujo másico de fluidos, en este caso, incompresibles.

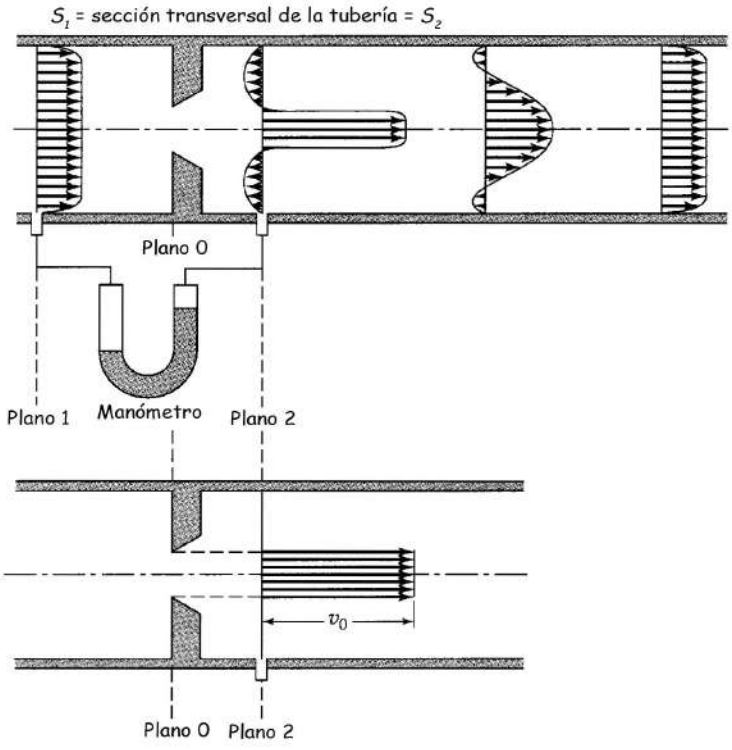


Figura **7.4**. *Flujo en contracción. La contracción tiene una sección S_0 y el fluido tiene en esta zona una velocidad v_0.*

Balance global de masa: $< v_1 > = < v_2 >$ **(7.18)**

Balance local de masa (punto 0 al punto 2): $S\langle v_2\rangle = S_0 v_0 + (S - S_0)v_R$ **(7.19)**

v_R is la velocidad de recirculación del fluido en la región posterior a la contracción ≈ 0.

Flujo másico: $w = \rho v_1 S$ **(7.20)**

Las pérdidas por fricción son despreciables, por lo que no se considera el balance de momentum.

Balance de energía: $\Delta\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\langle v^3\rangle}{\langle v\rangle}\right) + \left(\frac{p}{\rho}\right)\right] = -\hat{E}_v \approx 0$, aplicado entre los puntos 1 y 2:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\langle v_2^3\rangle}{\langle v_2\rangle} - \frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle}\right) + \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right)\right] = -\hat{E}_v \approx 0 \quad \textbf{(7.21)}$$

En el flujo desarrollado del punto 1: $\frac{\langle v_1^3\rangle}{\langle v_1\rangle} = \langle v_1\rangle^2$

Los promedios en el punto 2 son:

de la ecuación **7.19**: $\langle v_2\rangle = \frac{S_0}{S}\, v_0$, por lo que el promedio cúbico es: $\langle v_2^3\rangle = \frac{S_0}{S}\, v_0^3$

Por substitución en la ecuación **7.21** se obtiene

$$\left[\frac{1}{2}\,(v_0^2 - v_1^2) + \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right)\right] = 0$$

Por las ecuaciones **7.18** y **7.19,** la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 \left(\frac{S^2}{S_0^2} - 1\right)$$

Por la ecuación **7.20**, el flujo másico es:

$$w = \rho v_1 S = \left[\frac{2\rho(p_1 - p_2)S^2}{\frac{S^2}{S_0^2} - 1}\right]^{1/2} = \left[\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{\frac{1}{S_0^2} - \frac{1}{S^2}}\right]^{1/2} = S_0\left[\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{1 - \frac{S_0^2}{S^2}}\right]^{1/2} \quad \textbf{(7.22)}$$

En medidores de flujo en lugar de S_0 aparece $Cd\ S_0$, donde $Cd \approx 0.67$ es el factor de corrección.

7. 4.4. Eyector líquido-líquido.

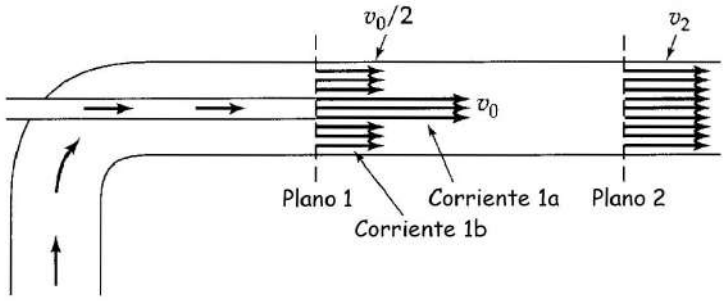


Figura **7.5**. *Aparato de mezclado de dos corrientes. En el punto 1 las dos corrientes se mezclan. La corriente (1a) tiene la velocidad v_0 con área de $S_1/3$. La corriente (1b) tiene velocidad $v_0/2$ con área $2S_1/3$. En el punto 2 las corrientes se han mezclado y la velocidad es v_2.*

El flujo en este aparato es turbulento y se despreciará la fuerza de fricción.

Balance de masa global: $w_{1a} + w_{1b} = w_2, \quad w_{1a} = w_{1b} = \frac{1}{2}w_2$ **(7.23)**

$v_0(\frac{1}{3})S + \frac{1}{2}v_0\left(\frac{2}{3}\right)S = v_2 S,$

$\frac{2}{3}v_0 = v_2$ **(7.24)**

Balance de momentum: Como $F_f = 0$, y $mg = 0$, entonces: $\Delta\,(wv + PS) = 0$

$(w_2v_2 - w_1v_1) + (P_2S_2 - P_1S_1) = 0$

$(w_2v_2) - \left(w_{1a}v_0 + w_{1b}\frac{v_0}{2}\right) + (P_2 - P_1)S = 0$

Por las ecuaciones **7.23** y **7.24,**

$w_2(\frac{2}{3}v_0) - \frac{1}{2}w_2\left(\frac{3}{2}v_0\right) + (P_2 - P_1)S = 0 \quad , \qquad w_2[(\frac{2}{3}v_0) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}v_0\right)] + (P_2 - P_1)S = 0$

Como $w_2 = \rho S\left(\frac{2}{3}v_0\right)$, entonces $\rho S\left(\frac{2}{3}v_0\right)[\frac{1}{12}v_0] + (P_2 - P_1)S = 0$

$(P_2 - P_1) = \frac{1}{18}\rho v_0^2$ **(7.25)**

Balance de energía:

$\left[\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \left(\frac{p_2 - p_1}{\rho}\right)\right] = -\hat{E}_v$ Substituyendo **7.25**:

$-\hat{E}_v = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \left(\frac{1}{18}v_0^2\right)$

Ahora: $\frac{1}{2}v_1^2 w_2 = \frac{1}{2}(w_{1a}v_0^2 + w_{1b}\frac{v_0^2}{4}) = \frac{1}{4}w_2(\frac{5}{4}v_0^2)$ Substituyendo **7.24**:

$-\hat{E}_v = \frac{2}{9}v_0^2 - \frac{5}{16}v_0^2 + \frac{1}{18}v_0^2 = -\frac{5}{144}v_0^2$

$\hat{E}_v = \frac{5}{144}v_0^2$ **(7.26)**

7. 4.5. Vaciado de tanques.

Tanque cónico.

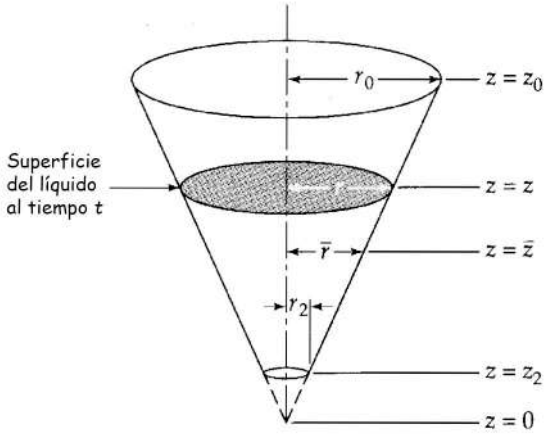


Figura **7.6**. *Tanque cónico. (1) identifica la parte superior (z = z_0, r =r_0) y (2) la salida del tanque (z = z_2, r = r_2).*

La geometría de referencia es un cono truncado invertido, de acuerdo a la figura **7.6**. Se calculará el tiempo de vaciado de un líquido isotrmico.

La relación geomtrica es

$\frac{r}{z} = \frac{r_0}{z_0} = \frac{r_2}{z_2}$ y la diferencial de volumen es: $dV = \pi r^2 dz$

Balance de masa:

$$\frac{d}{dt}\iiint \rho dV = w_1 - w_2 \qquad \textbf{(7.27)}$$

Suponiendo que $v_1 \ll v_2$:

$$\rho \frac{d}{dt}\int_{z_2}^{z} \pi r^2 dz = -\rho v_2 \pi r_2^2$$

$\frac{d}{dt}\int_{z_2}^{z} \frac{r_2^2}{z_2^2} z^2 dz = -v_2 r_2^2$ Resolviendo la integral: $\frac{d}{dt}(\frac{z^3}{3}) = -v_2 z_2^2$

$$z^2 \frac{d}{dt}\ z = -v_2 z_2^2 \qquad \textbf{(7.28)}$$

Balance de energía.

Se supone que las pérdidas por fricción son despreciables y que la posición de la salida (z_2) se encuentra en el origen ($z_2 = 0$). La presión en los puntos 1 y 2 es la atmosférica. Por ello:

$$\frac{1}{2}(v_2^2) + g(z_2 - z) = 0$$

$$v_2 = \sqrt{2gz} \qquad \textbf{(7.29)}$$

La ecuación **7.29** se conoce como la ley de Torricelli. Substituyendo **7.29** en **7.28** obtenemos:

$$-\left(\frac{z^2}{z_2^2}\right)\frac{d}{dt}z = \sqrt{2g}z^{1/2}$$

$$\frac{1}{z_2^2}\int_0^{z_0} z^{3/2} dz = \sqrt{2g}\int_0^{t_{eff}} dt = \sqrt{2g}t_{eff}$$

$\frac{2}{5}\frac{z_0^{5/2}}{z_2^2}\frac{1}{\sqrt{2g}} = t_{eff}$ El tiempo de vaciado es entonces: $t_{eff} = \frac{1}{5}\frac{z_0^2}{z_2^2}\sqrt{\frac{2z_0}{g}}$ **(7.30)**

Tanque cilíndrico.

En la figura **7.7** se encuentra un tanque cilíndrico de altura H y radio R. Conectado en su parte inferior existe un tubo de longitud L y radio r_2. La velocidad en el tanque es muy pequea en comparación de la velocidad en el tubo ($v_1 << v_2$). El flujo en el tubo es laminar.

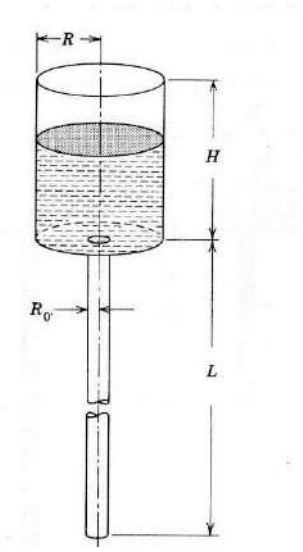


Figura **7.7**. *Tanque cilíndrico de altura H y radio R que se encuentra conectado a un tubo de longitud L y radio r_2.*

Balance de masa.

$\frac{d}{dt}\int_L^{L+H} \pi R^2 dz = v_2 \pi r_2^2 = Q_2$ **(7.31)**

Donde Q_2 es el gasto volumétrico en el tubo y sigue la ley de Poiseuille en flujo por gravedad:

$Q_2 = \frac{\pi r_2^4}{8\mu}\frac{\rho g z}{L}$ **(7.32)**

$\frac{d}{dt}\int_L^{L+H} \frac{1}{z} dz = \left(\frac{r_2^4}{R^2}\right)\frac{\rho g}{8\mu L}$ integrando:

$\frac{d}{dt} ln\frac{L+H}{L} = \left(\frac{r_2^4}{R^2}\right)\frac{\rho g}{8\mu L}$ integrando de nuevo:

$ln\frac{L+H}{L} = \left(\frac{r_2^4}{R^2}\right)\frac{\rho g}{8\mu L} t_{eff}$

$t_{eff} = \left(\frac{R^2}{r_2^4}\right)\frac{8\mu L}{\rho g}\ln(1+\frac{H}{L})$ **(7.33)**

En el caso en que *H/L<<1*, entonces $t_{eff} = \left(\frac{R^2}{r_2^4}\right)\frac{8\mu H}{\rho g}$ **(7.34)**

En el caso en que el flujo volumétrico es constante:

$t_{eff} = \frac{Vol}{Q} = \left(\frac{\pi R^2 H}{\pi r_2^4}\right)\frac{8\mu}{\rho g} = \frac{R^2}{r_2^4}\frac{8\mu H}{\rho g}$ donde Vol es el volumen del tanque. **(7.35)**

Por este resultado, en el caso en que la longitud del tubo sea grande (L >> H) el vaciado se realiza a gasto volumétrico constante.

Tarea 9

1.- Problema 7A.2. Bird et al. Bombeo de una solución de ácido clorhídrico.

Una solución diluida de HCl (densidad de 62.4 lbm/ft^3, viscosidad de 1 cp) se bombea desde el tanque 1 al tanque 2 (ver figura **7.8**) localizados a la misma altura. Las presiones en los dos tanques son 1 atm y 4 atm, respectivamente. El radio del tubo es de 2 in y el número de Reynolds es 7.11 X 10^4. La velocidad promedio en el tubo es de 2.3 ft/s y la distancia entre los tanques es de 300 ft. ¿Cuál es la potencia de la bomba?

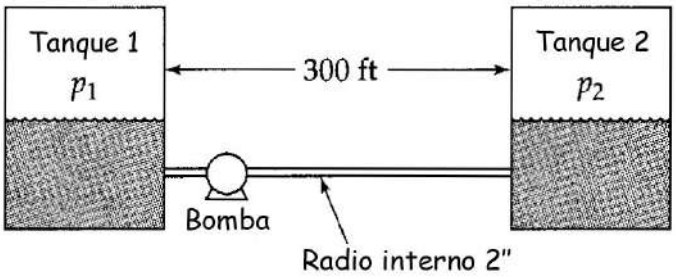


Figura **7.8**. *Bombeo de una solución de ácido clorhídrico.*

Respuesta: 2.4 HP.

2.- Problema 7A.6. Bird et al. Cálculo del flujo volumétrico.

En el sistema mostrado en la figura **7.9**, calcular el flujo volumétrico del agua a 68° F. El diámetro interno de la tubería es de 5 in.

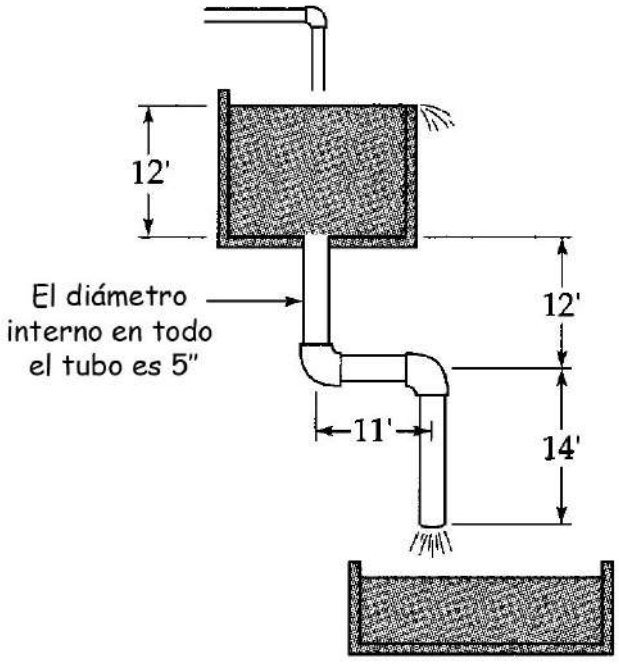


Figura **7.9**. *Flujo en tanque de caída constante.*

Tarea 10

1.- Problema 7A.1. Bird et al. Aumento de presión en una expansión.

Una solución acuosa salina fluye a través de una expansión con gasto volumétrico de 0.0384 m^3/s. El diámetro interior del tubo pequeño es de 5 in y el del tubo grande es de 9 in. ¿Cuál es el aumento de presión en lbf/in^2 si la densidad de la solución es de 63 lbm/ft^3?

Respuesta: 0.157 psi = 1,080 N/m^2.

2.- Problema 7A.3. Bird et al. Flujo de un gas en un tubo.

Nitrógeno gaseoso en flujo isotérmico turbulento a 25^0 C fluye en un tubo recto horizontal de 3 in de diámetro interior con flujo másico de 0.28 lbm/s. Las presiones absolutas en la entrada y salida son 2 atm y 1 atm, respectivamente. Evaluar la energía disipada por unidad de flujo másico suponiendo comportamiento de gas ideal.

Respuesta: 26.3 Btu/lbm = 61,200 J/kg.

3.- Problema 7A.4. Bird et al. Flujo incompresible en un ánulo.

Agua a 60^0 F fluye en un conducto coaxial anular de 20.3 ft de largo impulsado por una bomba con flujo de 241 gal/min. Los radios del espacio anular son de 3 y 7 in. La entrada está a 5 ft abajo de la salida. Determinar la potencia de la bomba, suponiendo que las presiones a la entrada de la bomba y la salida del conducto anular son iguales. Utilizar la definición de radio hidráulico promedio (Rh = área transversal del conducto/perímetro mojado).

Respuesta: 0.31 HP = 0.23 kW.

Referencias

[1] R.B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, "Transport Phenomena", 2a Ed., Wiley & Sons, 2002.

[2] J.C. Slattery, "Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua", McGraw Hill, 1981.

[3] R. Aris: "Vector, Tensors and the basic Equations of Fluid Mechanics". Prentice Hall, 1962.

[4] I. G. Currie, "Fundamental Mechanics of Fluids", 2a. Ed., McGraw-Hill, 1993.

[5] J.R. Welty, J.E. Wicks, R.E. Wilson, "Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer", 2000.

[6] M.M. Denn, "Process Fluid Mechanics", Prentice Hall, 1980.

[7] C. O. Bennett, J. E. Myers, "Momentum, Heat and Mass Transfer", 3rd Ed., McGraw-Hill, USA, 1982.

[8] R. S. Brodkey, "The Phenomena of Fluid Motions", Addison-Wesley,1967.

[9] G. K. Batchelor, "An Introduction to Fluid Mechanics", Cambridge University Press, 1967.

[10] W.M. Rohsenow, H.Choi, "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice Hall, 1961.

[11] L. E. Sissom, R. Pitts, "Elements of Transport Phenomena", Mc Graw-Hill, 1972.

[12] L. Theodore, "Transport Phenomena for Engineers", International Textbook Co., 1971.