

Transferencia de Energía



Octavio Manero, Marcela Angola Bañuelos



Transferencia de Energía

Universidad Nacional Autónoma de México

Primera Edición

Transferencia de Energía

Octavio Manero

Marcela Angola

Bañuelos



Ciudad de México, México

Primera edición: Febrero 2024

D.R. © 2024, Universidad Nacional Autónoma de México

Ciudad Universitaria, Alcaldía Coyoacán, C. P. 04510

Ciudad de México, México.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE100921

Imagen de portada: Dibujo realizado por estudiantes de la Universidad de la
Frontera, Chile

Hecho en México

ISBN 978-607-30-9024-7

Índice

Prefacio.	10
1. Introducción	14
1.1. Definiciones.	14
1.2. Ecuaciones de Conservación.	15
1.3. Ecuaciones Constitutivas.	16
1.4. Balance de Energía.	16
1.5. Cálculo de la Conductividad Térmica.	20
1.5.1. Teoría de la conductividad térmica de gases a baja densidad.	20
1.5.2. Teoría de la conductividad térmica de líquidos.	23
1.5.3. Conductividad térmica de sólidos.	23
Apéndice A	24
Apéndice B	25
Apéndice C	26
Tarea 1.	27
2. Flujos Compresibles	29
2. 1. Gases Ideales. Casos Especiales de la Ecuación de Balance de Energía.	29
2. 2. Propagación del Sonido. La Ecuación de Onda.	31
2. 3. Procesos con Elevada Disipación: Ondas de Choque.	32
Apéndice A	37
Apéndice B	39
Tarea 2.	40
3. Balances Diferenciales	41
3. 1. Convección-Difusión de Calor en Sistemas Cerrados.	41
3. 1.1. Convección forzada en tuberías.	41
3. 1.2. Transpiración física.	46

3. 1.3. Convección natural.	49
3. 2. Sistemas Cerrados con Fuente de Calor Interna.	52
3. 2.1. Conducción en líquidos con disipación viscosa.	52
3. 2.2. Convección-conducción con reacción química.	54
3. 2.3. Conducción en sólidos con fuente de calor eléctrica.	56
3. 2.4. Conducción en sólidos con fuente de calor nuclear.	57
3. 3. Transferencia de Calor Interfacial en Sistemas Abiertos.	60
3. 3.1. Conducción de calor desde una esfera hacia un fluido en reposo. .	60
3. 3.2. Transporte interfacial en una placa plana.	61
3. 3.3. Transporte interfacial en un cilindro.	63
3. 3.4. Conducción y transferencia interfacial simultáneas. Aleta de enfriamiento.	64
Apéndice A	67
Apéndice B	68
Tarea 3	71
Tarea 4	72
Tarea 5	73
Tarea 6	74
Tarea 7	75
 4. Capa Límite Térmica y Flujo Turbulento No Isotérmico	 77
4. 1. Capa Límite Térmica. Método de Von Karman.	77
4. 2. Flujo Turbulento No Isotérmico.	82
 5. Transporte de Energía Interfacial en Sistemas No Isotérmicos	 85
Coefficientes de Transferencia de Calor	85
5. 1. Convección Forzada en Tubos.	85
5. 1.1. Cálculo de los coeficientes de transferencia de calor interfacial. .	85
5. 1.2. Flujo laminar en tubos.	88
5. 1.3. Flujo turbulento en tubos.	89
5. 1.4. Ejemplo 5.2	91
5. 2. Convección Forzada Alrededor de Cuerpos Sumergidos.	91
5. 2.1. Placa plana.	91
5. 2.2. Esferas y cilindros.	92

5. 2.3. Otras geometrías.	93
5. 3. Convección Forzada en Medios Porosos.	93
5. 4. Convección Natural.	94
5. 4.1. Ejemplo 5.3.	96
5. 5. Condensación.	97
5. 5.1. Ejemplo 5.4.	100
Tarea 8	101
Tarea 9	102
6. Balances Integrales	104
6. 1. Balance Integral de Energía para Densidad Constante y a Régimen Permanente.	104
6. 1.1. Formas diferenciales de las ecuaciones 6.4 y 6.6.	105
6. 1.2. Casos especiales.	106
6. 2. Flujo de Gases Ideales en Ductos Horizontales de Sección Constante. . .	106
6. 2.1. Flujo adiabático.	106
6. 2.2. Flujo isotérmico.	108
6. 2.3. Optimización del flujo másico. Flujo adiabático.	109
6. 2.4. Flujo isotérmico.	109
6. 3. Flujo de Gases Ideales. Procesos Adiabáticos Sin Fricción.	110
6. 3.1. Compresores.	110
6. 3.2. Toberas y tanques de presión.	110
6. 3.3. Medidores de flujo (tubo Venturi).	111
6. 3.4. Optimización del flujo másico.	111
6. 4. Ejemplos.	112
6. 4.1. Ejemplo 6.1.	112
6. 4.2. Ejemplo 6.2. Columna de enfriamiento.	114
6. 4.3. Ejemplo 6.3. Intercambiador de calor.	115
6. 4.4. Ejemplo 6.4. Gaseoducto con estaciones de bombeo.	116
6. 4.5. Ejemplo 6.5. Calentador a base de vapor.	117
6. 4.6. Ejemplo 6.6. Tobera adiabática.	119
6. 4.7. Ejemplo 6.7. Tobera isotérmica.	120
Tarea 10	121
Tarea 11	122

7. Transferencia de Energía por Radiación	125
7. 1. Definiciones.	125
7. 1.1. Ejemplo 7.1.	125
7. 2. Termodinámica de la Radiación. Leyes de Kirchhoff y Stefan.	128
7. 3. Teoría de la Densidad Espectral.	131
7. 4. Aplicaciones.	136
7. 4.1. Ejemplo 7.2.	136
7. 4.2. Ejemplo 7.3.	137
7. 4.3. Ejemplo 7.4.	137
7. 4.4. Ejemplo 7.5.	138
7. 4.5. Ejemplo 7.6.	138
7. 5. Radiación entre Cuerpos Grises.	139
7. 5.1. Ejemplo 7.7.	139
7. 5.2. Ejemplo 7.8.	140
Apéndice A	141
Apéndice B	142
Apéndice C	143
Referencias..	146

Prefacio

Este libro comprende el material del curso de transferencia de energía, el cual se imparte en la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Química de la UNAM. Como en el caso del libro 1 sobre Transferencia de Momentum, una buena parte del material se basa en el libro de R. B. Bird, W. E. Stewart y E. N. Lightfoot, “Transport Phenomena”, segunda edición. El contenido del libro de Transferencia de Energía es consistente con el programa de estudios del curso de Transferencia de Energía de la carrera de Ingeniería Química.

Este libro contiene las bases matemáticas y físicas fundamentales para la comprensión de los conceptos básicos de la Transferencia de Energía y que permita a los alumnos y profesores cimentar la teoría para las aplicaciones en el posterior curso de Ingeniería. Consta de 7 capítulos que analizan los mecanismos básicos de Transferencia de Energía: conducción, convección y radiación.

El capítulo 1 se titula Fundamentos de la Transferencia de Energía y comprende 5 partes: definiciones de conceptos fundamentales, ecuaciones de conservación, ecuaciones constitutivas, balances de energía y conductividad térmica. La parte sobre las definiciones repasa las operaciones entre vectores y tensores que se analizaron en parte en el libro de Transferencia de Momentum, como son el gradiente de velocidades, la derivada material de una función del espacio y del tiempo, el tensor de esfuerzos total, el flujo volumétrico, fuerza de fricción y flujo de calor. Las ecuaciones de conservación comprenden a las de conservación de masa o ecuación de continuidad y los balances de momentum lineal y angular. Las ecuaciones constitutivas incluyen a las del flujo Newtoniano, la ley de los gases ideales y la ley de Fourier. La parte correspondiente a los balances de energía expone dos formulaciones, la de energía interna y la formulación entálpica. Finalmente, la parte sobre el cálculo de la conductividad térmica comprende a la teoría de la conductividad térmica de gases a baja densidad, la teoría de la conductividad térmica de líquidos y la conductividad térmica de sólidos.

El apéndice A contiene las expresiones de la ley de Fourier en los 3 sistemas de coordenadas: cartesianas, cilíndricas y esféricas. El apéndice B contiene las expresiones de la ecuación del balance de energía en términos del flux de calor y momentum, en los 3 sistemas de coordenadas. El apéndice C contiene las expresiones del balance de energía para un fluido incompresible Newtoniano con ley de Fourier, también en los 3 sistemas de coordenadas. Finalmente, en la Tarea 1 se lleva a la práctica problemas sobre la predicción de conductividades térmicas de gases a baja densidad, la estimación de la conductividad térmica de un gas denso, la predicción de la conductividad térmica de una mezcla de gases, la estimación de la conductividad térmica en un líquido puro y el cálculo del número de Lorenz en sólidos.

En el capítulo 2 se analizan los fluidos compresibles. Consta de 3 partes, las cuales son: gases ideales con atención a los casos especiales de la ecuación de balance de energía, la propagación de ondas de sonido y la ecuación de onda y los procesos con elevada disipación, como son las ondas de choque.

La parte de gases ideales incluye la reducción de las ecuaciones de balance de energía (formulaciones de energía libre y formulación entálpica) y a los procesos adiabáticos sin disipación. La segunda parte realiza la deducción de la ecuación de onda y la propagación de sonido u ondas acústicas. La tercera parte contiene la discusión de procesos con elevada disipación, como son las ondas de choque. El capítulo consta de dos apéndices. El primero (apéndice A) contiene el proceso de solución de la ecuación de onda por medio del método de separación de variables. El apéndice B contiene la solución de la ecuación de la onda de choque. Finalmente, la Tarea 2 ilustra 3 problemas: la demostración de la solución de la ecuación de onda, el cálculo de la velocidad, temperatura y cambios de presión en una onda de choque y el problema de la compresión adiabática sin fricción de un gas ideal.

El título del capítulo 3 es Balances Diferenciales de energía. El capítulo se divide en 3 partes: convección-difusión de calor en sistemas cerrados, sistemas cerrados con generación de calor interna y transferencia de calor interfacial en sistemas abiertos. La parte 1 a su vez consta de los siguientes casos: convección forzada en tuberías, transpiración física y convección natural. La segunda parte analiza 4 casos: conducción en líquidos con disipación viscosa, convección-conducción con reacción química, conducción en sólidos con fuente de calor eléctrica y conducción en sólidos con fuente de calor nuclear. Finalmente, la parte 3 analiza la conducción de calor desde una esfera hacia un fluido en reposo, el transporte interfacial en una placa plana, transporte interfacial en un cilindro y la conducción y transferencia interfacial simultáneas. El capítulo contiene dos apéndices, el primero (apéndice A) discute la conducción de calor en sólidos con fuente de calor y transporte interfacial. El apéndice B retoma el problema de convección forzada en un tubo y analiza la solución para la región de entrada al tubo. Para la práctica, se incluyen 5 tareas (3-7). La tarea 3 presenta dos problemas de flujo tapón (perfil de velocidades constante) con transferencia de calor por convección forzada, uno en tubos de sección circular y otro en una ranura plana. La tarea 4 presenta el problema de enfriamiento por transpiración física en un sistema plano. La tarea 5 presenta 3 problemas: el cálculo de la temperatura máxima en un lubricante, otro sobre la velocidad de convección libre y el calentamiento viscoso de un líquido que fluye en una ranura. La tarea 6 incluye el problema de un reactor químico anular y finalmente, la tarea 7 contiene dos problemas: la capacidad de aislamiento de una pared y el grosor de pared de aislamiento de un horno.

El capítulo 4 consta de dos partes: capa límite térmica y el flujo turbulento no isotérmico. La capa límite térmica es analizada por medio del método de Von Karman y discute la solución asintótica para números de Prandtl grandes (en líquidos). La parte de flujos turbulentos no isotérmicos analiza la analogía de Reynolds y la expresión del flux de calor para flujo turbulento en tuberías.

El capítulo 5 se titula Transporte de Energía Interfacial en Sistemas no Isotérmicos. Coeficientes de Transferencia de Calor. Consta de 5 partes: convección forzada en tubos, convección forzada alrededor de cuerpos sumergidos, convección forzada en medios porosos, convección natural y condensación de vapores en superficies sólidas. La primera parte analiza el cálculo de los coeficientes de transferencia de calor interfacial, el flujo laminar en tubos y el flujo turbulento en tubos, con sus respectivos ejemplos. La segunda parte analiza la convección forzada alrededor de cuerpos sumergidos, considerando la placa plana, esferas y cilindros, y otras geometrías. La tercera parte trata la convección forzada en medios porosos. La cuarta parte trata el problema de la convección natural y

la parte 5 analiza el proceso de condensación, con sus respectivos ejemplos. El capítulo 5 sugiere dos tareas: la tarea 8 concierne con el cálculo de los coeficientes promedio de transferencia de calor y la transferencia de calor en flujo laminar en un tubo. La tarea 9 consta de dos problemas: la transferencia de calor en condensación de vapores y la pérdida de calor por convección natural en un tubo horizontal que se encuentra sumergido en un líquido.

El capítulo 6 se titula Balances Integrales. Contiene el balance integral de energía para un fluido de densidad constante y a régimen permanente, y casos especiales. Consta de dos secciones: flujo de gases ideales en ductos horizontales de sección constante y flujo de gases ideales en procesos adiabáticos sin fricción. La primera sección analiza el flujo adiabático, el flujo isotérmico y la optimización del flujo másico en ambos casos. La segunda sección trata operaciones de transferencia de calor en compresores, toberas, tanques de presión, medidores de flujo y la optimización del flujo másico en estos procesos. Después se describen varios ejemplos, que incluyen la mezcla de corrientes de gases ideales, las columnas de enfriamiento, intercambiadores de calor, gaseoductos con estaciones de bombeo, calentadores a base de vapor y toberas adiabáticas e isotérmicas. Las tareas incluidas en este capítulo (10 y 11) incluyen el problema del flujo adiabático en un gaseoducto de gas natural y el problema del intercambiador de calor de doble tubo en la tarea 10. La tarea 11 plantea el problema del mezclado de dos corrientes de gases ideales y el flujo a través de un tubo Venturi, el calentamiento de una corriente de aire en un tubo y el flujo de un fluido compresible a través de una tobera convergente-divergente.

El título del capítulo 7 es Transferencia de Energía por Radiación. Contiene varias secciones, que incluyen, en su primera sección, las definiciones fundamentales de los procesos ópticos de la radiación térmica. La segunda sección incluye la discusión de la termodinámica de la radiación y las leyes de Kirchhoff y Stefan. La tercera sección describe la teoría de la densidad espectral y la cuarta sección trata el problema de la radiación entre cuerpos grises. El capítulo contiene varios ejemplos resueltos, en los cuales se calculan varios aspectos de la transferencia por radiación, incluyendo problemas sobre la constante solar, la determinación de las pérdidas de calor por radiación en placas, transferencia de calor por radiación en esferas y la transferencia entre superficies planas. El capítulo contiene 3 apéndices, el primero (apéndice A) trata sobre las ondas estacionarias en 3 dimensiones. El apéndice B expone la solución de un oscilador lineal con amortiguamiento y el apéndice C ilustra gráficas de los factores de configuración, utilizados en la resolución de problemas de transferencia de calor por radiación.

En el curso de transferencia de energía se sugiere que los capítulos 4 y 7 sean capítulos de referencia y los demás capítulos se discutan en detalle en dos partes: la primera que incluya a los capítulos 1, 2 y 3, y la segunda parte que incluya a los capítulos 5 y 6. Al igual que el libro de Transferencia de Momentum, este libro no incluye los balances de coraza, ya que se derivaron las ecuaciones de los balances diferenciales a partir de teoremas integrales generalmente válidos, y las ecuaciones deducidas se encuentran en el capítulo 1 en los 3 sistemas de coordenadas.

Capítulo 1

Introducción

Este capítulo inicial consta de 5 partes:

1. Definiciones.
2. Ecuaciones de Conservación.
3. Ecuaciones Constitutivas. Ley de Fourier.
4. Balance de Energía.
5. Conductividad Térmica.

1.1. Definiciones.

a. Gradiente de velocidades $\nabla \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$, donde $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\nabla \underline{v} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \underline{v} - \nabla \underline{v}^T) = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}} \quad (1.1)$$

La parte simétrica es el tensor rapidez de deformación $\underline{\underline{D}}$ y la parte antisimétrica es el tensor vorticidad $\underline{\underline{W}}$. La traza de $\nabla \underline{v}$ es la suma de los elementos de la diagonal y es $\nabla \cdot \underline{v}$, tal que $tr(\nabla \underline{v}) = tr(\underline{\underline{D}})$

b. Derivada material de una función $f(\underline{x}, t)$.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla f \quad (1.2)$$

c. Tensor de esfuerzos total:

$$\underline{\underline{\tau}}_{tot} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} \quad (1.3)$$

p es la presión hidrostática,

$\underline{\underline{I}}$ es la matriz unidad,

$\underline{\underline{\tau}}$ es el tensor de esfuerzos tangenciales.

Producto escalar de dos tensores:

$$\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\tau}} : \nabla \underline{v} = tr(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}}) \quad (1.4)$$

Definiciones donde se utiliza el teorema de la divergencia:

d. Flujo volumétrico:

$$Q_{vol} = \iint \underline{v} \cdot \underline{n} dS = \iiint \nabla \cdot \underline{v} dV \quad (1.5)$$

e. Fuerza de Fricción:

$$\underline{F} = \iint \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS = \iiint \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} dV \quad (1.6)$$

f. Flujo de calor:

$$Q = \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS = \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV \quad (1.7)$$

1.2. Ecuaciones de Conservación.

Considérese un elemento material de un fluido con volumen V , superficie S , normal $\underline{n}$ y velocidad $\underline{v}$, como se muestra en la figura 1.1.

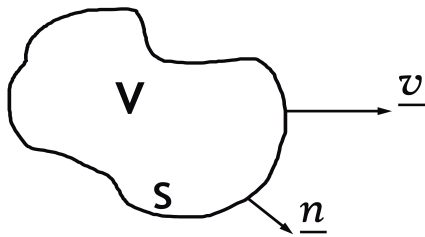


Figura 1.1. Elemento material de un fluido.

a. Conservación de masa o ecuación de continuidad.

Sea la densidad una función del tiempo y el espacio $\rho(\underline{x}, t)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \underline{v} &= 0 \quad \text{o en términos de la derivada material:} \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por medio del teorema de Reynolds y la ecuación de continuidad, se puede demostrar que:

$$\frac{d}{dt} \iiint \rho \underline{v} dV = \iiint \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV \quad (1.9)$$

b. Conservación de momentum lineal.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \rho \underline{g} \quad (1.10)$$

c. Conservación del momentum angular.

$$\underline{\underline{\tau}} \text{ es simétrico, esto es: } \tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{23} = \tau_{32} \quad (1.11)$$

1.3. Ecuaciones Constitutivas.

a. Fluido Newtoniano.

$$\underline{\underline{\tau}} = -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{D}} = -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} + \mu [\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T] \quad (1.12)$$

en donde μ es la viscosidad.

b. Ley de los gases ideales.

$$P \hat{V} = RT \quad (1.13)$$

donde P es la presión, $\hat{V}$ es el volumen por unidad de masa, R es la constante de los gases y T es la temperatura.

c. Ley de Fourier.

$$\underline{q} = -k \nabla T \quad (1.14)$$

en donde k es la conductividad térmica. La ecuación **1.14** es la expresión vectorial lineal más general que describe la transferencia de calor. Ver **Apéndice A** para diferentes coordenadas.

1.4. Balance de Energía.

Partimos de la primera ley de la termodinámica, e incluimos la generalización que incluye a las energías cinética y potencial:

$$\frac{d}{dt} \iiint \left[\rho \hat{E} + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \underline{g} \cdot \underline{x} \right] dV = - \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS + w \quad (1.15)$$

$\hat{E}$ es la energía interna por unidad de masa,

$\underline{x}$ es el vector posición,

w es el trabajo realizado por el sistema (potencia disipada).

La potencia disipada por fuerzas de fricción (Ecuación **1. 6**) y por presión es:

$$w = \iint (\underline{v} \cdot \underline{\tau}_{tot} \cdot \underline{n}) dS = \iiint \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \underline{\tau}_{tot}) dV \quad (1. 16)$$

donde se ha empleado el teorema de la divergencia. Efectuando las operaciones vectoriales:

$$w = \iiint \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}_{tot}) dV + \iiint (\nabla \underline{v} : \underline{\tau}_{tot}) dV \quad (1. 17)$$

Por el balance de momentum lineal (Ecuación **1. 10**):

$$\iiint \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}_{tot}) dV = \iiint \underline{v} \cdot \left(\rho \frac{d\underline{v}}{dt} - \rho \underline{g} \right) dV \quad (1. 18)$$

Substituyendo las ecuaciones **1. 17** y **1. 18** en **1. 15**, y por el teorema de la divergencia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint \left[\rho \hat{E} + \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \underline{g} \cdot \underline{x} \right] dV = & - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV + \iiint \underline{v} \cdot \left(\rho \frac{d\underline{v}}{dt} - \rho \underline{g} \right) dV \\ & + \iiint (\nabla \underline{v} : \underline{\tau}_{tot}) dV \end{aligned} \quad (1. 19)$$

De acuerdo a la ecuación **1. 9**:

$$\frac{d}{dt} \iiint \left[\frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \underline{g} \cdot \underline{x} \right] dV = \iiint \left(\frac{1}{2} \rho \frac{dv^2}{dt} - \rho \underline{v} \cdot \underline{g} \right) dV \quad (1. 20)$$

Por la igualdad en la ecuación **1. 20**, y observando la ecuación **1. 19**, el segundo y tercer términos de la izquierda son iguales al segundo término de la derecha, y se cancelan. Por lo que la ecuación **1. 19** se simplifica:

$$\frac{d}{dt} \iiint [\rho \hat{E}] dV + \iiint (\nabla \cdot \underline{q}) dV - \iiint (\nabla \underline{v} : \underline{\tau}_{tot}) dV = 0 \quad (1. 21)$$

Por la ecuación **1. 4**, $\nabla \underline{v} : \underline{\tau}_{tot} = \underline{\tau}_{tot} : \underline{D}$, y por la ecuación **1. 9**, la ecuación **1. 21** implica que:

$$\rho \frac{d\hat{E}}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau}_{tot} : \underline{D} \quad (1. 22)$$

Tomando en cuenta la ecuación **1. 3** tenemos que:

$$\underline{\tau}_{tot} : \underline{D} = -p \underline{I} : \underline{D} + \underline{\tau} : \underline{D} = -p (tr) \underline{D} + \underline{\tau} : \underline{D} = -p (\nabla \cdot \underline{v}) + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1. 23)$$

Substituyendo la ecuación **1. 23** en la ecuación **1. 22**;

$$\rho \frac{d\hat{E}}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} - p (\nabla \cdot \underline{v}) + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1. 24)$$

Si la energía interna es función de V y T , entonces $\hat{E} = \hat{E}(V, T)$, y de acuerdo a las igualdades termodinámicas:

$$d\hat{E} = \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT + \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{V}}\right)_T d\hat{V} = \hat{C}_v dT + \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] d\hat{V} \quad (1.25)$$

Donde $\hat{C}_v$ es la capacidad calorífica a volumen constante. Diferenciando con respecto al tiempo y multiplicando por ρ obtenemos:

$$\rho \frac{d\hat{E}}{dt} = \rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} + \left[-p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] \rho \frac{d\hat{V}}{dt} \quad (1.26)$$

Utilizando la ecuación de continuidad **1.8**, tenemos:

$$\rho \frac{d\hat{V}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{d \ln \rho}{dt} = \nabla \cdot \underline{v} \quad (1.27)$$

Substituyendo las ecuaciones **1.26** y **1.27** en la ecuación **1.24** obtenemos:

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho}\right] \nabla \cdot \underline{v} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad \text{ver Apéndice B} \quad (1.28)$$

O en su forma equivalente:

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial p}{\partial \ln T}\right)_{\rho} \frac{d \ln \rho}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad \text{donde } \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T$$

Un caso especial de la ecuación **1.28** corresponde al balance para un fluido Newtoniano con ley de Fourier:

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\rho}\right] \nabla \cdot \underline{v} = k \nabla^2 T + 2\mu \text{tr}(\underline{D}^2) \quad (1.29)$$

Formulación Entálpica.

La entalpía es una función de la presión y la temperatura: $\hat{H} = \hat{H}(P, T)$, luego entonces:

$$d\hat{H} = \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial P}\right)_T dP = \hat{C}_p dT + \left[\hat{V} - T \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T}\right)_P\right] dP \quad (1.30)$$

Donde $\hat{C}_p$ es la capacidad calorífica a presión constante. Diferenciando con respecto al tiempo y multiplicando por la densidad obtenemos:

$$\rho \frac{d\hat{H}}{dt} = \rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} + \left[\hat{V} - T \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial T}\right)_P\right] \rho \frac{dP}{dt} \quad (1.31)$$

Sabiendo que:

$$\rho \frac{d\hat{V}}{dT} = \rho \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = -\frac{d \ln \rho}{dT}$$

y substituyendo esta expresión en la ecuación **1. 31**:

$$\rho \frac{d\hat{H}}{dt} = \rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} + \left[1 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \right] \frac{dP}{dt} \quad (1. 32)$$

La relación entre la entalpia y la energía interna es:

$$\hat{H} = \hat{E} + P\hat{V} = \hat{E} + \frac{P}{\rho} \quad (1. 33)$$

$$\rho \frac{d\hat{E}}{dt} = \rho \frac{d\hat{H}}{dt} - \rho \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho} \right) \right] = \rho \frac{d\hat{H}}{dt} - \frac{dP}{dt} + \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d\hat{H}}{dt} - \frac{dP}{dt} - P(\nabla \cdot \underline{v}) \quad (1. 34)$$

en donde se ha utilizado la ecuación de continuidad (ecuación **1. 8**). Substituyendo la ecuación **1. 34** en la **1. 24** obtenemos:

$$\rho \frac{d\hat{E}}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} - P(\nabla \cdot \underline{v}) + \underline{\tau} : \underline{D} = \rho \frac{d\hat{H}}{dt} - \frac{dP}{dt} - P(\nabla \cdot \underline{v}) \quad (1. 35)$$

Substituyendo la ecuación **1. 35** en la **1. 32**:

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} + \left[1 + \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \right] \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dt} - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1. 36)$$

que nos da:

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} + \left[\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P \right] \frac{dP}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1. 37)$$

Las ecuaciones **1. 37** y **1. 28** son los resultados generales del balance de energía. En el **Apéndice C**, se muestran las ecuaciones derivadas de la ecuación **1. 37** para un líquido Newtoniano incompresible con ley de Fourier:

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + 2\mu \text{tr}(\underline{D}^2) \quad \text{donde:} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T$$

1.5. Cálculo de la Conductividad Térmica.

1.5.1. Teoría de la conductividad térmica de gases a baja densidad.

Gases monoatómicos diluidos.

Considerar esferas rígidas sin energías de interacción de masa m y diámetro d . Se utilizarán los resultados de la teoría cinética de esferas rígidas, partiendo de las siguientes definiciones:

$$\langle v \rangle = \left(\frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \quad \text{Velocidad media molecular} \quad (1.38)$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m} \quad \text{Velocidad cuadrática media} \quad (1.39)$$

$$Z = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \quad \text{Frecuencia de colisiones} \quad (1.40)$$

donde n es el número de esferas (moléculas) por unidad de volumen.

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad \text{Trayectoria libre media} \quad (1.41)$$

Considérese un flujo que mantiene un perfil de temperaturas lineal, como se representa en la figura 1.2.

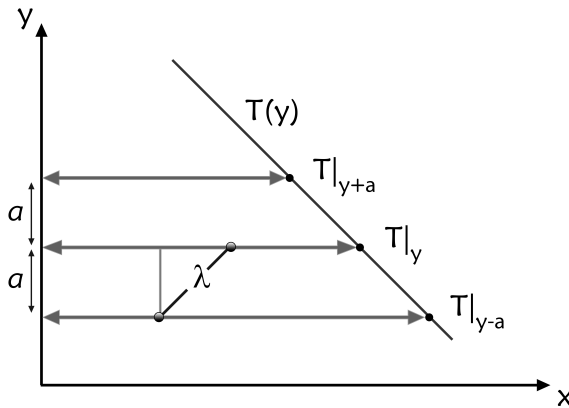


Figura 1.2. Fluido con perfil de temperaturas lineal. Las capas de fluido a diferente temperatura tienen un grosor a .

Supóngase que, en promedio, el grosor de las capas de fluido a diferente temperatura es:

$$a = \frac{2}{3} \lambda \quad (1.42)$$

y que la energía interna del sistema es su energía cinética (ver ecuación 1.39):

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

La capacidad calorífica molar a volumen constante es:

$$\hat{C}_v = \left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial T} \right)_{\hat{V}} = \hat{N} \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \right) = \frac{3}{2} k_B \hat{N} = \frac{3}{2} R \quad (1.43)$$

donde $\hat{N}$ es el número de Avogadro y R es la constante de los gases.

Para determinar la conductividad térmica es necesario suponer que las ecuaciones anteriores son válidas en situaciones de no equilibrio, y que la equi-partición de la energía es válida si suponemos que la energía cinética promedio corresponde a las moléculas que colisionaron en una región de temperatura T . El flux de calor se define como:

$$q_y = Z \left(\frac{1}{2} m v_x^2 |_{0-a} - \frac{1}{2} m v_x^2 |_{0+a} \right) = \frac{3}{2} k_B Z (T_{0-a} - T_{0+a}) \quad (1.44)$$

Para un perfil lineal de temperatura obtenemos el gradiente:

$$\frac{dT}{dy} = \frac{T_{0-a} - T_0}{-\frac{2}{3} \lambda} = \frac{T_{0+a} - T_0}{-\frac{2}{3} \lambda}$$

Substituyendo en la ecuación 1.44, y considerando la ecuación 1.40, obtenemos:

$$q_y = \frac{3}{2} k_B \left(\frac{1}{4} n \langle v \rangle \right) \left(-\frac{4}{3} \lambda \right) \frac{dT}{dy} = -\frac{1}{2} n k_B \langle v \rangle \lambda \frac{dT}{dy} \quad (1.45)$$

Por la ley de Fourier, la conductividad térmica se define:

$$k = \frac{1}{2} n k_B \langle v \rangle \lambda \quad (1.46)$$

Como $n m \hat{C}_v = \frac{3}{2} n k_B = \rho \hat{C}_v$, (ver ecuación 1.43), entonces

$$k = \frac{1}{3} \rho \hat{C}_v \langle v \rangle \lambda \quad (1.47)$$

Las expresiones de la velocidad promedio y la trayectoria libre media (ecuaciones 1.38 y 1.41) se pueden substituir en la ecuación 1.47 para obtener:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} n k_B \left(\frac{8 k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{k_B}{\pi d^2} \left(\frac{k_B T}{\pi m} \right)^{1/2} \\ &= \frac{k_B}{m \pi d^2} \left(\frac{m k_B T}{\pi} \right)^{1/2} = \frac{2}{3} \frac{\hat{C}_v}{\pi d^2} \left(\frac{m k_B T}{\pi} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.48)$$

La ecuación 1.48 predice que k es independiente de la presión, y es válida hasta 10 atm. La gráfica mostrada en la figura 1.3 indica la variación de k en función de la temperatura.

La teoría de Chapman-Enskog predice la siguiente expresión para gases monoatómicos a baja densidad:

$$k = \frac{25}{32} \frac{\hat{C}_v}{\pi \sigma^2} \frac{(\pi m k_B T)^{1/2}}{\Omega_k} = 1.989 \times 10^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} \quad (1.49)$$

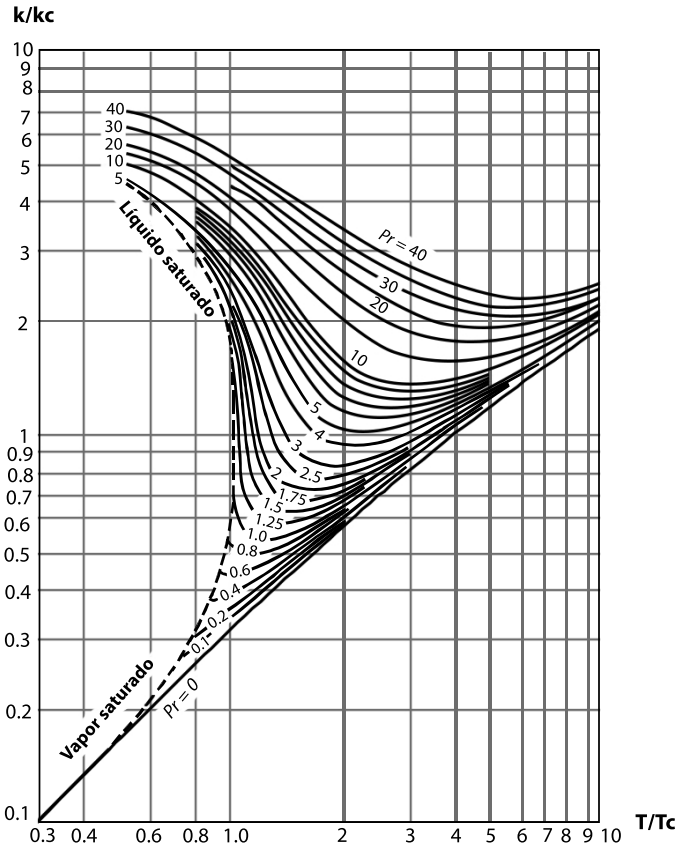


Figura 1.3. Conductividad térmica reducida en función de la temperatura reducida a baja densidad. Esferas rígidas.

En donde Ω_k es la integral de colisiones para la conductividad térmica y es idéntica a la correspondiente a la viscosidad Ω_μ . σ es el diámetro molecular del potencial de Lennard-Jones. La ecuación 1.49 es similar a la fórmula de viscosidad de la misma teoría:

$$\mu = \frac{5}{16} \frac{1}{\pi \sigma^2} \frac{(\pi m k_B T)^{1/2}}{\Omega_\mu} = 2.6 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \quad (1.50)$$

A partir de las ecuaciones 1.49 y 1.50 se puede obtener la relación entre la viscosidad y la conductividad térmica:

$$k = \frac{15}{4} \frac{R}{M} \mu = \frac{5}{2} \hat{C}_v \mu \quad (1.51)$$

En gases poliatómicos (fórmula de Eucken) obtenemos:

$$k = \left(\hat{C}_p + \frac{5}{4} \frac{R}{M} \right) \mu \quad (1.52)$$

de donde $\hat{C}_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M}$. El número de Prandtl se define:

$$Pr = \frac{\hat{C}_p \mu}{k} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_p + \frac{5}{4} \frac{R}{M}} \quad (1.53)$$

1.5.2. Teoría de la conductividad térmica de líquidos.

Esta teoría se basa en la descripción de un líquido como un arreglo cúbico con dimensión característica “ a ” ocupado por las moléculas del líquido. El volumen por molécula es:

$\frac{\hat{V}}{\hat{N}} = a^3$. La energía se transfiere de un plano a otro a la velocidad del sonido v_s . A partir de la ecuación 1.47 y considerando que $v_s = \frac{\langle v \rangle}{3}$ (la propagación se da en una dirección),

$$k = \frac{1}{3} \rho \hat{C}_v \langle v \rangle \lambda = \rho \hat{C}_v v_s a = \rho \hat{C}_v v_s \left(\frac{\hat{V}}{\hat{N}} \right)^{1/3} \quad (1.54)$$

Según la relación de Dulong y Petit, la capacidad calorífica de un líquido monoatómico es aproximadamente la de un sólido a alta temperatura:

$$\hat{C}_v = \frac{3 k_B}{m} \quad (1.55)$$

Tomando en cuenta que la densidad del líquido es $\rho = \frac{m \hat{N}}{\hat{V}}$, y substituyendo la ecuación 1.55 en la 1.54 obtenemos:

$$k = \left(\frac{m \hat{N}}{\hat{V}} \right) \left(\frac{3 k_B}{m} \right) v_s \left(\frac{\hat{V}}{\hat{N}} \right)^{1/3} = 3 k_B v_s \left(\frac{\hat{N}}{\hat{V}} \right)^{2/3} \quad (1.56)$$

1.5.3. Conductividad térmica de sólidos.

Para metales puros, la conductividad térmica y la conductividad eléctrica k_e es descrita por medio de la ecuación de Lorenz:

$$L = \frac{k}{k_e T} \quad (1.57)$$

donde L es la constante de Lorenz, con un valor de $L = 25 \times 10^{-9} \text{ volt}^2 / K^2$ a $0^\circ C$. Los metales pueden ser superconductores de la electricidad a $-269.40^\circ C$, pero no del calor.

Apéndice A.

Ley de Fourier

<i>Coordenadas cartesianas</i>		<i>Coordenadas cilíndricas</i>		<i>Coordenadas esféricas</i>	
$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}$	(A-1)	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	(A-4)	$q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$	(A-7)
$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}$	(A-2)	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	(A-5)	$q_\theta = -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}$	(A-8)
$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$	(A-3)	$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$	(A-6)	$q_\phi = -k \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi}$	(A-9)

Apéndice B.

La ecuación de la energía en términos del flux de calor y momentum (ecuación 1. 28).

Los términos dentro del paréntesis { } corresponden a la disipación viscosa.

Coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & - \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \\ & - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left\{ \tau_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-1})$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = & - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] \\ & - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) + \tau_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ \tau_{r\theta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \tau_{rz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \tau_{\theta z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-2})$$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = & - \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \sin \theta) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} \right] - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \\ & + \left\{ \tau_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \tau_{\theta\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) + \tau_{\phi\phi} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \right\} \\ & + \left\{ \tau_{r\theta} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + \tau_{r\phi} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} \right) \right. \\ & \left. + \tau_{\theta\phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{\cot \theta}{r} v_\phi \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Apéndice C.

La ecuación de la energía para un fluido incompresible Newtoniano con ley de Fourier.
(Ecuación 1. 37)

Los términos dentro del paréntesis { } corresponden a la disipación viscosa.

Coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &+ \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-1})$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &+ \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-2})$$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} \rho \hat{C}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) &= k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \left. \right] \\ &+ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right\} \\ &+ \mu \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 \right. \\ &+ \left. \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C-3})$$

Tarea 1

1. Predicción de conductividades térmicas de gases a baja densidad. (Problema 9A.1., Bird et al.)

- a) Calcular la conductividad térmica del argón a 100°C y presión atmosférica, usando la teoría de Chapman-Enskog y las constantes de Lennard-Jones derivada de datos de viscosidad. Comparar los resultados con los valores observados de $506 \times 10^{-7} \text{ cal/cm s K}$.

$$\sigma = 3.432 \text{ \AA}, \quad \frac{\epsilon}{K} = 122.4 \text{ K}, \quad \Omega_\mu = 1.034.$$

- b) Calcular las conductividades térmicas del NO y CH_4 a 300°K y a presión atmosférica, a partir de los datos siguientes para esas condiciones:

	$\mu \times 10^7 \text{ (g/cm s)}$	$C_p \text{ (cal/g mol K)}$
NO	1929	7.15
CH_4	1116	8.55

Comparar los resultados obtenidos con los valores experimentales (en unidades de W/m K):

$\text{NO} : 0.0259, \text{CH}_4 : 0.03427$.

2. Estimación de la conductividad térmica de un gas denso. (Problema 9A.3, Bird et. al.)

Calcular la conductividad térmica del metano a 110.4 atm y 127°F utilizando la Figura 1.3. Las propiedades críticas del metano son: $P_c = 45.8 \text{ atm}$, $k_c = 158 \times 10^{-6} \text{ cal/cm s K}$, $T_c = 191.1 \text{ K}$.

Respuesta: $0.0294 \text{ BTU/hr ft F}$.

3. Predicción de la conductividad térmica de una mezcla de gases. (Problema 9A.4, Bird et. al.)

Calcular la conductividad térmica de una mezcla que contiene 20% en mol CO_2 y 80% de hidrógeno a 1 atm y 300 K . Utilizar los datos de la siguiente tabla para los cálculos. Las expresiones para calcular la conductividad de la muestra son:

	$\mu \times 10^5 \text{ (Pas)}$	$k \text{ (W/m K)}$
H_2	0.8944	0.1789
CO_2	1.506	0.0166

$$k_{mix} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\chi_\alpha k_\alpha}{\sum_\beta \chi_\beta \Phi_{\alpha\beta}}, \quad \text{donde } \Phi_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}\right)^{1/2} \left(\frac{M_\beta}{M_\alpha}\right)^{1/4}\right]^2$$

Respuesta: 0.1204 W/m K .

4. Estimación de la conductividad térmica de un líquido puro. (Problema 9A.5, Bird et. al.)

Calcular la conductividad térmica de agua líquida a $40^\circ C$ y 40 megabar de presión ($1 \text{ megabar} = 10^6 \text{ dinas/cm}^2$). La compresibilidad isotérmica ($1/\rho (\partial \rho / \partial p)_T$) es $38 \times 10^{-6} \text{ megabar}^{-1}$ y la densidad es 0.9938 g/cm^3 . Suponer que $C_p = C_v$.

Respuesta: $0.375 \text{ BTU/hr ft F}$.

5. Cálculo del número de Lorenz. (Problema 9A.6, Bird et. al.)

- a) La teoría cinética se puede aplicar a un gas de electrones en un metal resultando en la siguiente expresión del número de Lorenz:

$$L = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{\kappa}{e} \right)^2$$

en donde κ es la constante de Boltzmann y e es la carga del electrón. Calcular L en las unidades dadas en la ecuación **1. 57**.

- b) La resistividad eléctrica ($1/k_e$) del cobre a $20^\circ C$ es $1.72 \times 10^{-6} \text{ ohm cm}$. Estimar la conductividad térmica en W/m K utilizando la ecuación anterior.

Respuestas:

a) $2.44 \times 10^{-8} \text{ volt}^2/\text{K}^2$.

b) 416 W/m K .

Capítulo 2

Flujos Compresibles

Este capítulo inicial consta de 3 partes:

1. Gases ideales. Casos especiales de la ecuación de balance de energía.
2. Propagación de ondas de sonido. La ecuación de onda.
3. Procesos con elevada disipación: ondas de choque.

2. 1.. Gases Ideales. Casos Especiales de la Ecuación de Balance de Energía.

Gases ideales.

Del balance de energía del capítulo anterior, se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

Formulación de la energía interna.

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} + \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \right] \nabla \cdot \underline{v} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1.28)$$

Formulación entálpica.

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} + \left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_p \right] \frac{dP}{dt} = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (1.37)$$

$$\text{A partir de la ecuación de los gases ideales: } P \hat{V} = RT \quad (1.13)$$

podemos obtener las siguientes igualdades:

$$P = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \quad \text{y si P es constante, entonces: } d(\ln T) + d(\ln p) = 0, \text{ luego:}$$

$$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_p = -1. \quad \text{Sabido que } \frac{d \ln p}{dt} = -\nabla \cdot \underline{v},$$

por la ecuación 1. 8, entonces las ecuaciones 1. 28 y 1. 37 se simplifican en:

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} = -P(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (2.1)$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (2.2)$$

Procesos adiabáticos sin disipación.

En este caso, $\underline{\tau} = 0$, $\underline{q} = 0$. Las ecuaciones 2.1 y 2.2 se reducen a:

$$\rho \hat{C}_v \frac{dT}{dt} = -P(\nabla \cdot \underline{v}) = \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.3)$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} \quad (2.4)$$

Integrando la ecuación 2.4 sobre la derivada material (esto es, para un elemento material):

$$\frac{dP}{dT} = \rho \hat{C}_p = \frac{P}{RT} \hat{C}_p = \frac{P}{T} \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_p - \hat{C}_v} \quad \text{en donde para un gas ideal } \hat{C}_p - \hat{C}_v = R \quad (2.5)$$

$$\frac{d \ln P}{d \ln T} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \text{donde } \gamma = \frac{\hat{C}_p}{\hat{C}_v} \quad \text{Integrando:}$$

$$\ln P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \ln T + C \quad \Rightarrow \quad \frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = C \quad (2.6)$$

donde C es una constante. Usando la ley de los gases:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = C \quad (2.7)$$

Similarmente, a partir de las ecuaciones 2.3 y 2.4 se obtiene:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{P \rho \hat{C}_p dT}{\rho^2 \hat{C}_v dT} = \frac{P}{\rho} \gamma \quad (2.8)$$

Según la ley de los gases: $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = C$ (constante). C puede ser evaluada en una referencia:

$$\frac{P_0}{\rho_0} = C, \quad \text{luego: } \frac{dP}{d\rho} = \frac{P_0}{\rho_0} \gamma = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \quad (2.9)$$

2. 2. Propagación del sonido. La ecuación de onda.

La propagación del sonido puede considerarse como un proceso adiabático sin fricción. A partir de la ecuación 2.9, es posible linealizar las ecuaciones de conservación de masa y momentum para obtener la ecuación de onda. La ecuación de conservación de masa se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \underline{v}) + \underline{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.10)$$

y la de momentum considera que los efectos de gravedad son despreciables:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla P \quad (2.11)$$

El proceso de linealización involucra la consideración de una expansión de términos de orden cero hasta orden 2:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 \\ \underline{v} &= \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ P &= P_0 + P_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

En donde el orden cero involucra al medio estático en equilibrio $\underline{v}_0 = 0$, a una densidad y presión ρ_0, P_0 . Los órdenes 1 y 2 representan las fluctuaciones alrededor del estado de equilibrio. Substituyendo la ecuación 2.12 en 2.10 obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1) \nabla \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \cdot \nabla (\rho_0 + \rho_1) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \underline{v}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde se ha considerado que ρ_0 es constante y la expansión considera hasta el orden 1 en los productos de las variables. Substituyendo las expansiones 2.12 en la ecuación 2.11:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial}{\partial t} (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) &= -\nabla P_0 - \nabla P_1 \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}_1 &= -\nabla P_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde P_0 es constante y se considera hasta orden 1 en los productos. Omitiendo el subíndice 1, y tomando la derivada temporal de la ecuación 2.13 obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{v}) = 0 \quad (2.15)$$

Tomando la divergencia de la ecuación 2.14:

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{v}) = -\nabla^2 P \quad (2.16)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones **2.15** y **2.16**, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 P \quad (2.17)$$

Los procesos adiabáticos representan casos límite del flujo isentrópico. De hecho, a partir de la ecuación **2.7** podemos calcular la variación de la presión con respecto a la densidad a entropía constante:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = C \gamma \rho^{\gamma-1} = C \gamma \frac{\rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma RT = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T = \frac{dP}{d\rho} \quad (2.18)$$

Integrando:

$$\int dP = \gamma RT \int d\rho + C \quad \text{Aplicando el Laplaciano:}$$

$$\nabla^2 P = (\gamma RT) \nabla^2 \rho \quad (2.19)$$

Substituyendo la ecuación **2.19** en la **2.17** obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = (\gamma RT) \nabla^2 \rho \quad (2.20)$$

La velocidad de propagación de la onda acústica es v_s , por lo que el coeficiente de la ecuación **2.20** es v_s^2 . Luego entonces:

$$v_s^2 = \gamma RT \quad (2.21)$$

La solución de la ecuación **2.20** (ver apéndice A) es:

$$\rho = \rho_0 \left\{ 1 + \phi_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - v_s t) \right] \right\} \quad (2.22)$$

La ecuación **2.22** es la ecuación de onda armónica de longitud de onda λ y amplitud $\rho_0 \phi_0$ propagándose en dirección z a la velocidad v_s . Dentro de este análisis a primer orden, la velocidad del sonido es independiente de $\rho_0 \phi_0$.

2.3. Procesos con elevada disipación: ondas de choque.

Consideremos el proceso de formación de una onda de choque en una tobera, como se representa en la figura **2.1**.

Suponemos un flujo de gas ideal unidireccional. En este caso, las ecuaciones requeridas son las ecuaciones de conservación y las ecuaciones constitutivas del fluido Newtoniano, la ley de Fourier y la ley de los gases ideales, independientes del tiempo y despreciando efectos gravitatorios. Estas son:

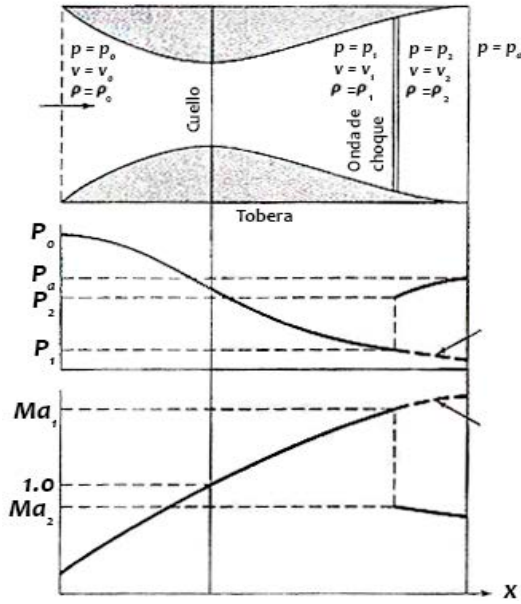


Figura 2.1. Formación de una onda de choque en una tobera. El gas entra a condiciones del punto cero, y después de la contracción se forma la onda que pasa en una distancia muy pequeña de las condiciones en el punto 1 al punto 2.

$$\nabla \cdot \rho \underline{v} = 0 \quad (2.23)$$

$$\rho (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad (2.24)$$

$$\rho \hat{C}_p (\underline{v} \cdot \nabla T) = \underline{v} \cdot \nabla P - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D} \quad (2.25)$$

$$\underline{\tau} = -\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{I} + 2\mu \underline{D} \quad (2.26)$$

$$\underline{q} = -k \nabla T \quad (2.27)$$

$$P = \rho R T \quad (2.28)$$

A régimen permanente, independiente del tiempo, tenemos las siguientes relaciones, tomadas en cuenta en la ecuación 2.25:

$$\frac{dT}{dt} = \underline{v} \cdot \nabla T \quad y \quad \frac{dP}{dt} = \underline{v} \cdot \nabla P \quad (2.29)$$

En la dirección x , las ecuaciones 2.23 - 2.26 se reducen a:

$$\frac{d}{dx} \rho v_x = 0 \quad (2.30)$$

$$\rho \left(v_x \frac{dv_x}{dx} \right) = -\frac{dP}{dx} + \frac{d\tau_{xx}}{dx} \quad (2.31)$$

$$\tau_{xx} = -\frac{2}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} + 2\mu \frac{dv_x}{dx} = \frac{4}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} \quad (2.32)$$

$$\rho \hat{C}_p v_x \frac{dT}{dx} = v_x \frac{dP}{dx} - \frac{dq_x}{dx} + \tau_{xx} \frac{dv_x}{dx} \quad (2.33)$$

Substituyendo la ecuación 2.32 en las ecuaciones 2.31 y 2.33, y la ecuación 2.27 en la 2.25 se obtiene:

$$\rho \left(v_x \frac{dv_x}{dx} \right) = -\frac{dP}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv_x}{dx} \right) \quad (2.34)$$

$$\rho \hat{C}_p v_x \frac{dT}{dx} = v_x \frac{dP}{dx} + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^2 \quad (2.35)$$

Las ecuaciones **2.28**, **2.30**, **2.34** y **2.35** son 4 ecuaciones con 4 variables a determinar $(T, P, \rho, v)_2$, a partir de las variables conocidas $(T, P, \rho, v)_1$.

Procedimiento.

$$\text{Integrando la ecuación } \mathbf{2.30} \quad \rho v_x = \rho_1 v_1 \quad (2.36)$$

Substituyendo **2.36** en la ecuación **2.34**:

$$\rho_1 v_1 \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dP}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv_x}{dx} \right) \quad (2.37)$$

Substituyendo la ecuación **2.37** en la **2.35** obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1 \hat{C}_p \frac{dT}{dx} &= v_x \left[-\rho_1 v_1 \frac{dv_x}{dx} + \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv_x}{dx} \right) \right] + \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^2 \\ \hat{C}_p \frac{dT}{dx} &= v_x \left[-\frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv_x}{dx} \right) \right] + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^2 \\ \hat{C}_p \frac{dT}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} &= \frac{v_x}{\rho_1 v_1} \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\mu \frac{dv_x}{dx} \right) + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{4}{3} \mu \left(\frac{dv_x}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \\ \hat{C}_p \frac{dT}{dx} + v_x \frac{dv_x}{dx} &= \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left(v_x \frac{dv_x}{dx} \right) + \frac{1}{\rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \hat{C}_p T + \frac{1}{2} v_x^2 &= \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) + \frac{1}{\rho_1 v_1} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + C_1 \\ \hat{C}_p T + \frac{1}{2} v_x^2 &= \frac{k}{\hat{C}_p \rho_1 v_1} \left[\frac{4}{3} \frac{\hat{C}_p \mu}{k} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v_x^2 \right) + \hat{C}_p \frac{dT}{dx} \right] + C_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para gases ideales: $\frac{\hat{C}_p \mu}{k} \approx \frac{3}{4}$, luego, la ecuación **2.39** se reduce a:

$\hat{C}_p T + \frac{1}{2} v_x^2 = \frac{k}{\hat{C}_p \rho_1 v_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} v_x^2 + \hat{C}_p T \right] + C_1$, la cual se puede integrar para obtener:

$$\hat{C}_p T + \frac{1}{2} v_x^2 = C_1 + C_2 e^{\left(\frac{\hat{C}_p \rho_1 v_1}{k} \right) x} \quad (2.40)$$

Con condiciones límite: $x \rightarrow \infty$ la energía total (cinética + térmica) es finita, por lo que

$$C_2 = 0. \quad \text{En } x = 1, \quad \hat{C}_p T + \frac{1}{2} v_x^2 = \hat{C}_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = C_1 \quad (2.41)$$

Integrando la ecuación **2.37** obtenemos:

$$\rho_1 v_1 v_x = -P + \frac{4}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} + C_3 \quad (2.42)$$

La constante C_3 se determina en regiones lejanas de la onda ($x \rightarrow \infty$, $\frac{dv_x}{dx} = 0$) en donde las condiciones son las del punto 1:

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = C_3 = \rho_1 v_1^2 + \rho_1 R T_1$$

Se ha utilizado la ley de los gases (ecuación **2.28**). Substituyendo C_3 en la ecuación **2.42** obtenemos:

$$P + \rho_1 v_1 v_x = \frac{4}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} + \rho_1 v_1^2 + P_1 \quad (2.43)$$

Substituyendo la ley de los gases en la ecuación **2.41** se obtiene:

$$\hat{C}_p \frac{P}{\rho R} + \frac{1}{2} v_x^2 = C_1 = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_x^2,$$

resolviendo para P , substituyendo en la ecuación **2.43** y empleando la ecuación **2.36** ($\rho_1 v_1 = \rho v_x$), se obtiene:

$$\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \rho C_1 - \frac{1}{2} \rho v_x^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) + \rho v_x^2 = \frac{4}{3} \mu \frac{dv_x}{dx} + C_3 \quad (2.44)$$

$$\text{Dividiendo entre } \rho: \quad \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) C_1 - \frac{1}{2} v_x^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) + v_x^2 = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{dv_x}{dx} + \frac{C_3}{\rho}$$

Con la ecuación **2.36** obtenemos:

$$\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) C_1 = -v_x^2 \left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) + \frac{4}{3} \frac{\mu v_x}{\rho_1 v_1} \frac{dv_x}{dx} + \frac{v_x}{\rho_1 v_1} C_3 \quad (2.45)$$

Ahora utilizamos las variables adimensionales siguientes:

$$\phi = \frac{v_x}{v_1} \quad \text{velocidad adimensional} \quad (2.46)$$

$$\xi = \frac{x}{\lambda} \quad \text{distancia adimensional} \quad (2.47)$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{v_s} \quad \text{número de Mach} \quad (2.48)$$

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{Ma_1^2} \quad (2.49)$$

$$\beta = \frac{9}{8} (\gamma + 1) \sqrt{\frac{\pi}{8\gamma}} \quad (2.50)$$

La ecuación 2.45 se transforma en:

$$\phi \frac{d\phi}{d\xi} = \beta Ma_1 (\phi - 1) (\phi - \alpha) \quad (2.51)$$

Cuya solución (ver apéndice B) es:

$$\frac{1 - \phi}{(\phi - \alpha)^\alpha} = e^{[\beta Ma_1 (1 - \alpha) (\xi - \xi_0)]} \quad (2.52)$$

La solución se grafica en la figura 2.2, en la que la velocidad adimensional varía en función de la distancia relativa a una referencia (x_0). El grosor de la onda de choque es del orden de la distancia libre media molecular. La ecuación 2.52 cumple con las siguientes condiciones:

$$\xi \rightarrow -\infty, \quad \phi \rightarrow 1$$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad \phi \rightarrow \alpha$$

Como $\alpha < 1$, implica que $Ma_1 > 1$.

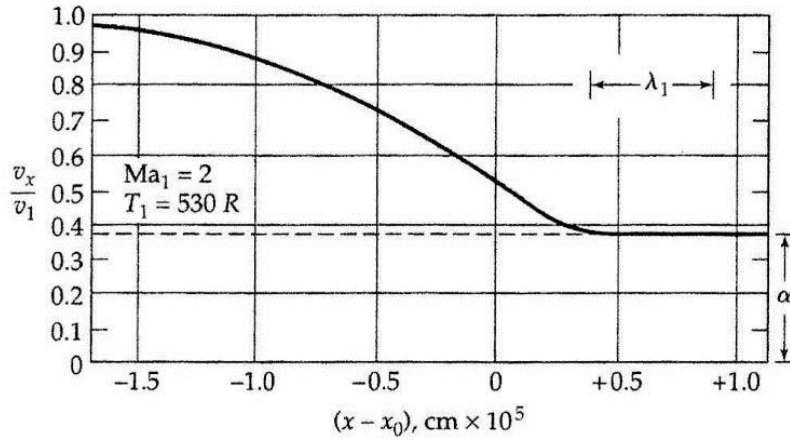


Figura 2.2. Velocidad adimensional versus distancia relativa, indicando la magnitud de la distancia libre media. $Ma_1 = 2$, $T_1 = 530^\circ R$.

Apéndice A.

Solución de la ecuación de onda. Método de separación de variables.

Partimos de las ecuaciones 2.20 y 2.21:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho \quad (\text{A-1})$$

La solución propuesta tiene la forma: $\rho(x, t) = T(t)X(x)$ (A-2)

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = T''(t)X(x) \quad y \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = T(t)X''(x) \quad (\text{A-3})$$

Substituyendo A-3 en A-1:

$$\frac{T''(x)}{T(x)} = v_s^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = k^2 \quad \begin{array}{l} \text{con } v_s^2 = \text{constante,} \\ \text{la cual da origen a dos ecuaciones:} \end{array} \quad (\text{A-4})$$

$$\begin{aligned} T'' - k^2 T &= 0 \\ X'' - k^2 X &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Para soluciones periódicas se requiere que $k < 0$. Las soluciones de A-5 son:

$$T(t) = A \cos(kt) + B \sen(kt) \quad (\text{A-6})$$

$$X(x) = C \cos(kx/v_s) + D \sen(kx/v_s) \quad (\text{A-7})$$

Substituyendo en A-2 obtenemos:

$$\rho(x, t) = [A \cos(kt) + B \sen(kt)] [C \cos(kx/v_s) + D \sen(kx/v_s)] \quad (\text{A-8})$$

Sea λ la longitud de onda. Las condiciones de frontera para A-8 son:

$$\rho(0, t) = \rho(\lambda, t) = 0 \quad (\text{A-9})$$

y las condiciones iniciales son: $\rho(x, 0) = \rho_0$ y $\frac{d\rho(x, 0)}{dt} = 0$

Por la primera condición de frontera:

$$\rho(0, t) = 0 = C [A \cos(kt) + B \sen(kt)] \quad \text{que implica que } C = 0. \quad (\text{A-10})$$

Por la condición inicial:

$$\frac{d\rho}{dt}(x, 0) = 0 = [-kA \sen(kt) + kB \cos(kt)] \left[D \sen\left(\frac{kx}{v_s}\right) \right] \Rightarrow B = 0 \quad (\text{A-11})$$

La ecuación queda como:

$$\rho(x, t) = [AD \cos(kt)] \left[\sen\left(\frac{kx}{v_s}\right) \right] \quad (\text{A-12})$$

La segunda condición de frontera nos da:

$$\rho(\lambda, t) = 0 = [A \cos(kt)] \left[D \operatorname{sen} \left(\frac{k\lambda}{v_s} \right) \right] \quad \text{Implica que } \frac{k\lambda}{v_s} = \pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Con lo cual la constante } k \text{ es evaluada como: } k_n = \frac{\pi n v_s}{\lambda}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A-13})$$

Substituyendo **A-13** en **A-12** obtenemos:

$$\rho_n(x, t) = [AD]_n [\cos(k_n t)] \left[\operatorname{sen} \left(\frac{k_n x}{v_s} \right) \right] \quad (\text{A-14})$$

La solución completa es:

$$\rho_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(k_n t) \operatorname{sen} \left(\frac{k_n x}{v_s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} k_n \left(\frac{x}{v_s} - t \right) \quad (\text{A-15})$$

Aplicando la primera condición inicial, y considerando la ecuación **A-13**, obtenemos:

$$\rho_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n x}{\lambda} \right) = \rho_0 \quad (\text{A-16})$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi m x}{\lambda} \right)$ obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n x}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi m x}{\lambda} \right) = \rho_0 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi m x}{\lambda} \right)$$

Considerando una función continua, la sumatoria puede ser representada por una integral, de tal forma que:

$$C_n \int_0^{\lambda} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi n x}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi m x}{\lambda} \right) dx = \rho_0 \int_0^{\lambda} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi m x}{\lambda} \right) dx \quad \text{Resolviendo las integrales:}$$

$$C_n = \frac{2\rho_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad (\text{A-17})$$

Substituyendo **A-13** y **A-17** en la solución **A-15** obtenemos:

$$\rho_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\rho_0}{n\pi} C_n \operatorname{sen} \left[\frac{n\pi}{\lambda} (x - v_s t) \right] \quad (\text{A-18})$$

Para obtener la ecuación **2.22**, imponemos la condición de $\rho(0, 0) = \rho_0$, tal que para $n = 1$:

$$\rho_1(x, t) = \rho_0 + \frac{4\rho_0}{\pi} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{\lambda} (x - v_s t) \right] \quad (\text{A-19})$$

que es de la misma forma que la ecuación **2.22**, si $k_n = \frac{2\pi n v_s}{\lambda}$, en la ecuación **A-13**.

Apéndice B.

Solución a la ecuación de onda de choque.

Partimos de la ecuación **2.51**:

$$\phi \frac{d\phi}{d\xi} = \beta M a_1 (\phi - 1) (\phi - \alpha) \quad (\mathbf{2.51})$$

Integrando:

$$\int \phi \frac{d\phi}{(\phi - 1)(\phi - \alpha)} = \int_{\xi_0}^{\xi} \beta M a_1 d\xi \quad (\mathbf{B-1})$$

Integración por partes:

$$\frac{\phi}{(\phi - 1)(\phi - \alpha)} = \frac{A}{\phi - 1} + \frac{B}{\phi - \alpha} = \frac{A(\phi - \alpha) + B(\phi - 1)}{(\phi - 1)(\phi - \alpha)} \quad (\mathbf{B-2})$$

$$\text{de donde,} \quad A = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad B = \frac{-\alpha}{1 - \alpha}$$

$$\begin{aligned} \int \phi \frac{d\phi}{(\phi - 1)(\phi - \alpha)} &= A \int \frac{d\phi}{\phi - 1} + B \int \frac{d\phi}{\phi - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} [\ln|\phi - 1| - \alpha \ln|\phi - \alpha|] \\ &= \frac{1}{1 - \alpha} \ln \frac{|\phi - 1|}{|\phi - \alpha|^\alpha} \end{aligned} \quad (\mathbf{B-3})$$

Substituyendo **B-3** en **B-1** obtenemos:

$$\ln \frac{|\phi - 1|}{|\phi - \alpha|^\alpha} = \beta M a_1 (\xi - \xi_0) (1 - \alpha) \quad (\mathbf{B-4})$$

que es igual a la ecuación **2.52**.

Tarea 2

1. Demostrar que la solución de la ecuación de onda $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \rho$ es:

$$\rho = \rho_0 \left\{ 1 + \phi_0 \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - v_s t) \right] \right\}$$

2. **Velocidad, temperatura y cambios de presión en una onda de choque.** (Problema 11 A.5.)

Aire a 1 atm y 70° F fluye inicialmente a un número de Mach de 2 a través de una onda de choque estacionaria. Calcular las siguientes variables ($\gamma = 1.4$, $C_p = 0.24 \text{ BTU/lbm F}$):

- a) La velocidad inicial del aire.
- b) La velocidad, temperatura y presión después de la onda de choque.
- c) Los cambios de las energías cinética e interna a través de la onda de choque.

Respuestas:

- a) 2250 ft/s.
- b) 844 ft/s, 888°R; 4.48 atm.
- c) Energía interna = 61.4 BTU/lbm; Energía cinética: -86.9 BTU/lbm.

3. **Compresión adiabática sin fricción de un gas ideal.** (Problema 11 A.6.)

Calcular la temperatura alcanzada durante la compresión de aire, inicialmente a 100° F y 1 atm, cuando se reduce el volumen 0.1 de su valor inicial. El proceso es adiabático sin fricción, y ocurre en una máquina de combustión interna. $\gamma = 1.4$.

Respuesta: 950° F.

Capítulo 3

Balances Diferenciales

Este capítulo consta de las siguientes partes:

1. Convección-difusión de calor en sistemas cerrados.
2. Sistemas cerrados con generación interna de calor.
3. Transferencia de calor interfacial en sistemas abiertos.

3. 1. Convección-Difusión de Calor en Sistemas Cerrados.

En esta parte se considerarán los siguientes problemas, en los que la disipación viscosa es muy pequeña en comparación de los términos de convección y conducción (difusión). En este caso, la ecuación de conservación de energía (ecuación 1. 37) se reduce a:

$$\rho \hat{C}_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \underline{q} = k \nabla^2 T \quad (3.1)$$

Se analizarán los siguientes casos:

- a).- Convección forzada en tuberías.
- b).- Transpiración física.
- c).- Convección natural.

3. 1.1. Convección forzada en tuberías.

Se considera un flujo Newtoniano de densidad constante a presión a través de un tubo de sección uniforme. La pared de la tubería se calienta desde la entrada ($z = 0$) hasta una longitud L , como se muestra en la figura 3.1. El flujo se considera independiente del tiempo después de una longitud L' , a la cual se desarrolla un perfil térmico estable.

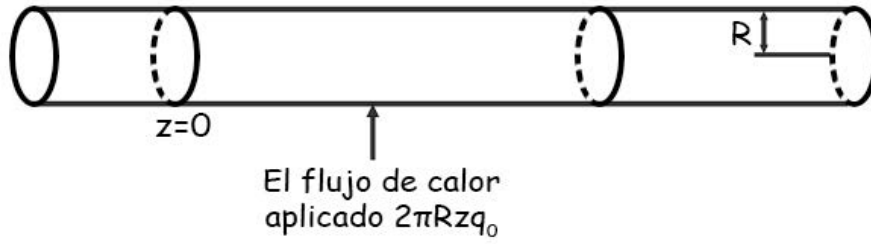


Figura 3.1. Flujo a presión de un líquido incompresible con perfil de velocidades parabólico. El fluido se calienta por un flux de calor aplicado en la pared del tubo, desde una temperatura $T = T_1$ hasta el desarrollo estable del perfil de temperaturas.

$$\text{El perfil de velocidades es: } v_z = \frac{\Delta P R^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.2)$$

Bajo régimen permanente, la ecuación 3.1 se reduce a:

$$\rho \hat{C}_p v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.3)$$

Con condiciones de frontera radiales:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (\text{mínimo de la temperatura en el centro del tubo}) \quad (3.4)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = q_0 \quad (\text{el flux de calor es constante en la pared}) \quad (3.5)$$

El flux de calor se encuentra en dirección opuesta a la normal de la superficie del tubo.

En la dirección axial, la condición de perfil térmico desarrollado $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ implica que no podemos usar la condición de $T = T_1$ en $z = 0$. Esto implica una longitud L' a partir de la cual el perfil es desarrollado o permanente. Esta condición requiere de una ecuación de balance adicional dada por el balance de energía integral. Este se obtiene integrando la ecuación 3.1 en el elemento material:

$$\rho \hat{C}_p \iiint \underline{v} \cdot \nabla (T - T_0) dV = - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV \quad (3.6)$$

Donde V es el volumen del elemento material y T_0 es una temperatura de referencia. Por el teorema de la divergencia:

$$\rho \hat{C}_p \iint (T - T_0) \underline{v} \cdot \underline{n} dS = - \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS \quad (3.7)$$

$$\rho \hat{C}_p \int_0^{2\pi} \int_0^R (T - T_0) v_{\text{máx}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \int_0^z q_0 dz R d\theta$$

$$\rho \hat{C}_p v_{\text{máx}} \int_0^R (T - T_0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = q_0 R z \quad T = T(r, z) \quad (3.8)$$

En el caso particular en que T fuera una temperatura promedio T , entonces:

$$\rho \hat{C}_p (T - T_0) Q_{vol} = Q \quad \text{lo que implica que} \quad w \Delta \bar{H} = Q \quad (3.9)$$

donde $w = \rho Q_{vol}$ es el gasto másico. La ecuación 3.9 representa el balance de energía integral que se analizará en el capítulo 6. A continuación, se procederá a la solución de la ecuación 3.3 con las condiciones 3.4, 3.5 y el balance 3.8. Primeramente, se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad (3.10)$$

Se substituyen estas variables en la ecuación 3.3:

$$(1 - \xi^2) \left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = \frac{\alpha}{R v_{m\acute{a}x}} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} \right] \quad (3.11)$$

Donde $\alpha = k/\rho \hat{C}_p$ es la difusividad térmica. El número adimensional que relaciona la convección con la difusión es el número de Peclet $P_e = R v_{m\acute{a}x}/\alpha$. Una solución analítica de la ecuación 3.11 involucra una solución asintótica a valores grandes de P_e . Esto implica que $\frac{\partial T}{\partial \zeta} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}$, por lo que la ecuación 3.11 se reduce a:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{(1 - \xi^2)} \frac{1}{P_e} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.12)$$

Con condiciones de frontera radiales:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad k \left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = q_0 R \quad \text{y la ecuación 3.8, que en términos adimensionales es:}$$

$$\frac{R^2}{k} \rho \hat{C}_p v_{m\acute{a}x} \int_0^1 (T - T_0) (1 - \xi^2) \xi d\xi = q_0 \frac{R}{k} z$$

$$P_e \int_0^1 \frac{k}{q_0 R} (T - T_0) (1 - \xi^2) \xi d\xi = \zeta \quad (3.13)$$

Lo que sugiere una temperatura adimensional $\theta = \frac{T - T_0}{q_0 R/k}$. Las ecuaciones 3.12 y 3.13 adoptan las siguientes formas:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{P_e} \frac{1}{(1 - \xi^2)} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$P_e \int_0^1 \theta (1 - \xi^2) \xi d\xi = \zeta \quad (3.15)$$

Con condiciones: $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 1 \quad (3.16)$

La solución general puede ser representada por $\theta(\xi, \zeta) = C_0 \zeta + \psi(\xi) \quad (3.17)$

donde C_0 es una constante, sugerida por la ecuación 3.14. Efectuando la derivada axial:

$$P_e C_0 (1 - \xi^2) \xi = \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = P_e C_0 \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{4} \right) + \frac{C_1}{\xi} \quad \text{integrando} \quad \psi = P_e C_0 \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^4}{16} \right) + C_1 \ln \xi + C_2$$

Substituyendo en 3.17: $\theta(\xi, \zeta) = C_0 \zeta + P_e C_0 \left(\frac{\xi^2}{4} - \frac{\xi^4}{16} \right) + C_1 \ln \xi + C_2 \quad (3.18)$

Por la condición de frontera 3.16 en el centro del tubo obtenemos $C_1 = 0 \quad (3.19)$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = P_e C_0 \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{4} \right) \Big|_{\xi=1} = \frac{P_e C_0}{4} = 1 \rightarrow C_0 = 4/P_e \quad (3.20)$$

Substituyendo C_1 y C_0 en la ecuación 3.18 obtenemos:

$$\theta(\xi, \zeta) = \frac{4}{P_e} \zeta + \left(\xi^2 - \frac{\xi^4}{4} \right) + C_2 \quad \text{Substituyendo } \theta \text{ en la ecuación 3.15 se obtiene:}$$

$$P_e \int_0^1 \left[\frac{4}{P_e} \zeta + \left(\xi^2 - \frac{\xi^4}{4} \right) + C_2 \right] (1 - \xi^2) \xi d\xi = \zeta$$

Primer término: $\frac{1}{P_e} \zeta$

Segundo término: $\frac{7}{96}$

Tercer término: $\frac{C_2}{4}$

Así,

$$\int_0^1 \left[\frac{4}{P_e} \zeta + \left(\xi^2 - \frac{\xi^4}{4} \right) + C_2 \right] (1 - \xi^2) \xi d\xi = \frac{\zeta}{P_e} + \frac{7}{96} + \frac{C_2}{4} \rightarrow C_2 = -\frac{7}{24}$$

Finalmente:

$$\theta(\xi, \zeta) = \frac{4}{P_e} \zeta + \left(\xi^2 - \frac{\xi^4}{4} \right) - \frac{7}{24} \quad (3.21)$$

La cual cumple con las condiciones **3.15** y **3.16**. Podemos definir el número de Nusselt adimensional:

$$Nu = \frac{q_0}{k\Delta T/2R} = \frac{2Rq_0}{k(T_R - T_b)} = \frac{2}{\theta|_{\xi=1} - \theta_b} \quad (3.22)$$

Que expresa la relación entre el calor transferido al fluido (q_0) y el calor conducido en el fluido desde la pared hasta el seno del fluido. La temperatura en la pared es:

$$\theta|_{\xi=1} = \frac{4\zeta}{P_e} + \frac{11}{24} \quad (3.23)$$

Definiendo el promedio dinámico de la temperatura en el seno del fluido:

$$T_b = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R T(r, z) v_z(r) r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^R v_z(r) r dr d\theta} \quad \text{o en términos adimensionales:}$$

$$\theta_b = \frac{\int_0^1 \theta(1-\xi^2) \xi d\xi}{\int_0^1 (1-\xi^2) \xi d\xi} = \frac{4\zeta}{P_e} \quad (3.24)$$

Substituyendo las ecuaciones **3.23** y **3.24** en la ecuación **3.22** obtenemos:

$$Nu = 48/11 \quad (3.25)$$

que describe el valor asintótico del número de Nusselt a distancias grandes de la entrada. A partir de la ecuación **3.21** podemos conocer las temperaturas en el centro y pared del tubo:

$$\theta|_{\xi=0} = \theta_b - \frac{7}{24} \quad y \quad \theta|_{\xi=1} = \theta_b + \frac{11}{24} \quad (3.26)$$

A medida que avanza axialmente, el perfil radial de temperaturas se mantiene constante y la temperatura a lo largo del tubo aumenta linealmente para $q_0 > 0$ (ver figura **3.2**). Este aumento puede expresarse en cantidades dimensionales a partir de la ecuación **3.24**:

$$\theta_b(\zeta) = \frac{4}{P_e} \zeta \rightarrow \frac{T_b - T_0}{q_0 R / k} = \frac{4\alpha z}{v_{m\acute{a}x} R^2} \quad (3.27)$$

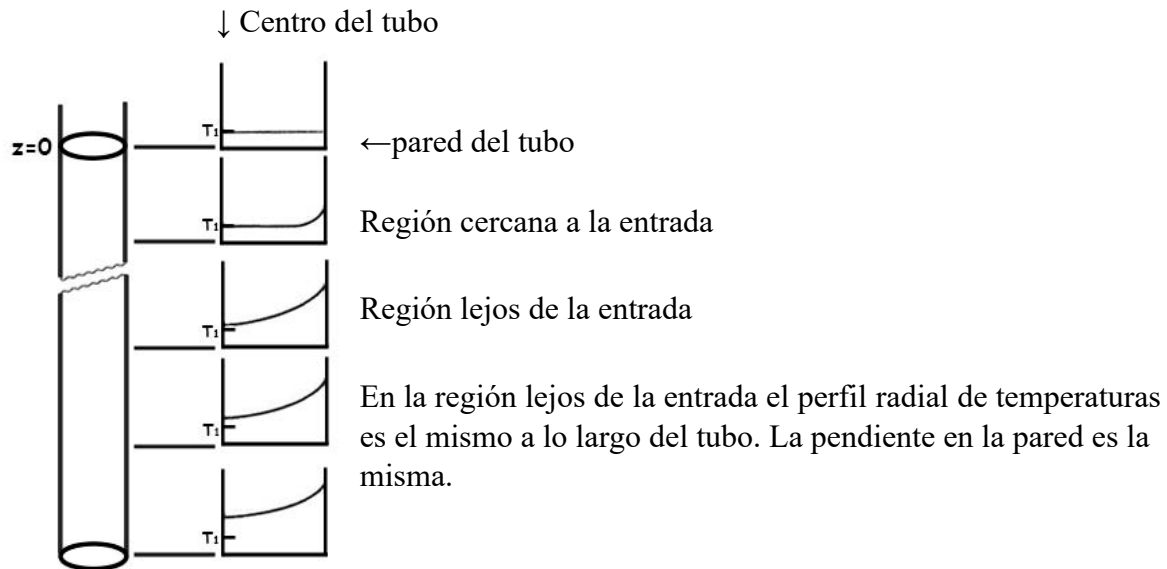


Figura 3.2. Desarrollo del perfil de temperatura a lo largo de un tubo con flux de calor constante en la pared.

3. 1.2. Transpiración física.

Consideremos un sistema que consiste en dos esferas porosas concéntricas con radios R y κR ($\kappa < 1$) con temperaturas T_κ y T_1 , respectivamente. Aire fluye radialmente en la región entre las esferas como se muestra en la figura 3.3. Desarrollar una expresión del flujo de calor por unidad de tiempo que debe ser removido de la esfera interior como función del flujo másico del fluido. Suponer velocidad del fluido pequeña.

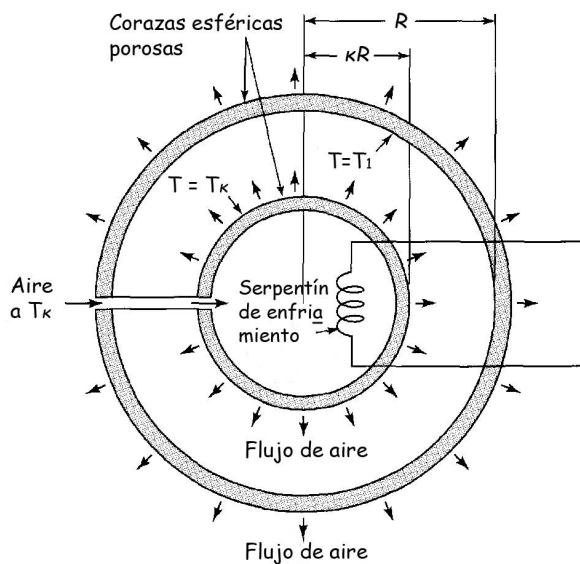


Figura 3.3. Enfriamiento por transpiración.

La esfera interior se enfría por medio de un serpentín de enfriamiento para mantener su temperatura a T_κ . Cuando el aire fluye entre las dos esferas, se requiere menor flujo de refrigeración.

Solución.

Se obtiene un menor flujo de refrigeración cuando el sentido de la velocidad del aire es el opuesto al sentido del flux de calor. Definamos la eficiencia de la transpiración como:

$$\varepsilon = \frac{Q_0 - Q}{Q_0} \quad (3.28)$$

donde Q_0 es el flujo de calor cuando la velocidad del fluido es cero, de tal forma que el sistema es más eficiente si $Q \rightarrow 0$.

Ecuaciones de conservación en coordenadas esféricas con componente radial (ver tablas):

$$\text{Masa:} \quad \frac{\rho}{r} \frac{d}{dr} (r^2 v_r) = 0 \quad (3.29)$$

$$\text{Momentum:} \quad \rho v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{dP}{dr} + \mu \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 v_r) \quad (3.30)$$

$$\text{Energía:} \quad \rho \hat{C}_p v_r \frac{dT}{dr} = \frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) \quad (3.31)$$

$$\text{Integrando la ecuación 3.29:} \quad \rho r^2 v_r = \text{constante} = \frac{w}{4\pi} \quad (3.32)$$

Substituyendo la ecuación 3.29 en la 3.30 e integrando obtenemos:

$$P(r) - P(R) = \frac{w^2}{2\rho D^4 \pi^2} \left(1 - \frac{R^4}{r^4} \right) \quad (3.33)$$

En este problema se considerarán gastos máscicos pequeños, por lo que la diferencia de presiones será pequeña. Substituyendo la ecuación 3.32 en la 3.31 obtenemos:

$$\frac{w \hat{C}_p}{4\pi k} \frac{dT}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) \quad (3.34)$$

$$\text{Definamos:} \quad \left. \frac{w \hat{C}_p}{4\pi k} \right|_{r=R} = \left. \frac{4\pi r^2 \rho v_r \hat{C}_p}{4\pi k} \right|_{r=R} = \frac{R^2 v_R}{\alpha} = P_e R \quad (3.35)$$

donde P_e es el número de Peclet. Si $u = r^2 \frac{dT}{dr}$, la ecuación 3.34 se transforma en:

$$P_e R \frac{u}{r^2} = \frac{du}{dr} \quad \text{la cual se puede integrar:} \quad \ln(u) = P_e R \int \frac{dr}{r^2} + \ln C_1 \quad \text{para obtener:}$$

$$u = C_1 e^{(-P_e R/r)}, \quad \text{por lo que:} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} e^{(-P_e R/r)} \quad \text{e integrando:}$$

$$T = C_1 \int e^{(-P_e R/r)} \frac{1}{r^2} dr + C_2 \quad \text{resolviendo:} \quad T = C_1 e^{(-P_e R/r)} + C_2 \quad (3.36)$$

con $Pe = \text{constante}$

Las condiciones de frontera son:

$$T|_{r=\kappa R} = T_{\kappa}, \quad T|_{r=R} = T_1 \quad (3.37)$$

Aplicando las condiciones 3.37 a la ecuación 3.36 obtenemos:

$$T_{\kappa} = C_3 e^{(-P_e/\kappa)} + C_2 \quad \text{y} \quad T_1 = C_3 e^{(-P_e)} + C_2, \quad \text{que resolviéndolas obtenemos:}$$

$$\frac{T - T_1}{T_{\kappa} - T_1} = \frac{e^{(-P_e R/r)} - e^{(-P_e)}}{e^{(-P_e/\kappa)} - e^{(-P_e)}} \quad (3.38)$$

El flux de calor es:

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} = -k \left[(T_{\kappa} - T_1) \frac{\frac{P_e R}{r^2} e^{(-P_e R/r)}}{e^{(-P_e/\kappa)} - e^{(-P_e)}} \right]$$

El flujo de calor se obtiene integrando:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q_r (-n_r) dS = - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} q_r r d\theta (r \sin\theta) d\phi = 4\pi k \left[(T_{\kappa} - T_1) \frac{P_e R e^{(-P_e R/r)}}{e^{(-P_e/\kappa)} - e^{(-P_e)}} \right]$$

$$Q|_{r=\kappa R} = 4\pi k (T_{\kappa} - T_1) \frac{P_e R}{1 - e^{(-P_e + P_e/\kappa)}} = \frac{4\pi k P_e R (T_1 - T_{\kappa})}{e^{(P_e/\kappa)(1-\kappa)} - 1} \quad (3.39)$$

Que es la expresión del calor removido en la esfera interior. Como $Q_0 = Q|_{P_e \rightarrow 0}$

La expansión del término exponencial da:

$$Q_0 = \frac{4\pi k P_e R (T_1 - T_{\kappa})}{1 + \left(\frac{P_e}{\kappa}\right)(1 - \kappa) - 1} = \frac{4\pi k P_e R (T_1 - T_{\kappa})}{\left(\frac{P_e}{\kappa}\right)(1 - \kappa)} = \frac{4\pi k R (T_1 - T_{\kappa})}{(1 - \kappa)/\kappa} \quad (3.40)$$

$$\text{Definiendo al número modificado de Peclet:} \quad \phi = \left(\frac{P_e}{\kappa}\right)(1 - \kappa) \quad (3.41)$$

$$\frac{Q|_{r=\kappa R}}{Q_0} = \frac{4\pi k P_e R (T_1 - T_{\kappa}) / e^{\phi} - 1}{4\pi k P_e R (T_1 - T_{\kappa}) / \phi} = \frac{\phi}{e^{\phi} - 1} \quad \text{La eficiencia (ecuación 3.28) es:}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_0 - Q}{Q_0} = 1 - \frac{\phi}{(e^{\phi} - 1)}. \quad \text{Expandiendo la exponencial para valores pequeños de } \phi:$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\phi}{\left(1 + \phi + \frac{\phi^2}{2}\right) - 1} = \frac{\frac{\phi}{2}}{1 + \frac{\phi}{2}} \quad (3.42)$$

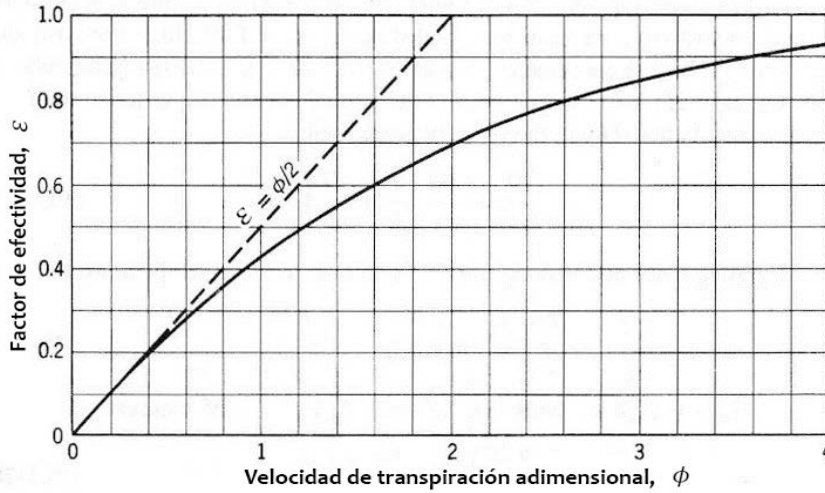


Figura 3.4. *Proceso de transpiración física. Variación de la eficiencia en función del número de Peclet modificado*

Cuando ϕ es grande, $\varepsilon \rightarrow 1$, y cuando $\phi \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow \phi/2$, la variación es lineal. En la figura 3.4 se muestra una gráfica de la eficiencia en función del número de Peclet. A valores de P_e pequeños, inicialmente la eficiencia crece linealmente, y se vuelve asintótica a valores mayores de $\phi = 4$.

3. 1.3. Convección natural.

Es el movimiento de un líquido debido a gradientes de temperatura.

Ecuación de Boussinesq.

Su deducción parte del balance lineal de momentum para un fluido Newtoniano en donde la densidad depende de la temperatura:

$$\rho(T) \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho(T) \underline{g} \quad (3.43)$$

En un líquido, la densidad depende de la temperatura de forma lineal:

$$\rho(T) = \bar{\rho} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\bar{T}} (T - \bar{T}) + \dots \quad (3.44)$$

Donde $\bar{\rho}$ es la densidad del fluido a $\bar{T}$ (temperatura de referencia). Definiendo el coeficiente de expansión volumétrica β :

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \rho \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (3.45)$$

La densidad puede ser expresada como:

$$\rho(T) = \bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{\beta}(T - \bar{T}) + \dots \quad (3.46)$$

Substituyendo la ecuación 3.46 en la 3.43 obtenemos:

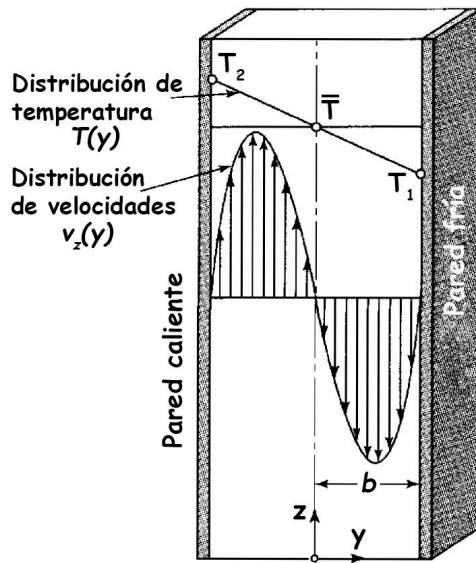
$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \bar{\rho} \underline{g} + \mu \nabla^2 \underline{v} - \bar{\rho} \underline{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (3.47)$$

La cual es la ecuación debida a Boussinesq. En convección natural (movimiento del fluido debido a gradientes de temperatura) el gradiente de presión es debido al peso del líquido. Esto es: $\nabla p = \bar{\rho} \underline{g}$ que implica que:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \mu \nabla^2 \underline{v} - \bar{\rho} \underline{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (3.48)$$

Celda de convección natural.

En esta celda el fluido en contacto con la pared que tiene una temperatura T_2 asciende por



flotación y el fluido en contacto con la superficie fría a T_1 desciende, como se observa en la figura 3.5. Por medio de las ecuaciones de conservación, se busca calcular los perfiles de velocidad y temperatura.

Figura 3.5. Celda de convección natural o libre. El líquido se encuentra en movimiento debido a un gradiente de temperatura en la celda.

Las ecuaciones de conservación a régimen estacionario son las siguientes:

Masa: $\nabla \cdot (\bar{\rho} \underline{v}) = 0 \quad (3.49)$

Momentum: $\bar{\rho} (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = \mu \nabla^2 \underline{v} - \bar{\rho} \underline{g} \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (3.50)$

Energía: $\bar{\rho} \hat{C}_p (\underline{v} \cdot \nabla T) = k \nabla^2 T \quad (3.51)$

Los vectores de velocidad y gradiente de temperatura son:

$\underline{v} = (0, 0, v_z(y))$ y $\nabla T = \left(0, \frac{\partial T}{\partial y}, 0\right)$ entonces, las ecuaciones **3.49-3.51** se reducen a:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} v_z) = 0 \quad (3.52)$$

$$0 = \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} - \bar{\rho} g \bar{\beta} (T - \bar{T}) \quad (3.53)$$

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.54)$$

Integrando **3.54**: $T = C_1 y + C_2$. Junto con las condiciones de frontera:

$$T|_{y=-b} = T_2, \quad T|_{y=+b} = T_1 \quad \text{obtenemos:} \quad T = \bar{T} - \frac{1}{2} \Delta T \frac{y}{b} \quad (3.55)$$

donde $\bar{T} = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$ y $\Delta T = T_2 - T_1$. Substituyendo la ecuación **3.55** en la **3.46** obtenemos el perfil de densidades:

$$\rho(y) = \bar{\rho} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{\beta} \Delta T \left(\frac{y}{b}\right) \quad (3.56)$$

lo que comprueba que la ecuación **3.52** se reduce a $\rho \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0$ y justifica la ecuación **3.53**
 $(\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) = v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$. Substituyendo **3.55** en **3.53** obtenemos:

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \bar{\rho} g \bar{\beta} \Delta T \left(\frac{y}{b}\right) \quad \text{Integrando:} \quad \frac{dv_z}{dy} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{\rho}}{\mu} g \bar{\beta} \Delta T \frac{y^2}{2b} + C_3 \quad (3.57)$$

$$\text{Con condiciones de frontera:} \quad v_z|_{y=-b} = v_z|_{y=+b} = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{Y con solución:} \quad v_z = \frac{1}{12} \frac{\bar{\rho}}{\mu} g \bar{\beta} \Delta T b^2 \left[\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right] \quad (3.59)$$

$$\text{Que también se puede expresar como:} \quad \frac{\rho v_z b}{\mu} = \frac{1}{12} \frac{\bar{\rho}^2}{\mu^2} g \bar{\beta} \Delta T b^3 \left[\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right] \quad (3.60)$$

donde el número de Grashof está definido como: $Gr = \frac{\bar{\rho}^2}{\mu^2} g \bar{\beta} \Delta T b^3$

3.2. Sistemas Cerrados con Fuente de Calor Interna.

Esta parte consta de 4 casos:

1. Conducción en líquidos con disipación viscosa.
2. Convección-conducción con reacción química.
3. Conducción en sólidos con fuente de calor eléctrica.
4. Conducción en sólidos con fuente de calor nuclear.

De acuerdo con la ecuación 1.37, la ecuación del balance de energía podemos expresarla como:

$$\rho \hat{C}_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + Q_f \quad (3.61)$$

Donde Q_f es el calor generado dentro del sistema. Cuando es por disipación viscosa, entonces $Q_f = \underline{\tau} : \underline{D}$.

3.2.1. Conducción en líquidos con disipación viscosa.

Considérese un flujo de corte simple entre dos placas paralelas separadas una distancia h , las cuales se encuentran a diferentes temperaturas: $T_0|_{y=0}$ y $T_1|_{y=h}$, como se muestra en la figura 3.6.

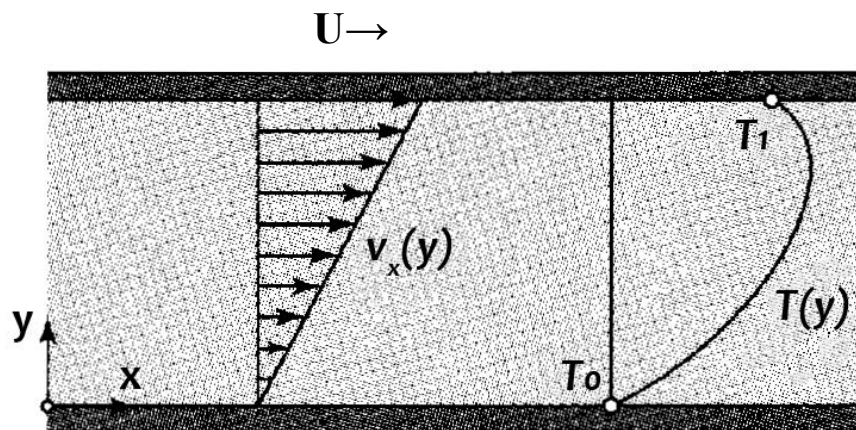


Figura 3.6. Flujo de corte simple entre dos placas paralelas, la superior moviéndose a una velocidad constante U . Las placas se encuentran a diferente temperatura.

En este caso, para un fluido Newtoniano, $Q_f = \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}}$.

$$\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} = \tau_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Por lo tanto, $\underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{D}} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$. El gradiente de temperatura y el vector velocidad son:

$$\nabla T = \left(0, \frac{\partial T}{\partial y}, 0 \right), \quad \underline{v} = \left(\frac{U}{h} y, 0, 0 \right)$$

En coordenadas cartesianas, la ecuación **3.61** se reduce a:

$$\rho \hat{C}_p v_x \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (3.62)$$

Como se supone que $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, y conociendo que $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{U}{h}$, la ecuación **3.62** se reduce a:

$$0 = k \frac{d^2 T}{dy^2} + \mu \left(\frac{U}{h} \right)^2 \quad (3.63)$$

Con condiciones de frontera:

$$T|_{y=0} = T_0 \quad y \quad T|_{y=h} = T_1 \quad (3.64)$$

$$\text{Integrando:} \quad T = -\frac{\mu}{k} \left(\frac{U}{h} \right)^2 \frac{y^2}{2} - \frac{C_1 y}{k} + C_2$$

Con las condiciones **3.64**, el perfil de temperaturas resultante es:

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{h} + \frac{1}{2} \frac{\mu U^2}{k(T_1 - T_0)} \left(\frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (3.65)$$

$$\text{Donde } Br = \frac{\mu U^2}{k(T_1 - T_0)} \text{ es el número de Brinkman.} \quad (3.66)$$

La ecuación **3.65** tiene un máximo en $\frac{dT}{dy} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} Br \left(\frac{1}{h} - \frac{2y}{h^2} \right) = 0$, que da:

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{Br} \right) \quad (3.67)$$

Para $Br > 2$, existe un máximo entre las placas. Si $Br \rightarrow \infty$, entonces $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ y el máximo se encuentra a la mitad de la distancia entre placas. Si $T_1 = T_0$, entonces el perfil sería:

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{2} Br \left(\frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (3.68)$$

donde $Br = \frac{\mu U^2}{k(T_0)}$, y el máximo estaría en $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ para todo Br .

3. 2.2. Convección-conducción con reacción química.

Considerar un reactor químico como se muestra en la figura 3.7., en donde el fluido pasa

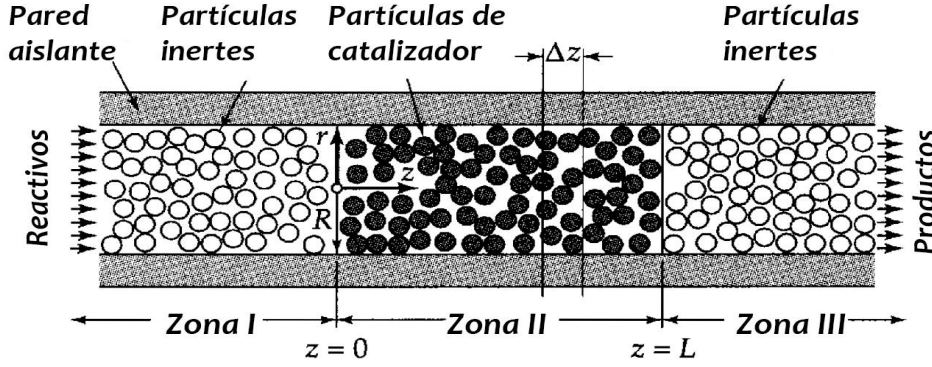


Figura 3.7. Flujo de fluidos a través de un medio poroso. En las zonas I y III, las partículas son inertes. En la zona II se efectúa una reacción química.

a través de 3 zonas de medio poroso. Las zonas I y III están llenas de partículas inertes y la zona II contiene partículas activas con catalizador. Los reactantes a la entrada de la zona I tienen una temperatura T_1 y velocidad superficial v_0 . Suponer transferencia de calor solamente en la dirección axial (z) y flujo de velocidad constante tipo tapón.

Para aumentos moderados de temperatura, en el caso exotérmico, la fuente de calor tiene una expresión linealizada de la expresión general de Arrhenius. Esta es:

$$Sc = Sc_1 \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (3.69)$$

en donde Sc_1 y T_0 son constantes empíricas. En este caso, la ecuación 3.61 se reduce a:

$$\rho \hat{C}_p v_0 \frac{dT}{dz} = k \frac{d^2 T}{dz^2} + Sc_1 \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} \quad (3.70)$$

donde k es la conductividad efectiva y $v_0 = \frac{w}{\pi R^2 \rho}$. Se definen las siguientes variables

$$\text{adimensionales: } \theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}, \quad Z = \frac{z}{L} \quad (3.71)$$

La ecuación 3.70 se transforma en:

$$\frac{dT}{L dz} = \frac{k}{\rho \hat{C}_p v_0 L^2} \frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{Sc_1}{\rho \hat{C}_p v_0} \theta \rightarrow (T_1 - T_0) \frac{d\theta}{dZ} = \frac{1}{Pe} (T_1 - T_0) \frac{d^2 \theta}{dZ^2} + \frac{Sc_1 L}{\rho \hat{C}_p v_0} \theta$$

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{1}{Pe} \frac{d^2 \theta}{dZ^2} + N \theta \quad \text{donde} \quad N = \frac{Sc_1 L}{\rho \hat{C}_p v_0 (T_1 - T_0)} \quad (3.72)$$

La ecuación 3.72 es una ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Se puede escribir como:

$(D^2 - P_e D + P_e N)\theta = 0$ con solución que involucra las raíces del polinomio cuadrático:

$$m = \frac{P_e}{2} \mp \frac{1}{2} [P_e^2 - 4P_e N]^{1/2} = \frac{P_e}{2} \left[1 \mp \left(1 - \frac{4N}{P_e} \right)^{1/2} \right] \quad \text{En las zonas I y III, } N = 0.$$

$$\text{Zona I:} \quad \theta_I = C_1 e^{m_1 Z} + C_2 e^{m_2 Z} \quad \rightarrow \quad m_1 = 0, \quad m_2 = P_e$$

$$\text{Zona II:} \quad \theta_{II} = C_3 e^{m_3 Z} + C_4 e^{m_4 Z}$$

$$\text{Zona III:} \quad \theta_{III} = C_5 e^{m_5 Z} + C_6 e^{m_6 Z} \quad \rightarrow \quad m_5 = 0, \quad m_6 = P_e \quad (3.73)$$

Con condiciones de frontera:

$$\text{Entrada:} \quad T = T_I \quad \rightarrow \quad \theta_1|_{Z \rightarrow -\infty} = 1$$

$$\text{Salida:} \quad \frac{dT_{III}}{dZ} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta'_{III}|_{Z \rightarrow \infty} = 0$$

$$\text{Interfase (I, II), } Z = 0 \quad T_I = T_{II} \quad \rightarrow \quad \theta_I = \theta_{II}$$

$$\text{Interfase (I, II), } Z = 0 \quad \frac{dT_I}{dZ} = \frac{dT_{II}}{dZ} \quad \rightarrow \quad \theta'_I = \theta'_{II}$$

$$\text{Interfase (II, III), } Z = 1 \quad T_{II} = T_{III} \quad \rightarrow \quad \theta_{II} = \theta_{III}$$

$$\text{Interfase (II, III), } Z = 1 \quad \frac{dT_{II}}{dZ} = \frac{dT_{III}}{dZ} \quad \rightarrow \quad \theta'_{II} = \theta'_{III} \quad (3.74)$$

Solución para $P_e \gg N$, o sea $N/P_e \approx 0$. En este caso: $m_3 \doteq N$, $m_4 \doteq P_e$. Esta aproximación se obtiene al hacer uso del teorema del binomio: $(1-x)^{1/2} \rightarrow 1-(1/2)x$. Aplicando las condiciones a la entrada y salida, obtenemos que $C_1 = 1$ y $C_6 = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} \theta_I &= 1 + C_2 e^{P_e Z} \\ \theta_{II} &= C_3 e^{NZ} + C_4 e^{P_e Z} \\ \theta_{III} &= C_5 \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \text{En } Z = 0: \quad & 1 + C_2 = C_3 + C_4, & P_e C_2 &= C_3 N + C_4 P_e \\ \text{En } Z = 1: \quad & C_5 = C_3 e^N + C_4 e^{P_e}, & C_3 N e^N + C_4 P_e e^{P_e} &= 0 \end{aligned}$$

Si Pe es grande, entonces $0 = C_2 = C_4$, lo que implica que $C_3 = 1$. La solución para las 3 zonas en este grado de aproximación es:

$$\begin{aligned}\theta_I &= 1 \\ \theta_{II} &= e^{NZ} \\ \theta_{III} &= e^N\end{aligned}\quad (3.76)$$

En la figura 3.8 se muestra la solución para varios valores de N . Los valores positivos corresponden a reacciones exotérmicas y los negativos a reacciones endotérmicas.

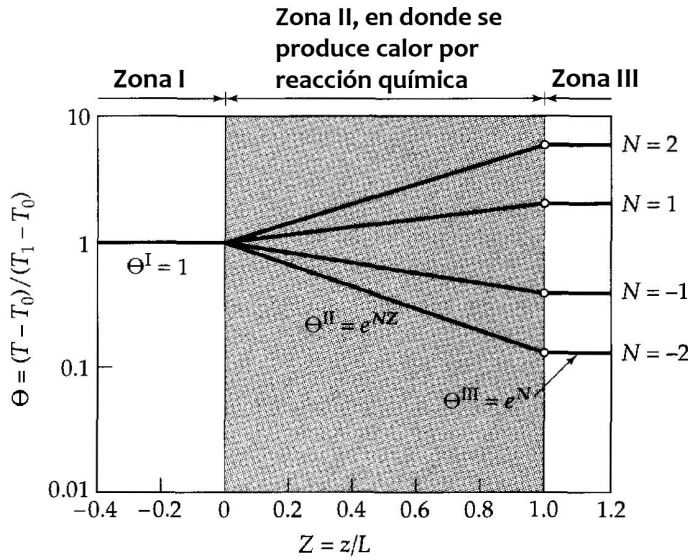


Figura 3.8. Temperatura en función de la distancia. Solución de las ecuaciones 3.76 para diferentes valores del número adimensional N (calor de reacción/convección).

3. 2.3. Conducción en sólidos con fuente de calor eléctrica.

A régimen permanente, la ecuación 3.61 aplicada a sólidos se reduce a:

$$0 = k\nabla^2 T + Q_f \quad (3.77)$$

Considerar un cable conductor de corriente eléctrica que se calienta debido a la energía térmica disipada por la resistencia al paso de la corriente. Esta resistencia es inversamente proporcional a la conductividad eléctrica, representada por la ley de Ohm:

$$i = k_e E / L$$

donde i es la densidad de corriente (amp/cm^2), k_e es la conductividad eléctrica ($\text{ohm}^{-1}\text{cm}^{-1}$), E es la caída de voltaje a lo largo del cable de longitud L . El calor disipado/unidad de tiempo es

$$Q_f = i^2 / k_e.$$

La temperatura en la superficie del cable es T_0 . La relación entre la conductividad eléctrica y la conductividad térmica está dada por la ley de Lorenz (ecuación 1.57):

$$L_K = \frac{k}{T_0 k_e} = 25 \times 10^{-9} \text{ volt}^2 / \text{K}^2 \quad (0^\circ \text{C})$$

Luego entonces: $Q_f = \frac{i^2}{k_e} = L_K \frac{i^2 T_0}{k}$ (3.78)

(k está dada en unidades de watt/cm ^{0} K). En coordenadas cilíndricas,

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_f}{k} \quad \text{Integrando dos veces: } T = -\frac{Q_f}{k} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

con condiciones en la frontera siguientes: $T|_{r=R} = T_0$ y $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0$ (3.79)

Resultado de evaluar las constantes: $T - T_0 = \frac{Q_f}{4} \frac{R^2}{k} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$ (3.80)

El voltaje correspondiente a la máxima elevación de temperatura es:

$$T_{max} - T_0 = \frac{Q_f}{4} \frac{R^2}{k} = \frac{R^2}{4k} k_e \frac{E^2}{L^2} = \frac{R^2}{4L_K T_0} \frac{E^2}{L^2} \rightarrow (T_{max} - T_0) L_K T_0 \frac{4L^2}{R^2} = E^2 \quad (3.81)$$

El flux de calor en la superficie del cable es: $q_r|_{r=R} = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \frac{Q_f R}{2}$

Por lo que el flujo de calor en la superficie es:

$$Q = \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} q_r R d\theta dz = 2\pi R L \frac{Q_f R}{2} = \pi R^2 L Q_f \quad (3.82)$$

3.2.4. Conducción en sólidos con fuente de calor nuclear.

Un reactor nuclear produce calor debido a la fisión nuclear que ocurre en el centro del reactor de simetría esférica. La reacción se lleva a cabo dentro de una esfera de radio R_F , que se encuentra rodeada por otra esfera concéntrica con material inerte de radio R_C , como se describe en la figura 3.9.

La fuente de calor por la reacción nuclear es función del radio:

$$Q_f = Q_0 \left[1 + b \frac{r^2}{R_F^2} \right]$$

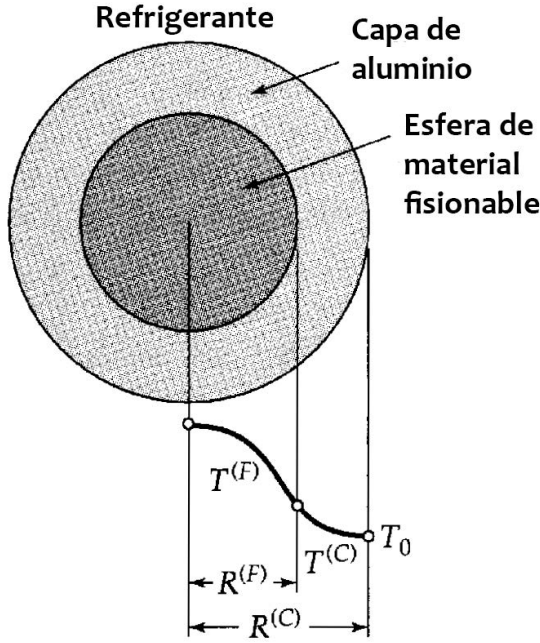


Figura 3.9. Reactor nuclear que consta de dos regiones esféricas: la interior donde ocurre la reacción, y la exterior que contiene un material inerte. En la parte inferior se observa el perfil de temperaturas que tiene un máximo en el centro, y un mínimo en su extremo exterior.

En la región interior, la ecuación 3.61 toma la forma: $\nabla \cdot \underline{q}_F = Q_0 \left[1 + b \frac{r^2}{R_F^2} \right]$ (3.83)

Y en la región exterior: $\nabla \cdot \underline{q}_C = 0$ (3.84)

En coordenadas esféricas: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_F) = Q_0 \left[1 + b \frac{r^2}{R_F^2} \right]$ (3.85)

$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_C) = 0$ (en donde se ha abreviado $q_F \equiv q_{Fr}$, $q_C \equiv q_{Cr}$) (3.86)

Con condiciones de frontera: $q_F|_{r=0} = 0$ y $q_F|_{r=R_F} = q_C|_{r=R_F}$

Integración de 3.85 y 3.86 nos da:

$$r^2 q_F = Q_0 \left[\frac{r^3}{3} + b \frac{r^5}{5 R_F^2} \right] + C_1 \quad \text{y} \quad r^2 q_C = C_2$$

Por la primera condición de frontera, $C_1 = 0$. Por la segunda: $C_2 = Q_0 \left[\frac{R_F^3}{3} + b \frac{R_F^3}{5} \right]$

$$\text{Luego: } q_F = Q_0 \left[\frac{r}{3} + b \frac{r^3}{5 R_F^2} \right] \quad \text{y} \quad q_C = \frac{1}{r^2} Q_0 R_F^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right] \quad (3.87)$$

Usamos la ley de Fourier para calcular los perfiles de temperatura:

$$q_F = -k_F \frac{dT_F}{dr} \quad \text{y} \quad q_C = -k_C \frac{dT_C}{dr} \quad (3.88)$$

Substituyendo la ecuación **3.88** en la **3.87** e integrando obtenemos:

$$T_F = -\frac{Q_0}{k_F} \left[\frac{r^2}{6} + \frac{b}{R_F^2} \frac{r^4}{20} \right] + C_3$$

$$T_C = \frac{Q_0}{k_C} \left[\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right] \frac{R_F^3}{r} + C_4$$

Con condiciones de frontera: $T_F|_{r=R_F} = T_C|_{r=R_F}$ y $T_C|_{r=R_C} = T_0$ **(3.89)**

Aplicando la segunda: $T_0 = \frac{Q_0}{k_C} \left[\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right] \frac{R_F^3}{R_C} + C_4$

Aplicando la primera: $-\frac{Q_0}{k_F} \left[\frac{R_F^2}{6} + b \frac{R_F^2}{20} \right] + C_3 = \frac{Q_0}{k_C} \left[\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right] R_F^2 + C_4$

Resolviendo para las constantes, obtenemos:

$$T_F - T_0 = \frac{Q_0 R_F^2}{6 k_F} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R_F^2} \right) + \frac{3b}{10} \left(1 - \frac{r^4}{R_F^4} \right) \right] + \frac{Q_0 R_F^3}{3 k_C} \left[\left(1 + \frac{3b}{5} \right) \left(\frac{1}{R_F} - \frac{1}{R_C} \right) \right] \quad \textbf{(3.90a)}$$

$$T_C - T_0 = \frac{Q_0 R_F^3}{3 k_C} \left[\left(1 + \frac{3b}{5} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_C} \right) \right] \quad \textbf{(3.90b)}$$

La temperatura máxima es: $T_F|_{r=0} = T_{\max}$

$$T_{\max} - T_0 = \frac{Q_0 R_F^2}{6 k_F} \left[1 + \frac{3b}{10} \right] + \frac{Q_0 R_F^3}{3 k_C} \left[\left(1 + \frac{3b}{5} \right) \left(\frac{1}{R_F} - \frac{1}{R_C} \right) \right] = \frac{Q_0 R_F^2}{6 k_F} \left[1 + \frac{3b}{10} \right] + T_F|_{r=R_F}$$

Podemos también calcular el flux de calor que se va al ambiente usando la ecuación **3.87**:

$$q_C|_{r=R_C} = \frac{1}{R_C^2} Q_0 R_F^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right]$$

que es diferente de cero, lo que implica que existe un gradiente de temperatura

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_C} \neq 0 \quad \text{en la superficie exterior de la esfera.}$$

3. 3. Transferencia de calor interfacial en sistemas abiertos.

En sistemas abiertos, la ecuación 1. 37 incluye un término de transporte interfacial, que en forma diferencial y a régimen permanente se puede expresar de la siguiente forma:

$$\rho \hat{C}_p \underline{v} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \underline{q} \pm dQ_i \quad (3.91)$$

donde $dQ_i = h(T - T_a)dA$ es la ley de Newton de enfriamiento. h es el coeficiente de transferencia de calor interfacial, A es el área interfacial y T_a es la temperatura exterior. Cuando la transferencia interfacial no ocurre simultáneamente a la conducción, entonces se considera a la transferencia interfacial como condición de frontera del sistema cerrado. Esto es, se calcula el flux de calor en la interfase $\underline{q}_i$ con la ecuación

$$\rho \hat{C}_p \underline{v} \cdot \nabla T = -\nabla \cdot \underline{q} \quad \text{y luego se emplea la ley de Newton: } dq_i = h(T_i - T_a).$$

3. 3.1. Conducción de calor desde una esfera hacia un fluido en reposo.

Se considera una esfera de radio R cuya temperatura en su superficie es T_R sumergida en un fluido en reposo a una temperatura T_∞ , como se observa en la figura 3.10. Se supone que $T_R > T_\infty$. Se propone calcular el número de Nusselt del proceso.

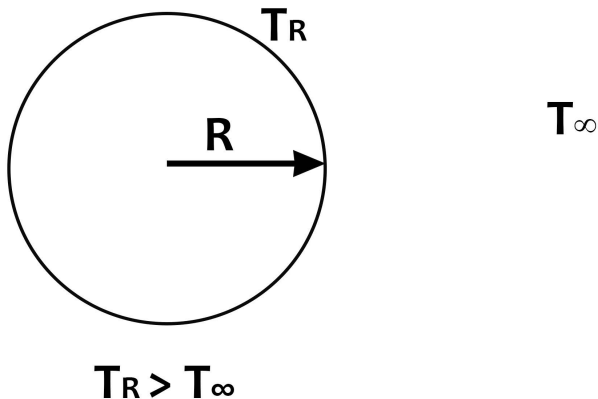


Figura 3.10. Transferencia de calor interfacial de una esfera sumergida en un fluido en reposo con superficie a una temperatura distinta a la del fluido.

$$\text{Conducción en la esfera: } k \nabla^2 T = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\text{Con condiciones de frontera: } T|_{r=R} = T_R \quad \text{y} \quad T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty$$

Resolviendo: $r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \rightarrow T = -\frac{C_1}{r} + C_2$ Aplicando las condiciones:

$$\frac{T - T_\infty}{T_R - T_\infty} = \frac{R}{r} \quad (3.92)$$

Nótese que esta ecuación es igual a la ecuación 3.38 cuando $Pe \rightarrow 0$. El flux de calor en la superficie de la esfera es:

$$q_r|_{r=R} = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = k \frac{(T_R - T_\infty)}{R} \quad (3.93)$$

Y el transporte interfacial es descrito por:

$$q_r|_{r=R} = q_i = h(T_R - T_\infty) \quad (3.94)$$

Igualando 3.93 y 3.94 obtenemos: $h = k/R$, por lo que, a partir de la definición del número de Nusselt:

$$Nu = \frac{q_i}{q_r} \Big|_{r=R} = \frac{hD}{k} = 2 \quad (3.95)$$

3.3.2. Transporte interfacial en una placa plana.

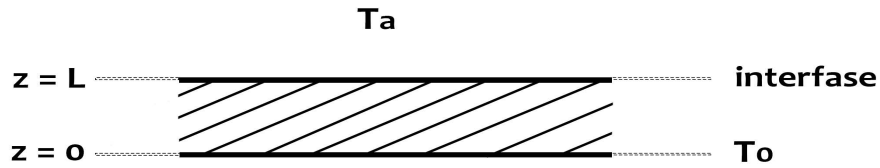


Figura 3.11. Transporte interfacial de calor en una placa plana de grosor L expuesta a un medio con temperatura T_a .

Considerar un proceso no simultáneo de conducción y transferencia interfacial.
Conducción en la placa:

$$k \nabla^2 T = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dz^2} = 0 \quad \text{con condiciones de frontera:}$$

$$T|_{z=0} = T_0 \quad \text{y} \quad \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} = -\frac{q_0}{k}$$

La solución es $T - T_0 = -\frac{q_0}{k} z$. Con esta ecuación es posible conocer la temperatura en

$$T_L - T_0 = -\frac{q_0}{k} L \quad (3.96)$$

$$q_z|_{z=L} = q_i = -k \frac{dT}{dz} = q_0 \quad (3.97)$$

el flux de calor es constante. Por lo tanto: $q_0 = h(T_L - T_a)$ (3.98)

Sumando 3.96 y 3.98 obtenemos:

$$T_0 - T_a = (T_0 - T_L) + (T_L - T_a) = \frac{q_0}{k} L + \frac{q_0}{h} = q_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{L}{k} \right)$$

$$q_0 = U(T_0 - T_a) \quad \text{donde} \quad U = \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{L}{k}} \quad (3.99)$$

es el coeficiente global de transferencia interfacial, y representa el inverso de las sumas de las resistencias (a la conducción del sólido y a la transferencia interfacial). Cuando la resistencia en la interfase domina, entonces, $\frac{1}{h} \gg \frac{L}{k}$, y por lo tanto, $q_0 = h(T_0 - T_a)$.

Si domina la resistencia en el sólido, entonces: $q_0 = \frac{k}{L}(T_0 - T_a)$.

La ecuación 3.99 se puede generalizar para el caso de varias interfases y medios sólidos. Esto es, en el caso de dos interfases y n capas sólidas se obtiene:

$$U^{-1} = \frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i} \quad (3.100)$$

Un ejemplo de ello es el caso de la pared de un horno de varias capas, que se encuentra entre el horno de combustión y la atmósfera, como se muestra en la figura 3.12.

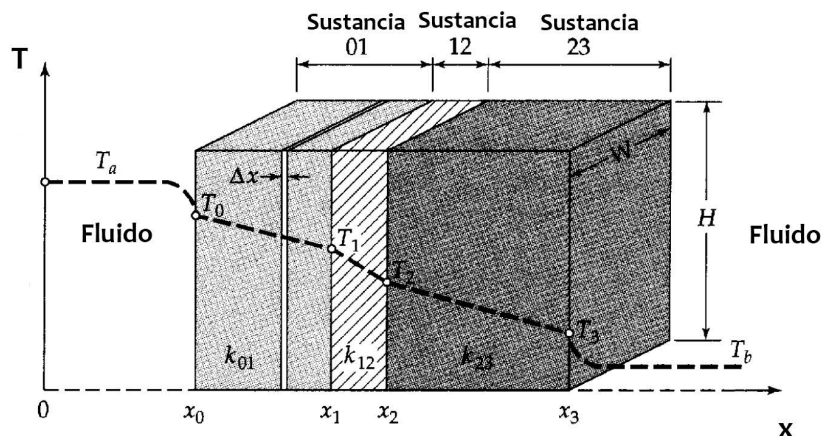


Figura 3.12. Pared de un horno con varias capas sólidas.

3.3.3. Transporte interfacial en un cilindro.

La temperatura en el sólido cilíndrico con radio R_0 es T_0 , y la transferencia interfacial ocurre en la capa exterior con radio R_1 . La temperatura exterior es T_a y la conducción y transferencia interfacial no ocurren simultáneamente. La conducción correspondiente a la ecuación $\nabla^2 T = 0$ es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{lo que implica que} \quad r \frac{dT}{dr} = C_1 \quad \text{e integrando:} \quad T = C_1 \ln r + C_2$$

Las condiciones de frontera: $T|_{r=R_0} = T_0$ y $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = -\frac{q_1}{k}$ generan dos ecuaciones algebraicas:

$$T_0 = C_1 \ln R_0 + C_2 \quad \text{y} \quad -\frac{q_1}{k} = \frac{C_1}{R_1}. \quad \text{El perfil resultante es:}$$

$$T - T_0 = -\frac{q_1 R_1}{k} \ln \frac{r}{R_0}$$

Lo que permite calcular la temperatura de la capa correspondiente a R_1 , que es T_1 :

$$T_0 - T_1 = \frac{q_1 R_1}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} \quad \text{El flux de calor es variable:} \quad (3.101)$$

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} = \frac{q_1 R_1}{r} \quad \text{luego} \quad q_r|_{r=R_0} = q_0 = \frac{q_1 R_1}{R_0} \quad (3.102)$$

$$q_r|_{r=R_1} = q_1 = q_i = h_1 (T_1 - T_a) \quad (3.103)$$

Sumando las ecuaciones 3.101 y 3.103 obtenemos:

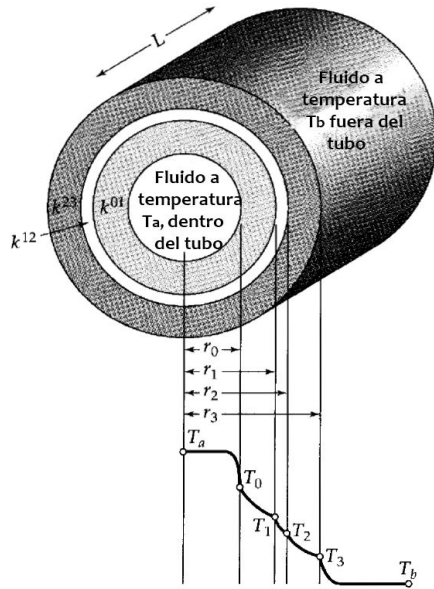
$$T_0 - T_a = \frac{q_1 R_1}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{q_1}{h_1} = \frac{q_0 R_0}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{q_0 R_0}{R_1 h_1}$$

$$q_0 R_0 = \frac{T_0 - T_a}{\frac{1}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{R_1 h_1}} \quad \longrightarrow$$

$$Q = 2\pi L q_0 R_0 = 2\pi L \frac{T_0 - T_a}{\frac{1}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{R_1 h_1}} = U A (T_0 - T_a) \quad (3.104)$$

$$\text{Donde } A = 2\pi L R_0 \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{R_0 \left(\frac{1}{k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{1}{R_1 h_1} \right)} \quad (3.105)$$

En el caso de varias capas sólidas y dos interfases, como en la figura 3.13, el coeficiente Global U se generaliza a la expresión siguiente:



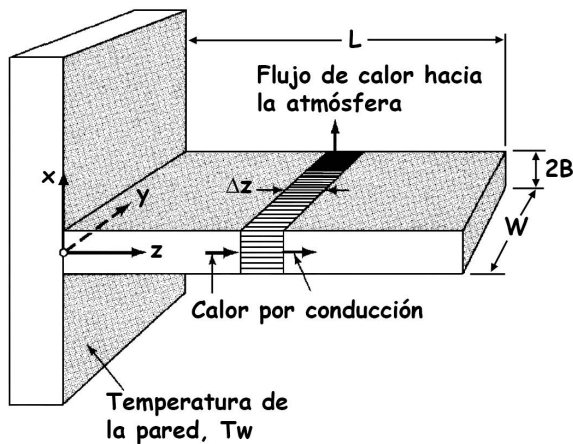
$$U = \frac{1}{R_0 \left(\frac{1}{R_0 h_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}} + \frac{1}{R_n h_n} \right)}$$

Por ejemplo, en la figura 3.13, se tienen dos interfases, h_0 y h_3 y 3 capas sólidas de diferente conductividad.

Figura 3.13. Tubo con 3 capas cilíndricas sólidas y dos interfases, con temperaturas interior y exterior de T_a y T_b .

3. 3.4. Conducción y transferencia interfacial simultáneas. Aleta de enfriamiento.

La aleta de enfriamiento se ejemplifica en la figura 3.14. Las consideraciones geométricas



son $2B \ll W$. El calor se transfiere por conducción a lo largo del eje z y simultáneamente se transfiere a la atmósfera en la dirección $\pm x$, cuya temperatura es T_a . La resolución del problema involucra a la ecuación 3.91 en forma diferencial, en la cual se hace distinción entre la superficie de conducción y la superficie de transferencia interfacial.

Figura 3.14. Aleta de enfriamiento.

$$0 = -\nabla \cdot \underline{q} + dQ_i \quad (3.106)$$

$$0 = - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV + \iint \underline{q}_i \cdot \underline{n} dA = \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS + \iint \underline{q}_i \cdot \underline{n} dA \quad (3.107)$$

$$0 = \int_0^W \int_{-B}^B q_z dx dy + \int_0^Z \int_0^W q_{x_i} dy dz \quad \rightarrow$$

$$q_Z(2WB) + h(T - T_a)(2WZ) = 0 \quad (3.108)$$

$$-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B} (T - T_a) \quad \text{y por la ley de Fourier:}$$

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = \frac{h}{kB} (T - T_a) \quad (3.109)$$

Con condiciones de frontera: $T|_{z=0} = T_W$ y $\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} = 0$ (3.110)

Con las siguientes cantidades adimensionales: $\theta = \frac{T - T_a}{T_W - T_a}$, $\zeta = \frac{z}{L}$

la ecuación **3.109** se reduce a:

$$\frac{T_W - T_a}{L^2} \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = \frac{h}{kB} \theta (T_W - T_a) \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \theta}{d\zeta^2} = \frac{hL^2}{kB} \theta \quad (3.111)$$

Con condiciones de frontera: $\theta|_{\zeta=0} = 1$ y $\left. \frac{d\theta}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = 0$

Definiendo el número de Biot: $N^2 = \frac{hL^2}{kB}$ la ecuación **3.111** tiene la siguiente solución:

$$\theta = C_1 \sinh(N\zeta) + C_2 \cosh(N\zeta) \quad \text{Aplicando las condiciones de frontera:}$$

$$1 = C_2 \cosh(0) \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = NC_1 \cosh(N) + NC_2 \sinh(N) = 0$$

De donde encontramos que: $C_2 = 1$, $C_1 = -\tanh(N)$ y substituyendo en la ecuación de θ :

$$\theta = \cosh(N\zeta) - \tanh(N) \sinh(N\zeta) \quad \text{que es igual a:}$$

$$\theta = \frac{1}{\cosh(N)} [\cosh(N\zeta) \cosh(N) - \sinh(N) \sinh(N\zeta)] = \frac{\cosh N(1-\zeta)}{\cosh(N)} \quad (3.112)$$

Esta solución se grafica en la figura **3.15**. Se puede calcular el valor de θ cuando $\zeta = 1$:

$$\theta|_{\zeta=1} = \frac{1}{\cosh(N)}$$

por lo que el valor de la temperatura en la región del extremo de la aleta depende de N .

$$\text{Si } N \rightarrow \infty, \quad \theta|_{\zeta=1} \rightarrow 0$$

$$\text{Si } N \rightarrow 0 \quad \theta|_{\zeta=1} \rightarrow 1$$

La eficiencia de la aleta depende de su capacidad para transferir el calor a la atmósfera, por lo que se procura tener valores elevados del número de Biot. Esto se logra con k y B pequeñas, L y h grandes. Como se observa en la gráfica, en la aleta más eficiente se alcanza teóricamente la temperatura ambiente en su extremo.

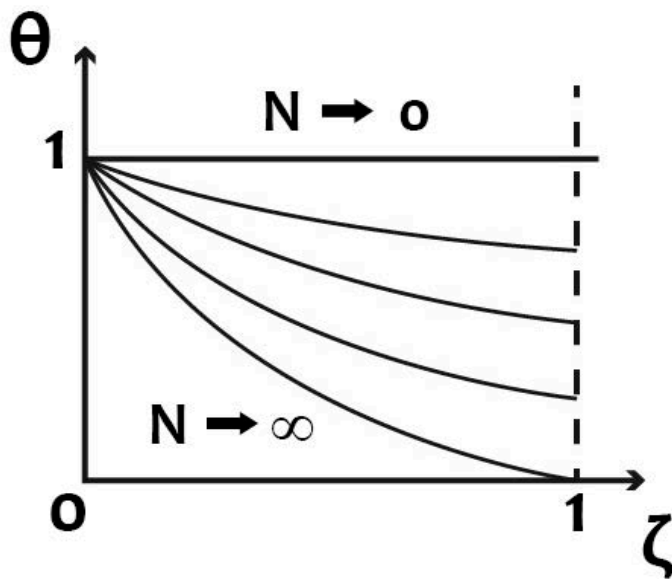


Figura 3.15. Aleta de enfriamiento. Variación de temperatura en función de la distancia axial. Los límites del número de Biot se indican.

Apéndice A.

Conducción en sólidos con fuente de calor y transporte interfacial.

En este apéndice se generalizará el caso de conducción en sólidos con fuente de calor eléctrica para incluir transferencia de calor interfacial. La temperatura en la superficie del cable es T_0 y la temperatura ambiente es T_a . De acuerdo a la ecuación 3.77:

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_f}{k}$$

Integrando:
$$T = -\frac{Q_f}{k} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \quad (\text{A-1})$$

Las nuevas condiciones de frontera son:

$$q_r|_{r=R} = h(T_0 - T_a) \quad \text{y} \quad \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{de donde } C_1 = 0 \quad (\text{A-2})$$

Aplicando la primera:

$$q_r|_{r=R} = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = \frac{Q_f R}{2} \quad \text{substituyendo en la ecuación A-2:}$$

$$T_0 - T_a = \frac{Q_f R}{2h} \quad (\text{A-3})$$

La conducción en el sólido está establecida en la ecuación 3.80:

$$T - T_0 = \frac{Q_f}{4} \frac{R^2}{k} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad \text{la cual se suma a la ecuación A-3 para obtener:}$$

$$T - T_a = \frac{Q_f R}{2h} + \frac{Q_f}{4} \frac{R^2}{k} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{A-4})$$

Otro método:

$$\frac{Q_f R}{2} = h(T - T_a) = -\frac{Q_f}{k} \frac{R^2}{4} + C_2 - T_a$$

De las ecuaciones A-1 y A-3:

$$C_2 = \frac{Q_f R}{2} + \frac{Q_f}{k} \frac{R^2}{4} + T_a \quad \text{substituyendo en A-1:}$$

$$T = -\frac{Q_f}{k} \frac{r^2}{4} + \frac{Q_f R}{2} + \frac{Q_f}{k} \frac{R^2}{4} + T_a$$

$$T - T_a = \frac{Q_f}{4k} (R^2 - r^2) + \frac{Q_f R}{2h} \quad \text{que es igual a la ecuación A-4.}$$

Apéndice B.

Convección forzada en un tubo. Solución para la región de la entrada.

Solución de capa límite (Levéque).

Suposiciones:

- Efectos de curvatura despreciables, por lo que se aproxima a una placa plana. La distancia desde la pared es $y = R - r$.
- La capa de fluido se extiende desde la superficie $y = 0$ a $y \rightarrow \infty$.
- El perfil de velocidades es lineal, con pendiente similar a la del perfil parabólico en la pared. Esto es:

$$v_z(y) = \frac{v_0 y}{R}, \quad v_0 = \frac{\Delta P R^2}{2\mu L} \quad \text{En coordenadas cartesianas, el balance de energía es:}$$

$$\rho \hat{C}_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad (\text{B-1})$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{v_0 y}{R} \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial q_y}{\partial y} \quad \text{diferenciando con respecto a } y \text{ obtenemos:}$$

$$\rho \hat{C}_p \frac{v_0}{R} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \rightarrow \rho \hat{C}_p \frac{v_0}{R} \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{q_y}{k} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \rightarrow$$

$$\frac{v_0}{R} \frac{\partial}{\partial z} (q_y) = \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \quad \text{Definiendo} \quad \frac{q_y}{q_0} = \psi \quad y \quad \eta = \frac{y}{R} \quad \text{obtenemos:}$$

$$v_0 R^2 \frac{\partial}{\partial z} (\psi) = \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \rightarrow Pe R \frac{\partial}{\partial z} (\psi) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)$$

$$\text{Si } \lambda = \frac{z}{R Pe} \quad \text{entonces, se obtiene:} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} (\psi) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B-2})$$

Las condiciones de frontera serían

$$z = 0, \quad q_y = 0 \rightarrow \lambda = 0, \quad \psi = 0$$

$$y = 0, \quad q_y = q_0 \rightarrow \eta = 0, \quad \psi = 1$$

$$y \rightarrow \infty, \quad q_y = 0 \rightarrow \eta \rightarrow \infty, \quad \psi = 0 \quad (\text{B-3})$$

Definimos $\chi = \frac{\eta}{\sqrt[3]{9\lambda}}$. Las derivadas de ψ son las siguientes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \left[-\eta \frac{9}{3} (9\lambda)^{-4/3} \right] = \frac{-3\eta}{(9\lambda)^{4/3}} \frac{\partial \psi}{\partial \chi}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{1/3}} \right]; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{-1}{\eta^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{2/3}} \right]$$

La ecuación **B-2** se transforma en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{-3\eta}{(9\lambda)^{4/3}} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{-1}{\eta^2} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{2/3}} \right] - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{1/3}} \right] \\ \frac{-3\eta^3}{(9\lambda)^{4/3}} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} + \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{1/3}} \right] &= \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{2/3}} \right] \quad \longrightarrow \quad \frac{-3\eta^3}{9\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} + \frac{\partial \psi}{\partial \chi} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \left[\frac{1}{(9\lambda)^{1/3}} \right] \\ (1 - 3\chi^3) \frac{\partial \psi}{\partial \chi} &= \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} \end{aligned} \quad \textbf{(B-4)}$$

Con condiciones de frontera: $\psi|_{\chi=0} = 1$, $\psi|_{\chi \rightarrow \infty} = 0$

Solución.

Si $p = \frac{\partial \psi}{\partial \chi}$, la ecuación **B-4** se transforma en: $(1 - 3\chi^3) p = \chi \frac{\partial p}{\partial \chi}$, integrando:

$$\int (1 - 3\chi^3) \frac{d\chi}{\chi} = \int \frac{dp}{p} + C_1 \quad \rightarrow \quad \ln \chi - \chi^3 = \ln \left(\frac{p}{C_1} \right) \quad \rightarrow \quad -\chi^3 = \ln \left(\frac{p}{\chi C_1} \right)$$

$$p = C_1 \chi \exp(-\chi^3) = \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \quad \text{integrando:} \quad \psi = C_1 \int_0^\chi \bar{\chi} \exp(-\chi^3) d\chi + C_2 \quad \textbf{(B-5)}$$

Aplicando la primera condición de frontera resulta en $C_2 = 1$. Aplicando la segunda:

$$0 = C_1 \int_0^\infty \chi \exp(-\chi^3) d\chi + 1 \quad \text{A partir de la definición de la función gamma:}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt \quad \longrightarrow$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \int_0^\infty (\chi^3)^{-1/3} \chi^2 \exp(-\chi^3) d\chi = 3 \int_0^\infty \chi \exp(-\chi^3) d\chi \quad \longrightarrow \quad C_1 = -\frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

La solución se obtiene substituyendo las constantes en la ecuación **B-5**:

$$\psi = 1 - \frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^\chi \chi \exp(-\chi^3) d\chi = 1 - \frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left[\int_0^\infty \chi \exp(-\chi^3) d\chi - \int_\chi^\infty \chi \exp(-\chi^3) d\chi \right]$$

$$\psi = \frac{3}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_\chi^\infty \chi \exp(-\chi^3) d\chi \quad \text{que cumple con las condiciones de frontera.} \quad \textbf{(B-6)}$$

El perfil de temperaturas se obtiene integrando la ley de Fourier: $\int_T^{T_1} dT = -\frac{1}{k} \int_y^\infty q_y dy$

Que en variables adimensionales se obtiene:

$$\theta = \frac{T - T_1}{q_0 R/k} = (9\lambda)^{1/3} \int_{\chi}^{\infty} \psi d\bar{\chi} \quad (\text{B-7})$$

$$\theta = \frac{T - T_1}{q_0 R/k} = (9\lambda)^{1/3} \int_{\chi}^{\infty} \left[\frac{3}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_{\chi}^{\infty} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^3) d\bar{\chi} \right] d\bar{\chi} \quad (\text{B-8})$$

Cambiando el orden de integración:

$$\theta = \frac{T - T_1}{q_0 R/k} = (9\lambda)^{1/3} \int_{\chi}^{\infty} \left[\frac{3}{\Gamma(\frac{2}{3})} \int_{\chi}^{\bar{\chi}} \bar{\chi} \exp(-\bar{\chi}^3) d\bar{\chi} \right] d\bar{\chi} \quad (\text{B-9})$$

Integrando:

$$\theta = \frac{(9\lambda)^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \left[e^{-\chi^3} - 3\chi \left(\int_0^{\infty} \chi e^{-\chi^3} d\chi - \int_0^{\chi} \bar{\chi} e^{-\bar{\chi}^3} d\bar{\chi} \right) \right] \quad (\text{B-10})$$

Definiendo la función gamma incompleta:

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}, \chi^3\right) = \int_{\chi}^{\infty} t^{-1/3} \exp(-t) dt$$

La ecuación **B-10** se puede expresar como:

$$\theta = (9\lambda)^{1/3} \left[\frac{e^{-\chi^3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} - \chi \left(1 - \frac{\Gamma(\frac{2}{3}, \chi^3)}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right) \right] \quad (\text{B-11})$$

Para este perfil de temperatura, el número de Nusselt es:

$$Nu = \frac{2q_0}{k(T_w - T_1)/R} \quad \text{donde } T_w \text{ es la temperatura en la placa. Calculando } \theta_w :$$

$$\theta_w = \theta|_{\chi=0} = \frac{(9\lambda)^{1/3}}{\Gamma(\frac{2}{3})} = \frac{T_w - T_1}{q_0 R/k} \quad (\text{B-12})$$

De donde se obtiene:

$$Nu = \frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{(9\lambda)^{1/3}} \quad (\text{B-13})$$

Como $\lambda = \frac{1}{Pe} \frac{z}{R}$ entonces:

$$Nu = \frac{2\Gamma(\frac{2}{3})}{(9\lambda)^{1/3}} \left(\frac{PeR}{z} \right)^{1/3} \quad (\text{B-14})$$

Tarea 3

1. Flujo tapón con transferencia de calor por convección forzada. (Problema 10 B.9. Bird et al.)

Pastas y minerales concentrados con frecuencia se mueven dentro de canales con un perfil de velocidades de flujo tapón. En esta situación, se puede aproximar la velocidad a una constante v_0 de una sección transversal del canal.

(a) En tubos de sección circular, encontrar el perfil de temperaturas y demostrar que el número de Nusselt con flujo tapón es igual a 8.

Respuesta:

Definiendo:

$$\theta = \frac{T - T_0}{q_0 R/k} \quad \xi = \frac{r}{R} \quad \zeta = \frac{z}{R} \quad Pe = \frac{R v_0}{\alpha}$$

El perfil de temperaturas es:

$$\theta(\xi, \zeta) = \frac{2\zeta}{Pe} + \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{4}$$

(b) Demostrar que para flujo tapón en una ranura plana de anchura $2B$ la distribución de temperatura es:

$$\theta(\xi, \zeta) = \frac{\zeta}{Pe} + \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{6} \quad \text{donde} \quad \theta = \frac{T - T_1}{q_0 B/k} \quad \sigma = \frac{x}{B} \quad \zeta = \frac{z}{B} \quad Pe = \frac{B v_{m\acute{a}x}}{\alpha}$$

y que el número de Nusselt es 12.

Tarea 4

1. Enfriamiento por transpiración física en un sistema planar. (Problema 11B.6. Bird et al.)

Dos placas porosas horizontales separadas una distancia pequeña L tienen temperaturas T_L y T_0 . Para reducir la magnitud del flujo de calor que deberá ser removido de la placa inferior, un gas ideal a T_0 fluye verticalmente a régimen permanente a través de las dos placas. Desarrollar una expresión para la distribución de temperaturas y el flux de calor q_0 que deberán ser removidos de la placa fría por unidad de área, como función de las propiedades del fluido y el flujo de gas. Definir el número de Peclet modificado como $\phi = \frac{v_y L}{\alpha}$

Respuesta:

$$\frac{T - T_L}{T_0 - T_L} = \frac{e^{\phi y/L} - e^{\phi}}{1 - e^{\phi}} \quad q_0 = k \frac{T - T_L}{L} \left(\frac{\phi}{e^{\phi} - 1} \right)$$

2. Reducción de pérdidas de evaporación por transpiración física. (Problema 11.B.7. Bird et al.)

Para reducir la velocidad de evaporación del oxígeno líquido almacenado en pequeños recipientes se emplea transpiración física. Para ello, el líquido se almacena en recipientes esféricos rodeados por un material aislante poroso dejando un pequeño espacio cerrado entre el recipiente y el aislante, como se observa en la figura 3.16. El oxígeno evaporado deja el recipiente y fluye entre el recipiente y aislante, y después fluye a través del aislante poroso.

Calcular la ganancia del flujo de calor y la pérdida por evaporación en un recipiente de 1 ft de diámetro cubierto por una coraza aislante de 6 in de grosor bajo las siguientes condiciones con y sin transpiración.

Temperatura del oxígeno líquido: -297°F

Temperatura de la superficie exterior del aislante: 30°F

Conductividad térmica del aislante: 0.02 BTU/hr ft F

Calor de evaporación del oxígeno: 91.7 BTU/lb

C_p del oxígeno: 0.22 BTU/lb F

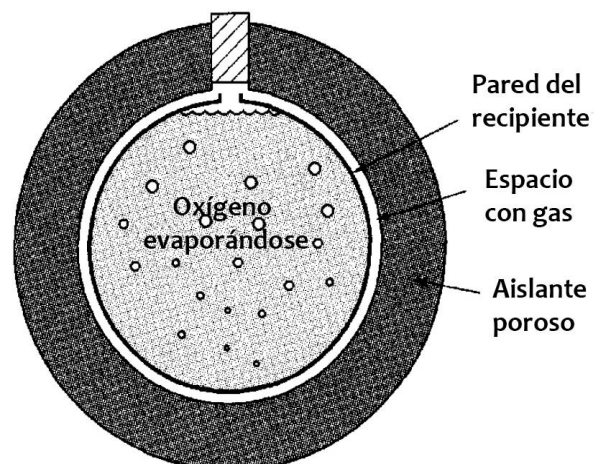
Suponer que el material del aislante se encuentra en equilibrio térmico con el gas y despreciar la resistencia térmica del líquido, pared del recipiente, el espacio cerrado y pérdidas de calor en el tapón.

Respuestas:

82 BTU/hr sin transpiración.

61 BTU/hr con transpiración.

Figura 3.16. Uso de la transpiración para reducir la tasa de evaporación.



Tarea 5

1. Temperatura máxima en un lubricante. (Problema 10. A-3. Bird et al.)

Un lubricante a base de aceite se encuentra entre dos superficies cilíndricas. La velocidad angular del cilindro exterior es 7908 rpm. El cilindro exterior tiene un radio de 5.06 cm, y la distancia entre cilindros es 0.027 cm. ¿Cuál es la temperatura máxima del aceite si ambas superficies están a 158⁰ F? Las propiedades físicas del aceite son:

Viscosidad: 92.3 cp.

Densidad: 1.22 g/cm³.

Conductividad térmica: 0.0055 cal/s cm C

Respuesta: 174⁰ F.

2. Velocidad de convección libre. (Problema 10. A-5. Bird et al.)

(a) Demostrar que la velocidad promedio de ascenso de un líquido por convección natural

correspondiente a la ecuación 3.59 es: $\langle v_z \rangle = \frac{1}{48} \frac{\bar{\rho}}{\mu} g \bar{\beta} \Delta T b^2$

Dadas las siguientes condiciones:

Presión: 1 atm

Temperatura de la pared caliente: 100⁰ C

Temperatura de la pared fría: 20⁰ C

Espacio entre las paredes: 0.6 cm.

(b) Evaluar $\bar{\beta}$.

(c) En la celda de la figura 3.5, la corriente es aire a las condiciones anteriores. ¿Cuál es el valor de la velocidad promedio?

Respuesta: 2.3 cm/s.

3. Calentamiento viscoso de un líquido en una ranura. (Problema 10. B-2. Bird et al.)

Encontrar el perfil de temperatura para el problema de calentamiento viscoso de la figura 3.6 con las siguientes condiciones de frontera: en $y = 0$, $T = T_0$ y en $y = h$, $q_y = 0$.

Respuesta:

$$\frac{T - T_0}{\mu U^2/k} = \left(\frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h}\right)^2$$

Tarea 6

Reactor químico anular. (Problema 10B.15, Bird et al., modificado.)

Una reacción catalizada se realiza con fuente de calor S_c a presión constante en un lecho empacado entre dos cilindros concéntricos de radios r_0 y r_1 . El cilindro interior se encuentra a una temperatura T_0 , y no hay flujo de calor en dicha superficie.

(a) Demostrar, que a presión constante, no hay velocidad radial, y por lo tanto, la ecuación de balance de energía con ley de Fourier y con las siguientes variables adimensionales,

$$\xi = \frac{r}{r_0}$$

$$\Theta = \frac{T - T_0}{S_c r_0^2 / 4k_{eff}}$$

es la siguiente:

$$\frac{k_{eff}}{r_0^2} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{d(T - T_0)}{d\xi} \right] = -S_c$$

(b) Resolver esta ecuación con las siguientes condiciones de frontera:

1. En $r = r_0$, $T = T_0$

2. En $r = r_0$, $\frac{d}{dr}T = 0$

(c) Demostrar que la solución es:

$$\Theta = 1 - \xi^2 + 2 \ln \xi$$

(d) Encontrar la expresión de la temperatura del cilindro exterior. Calcular ésta con los siguientes datos:

$$r_0 = 0.45 \text{ in}$$

$$r_1 = 0.50 \text{ in}$$

$$k_{eff} = 0.3 \frac{\text{Btu}}{\text{hr ft } ^\circ\text{F}}$$

$$T_0 = 900 ^\circ\text{F}$$

$$S_c = 4800 \frac{\text{cal}}{\text{hr cm}^3}$$

(e) ¿Cuáles serían los resultados de la parte (d) si los radios de los cilindros se duplicaran?

Respuesta

(e) 888^0 F .

Tarea 7

1. Capacidad de aislamiento de una pared. (Problema 10A.6. Bird et al.)

El poder de aislamiento de una pared es medido por medio del arreglo que se muestra en la figura 3.17. Se coloca un panel de plástico sobre la pared. Sobre ese panel se montan dos termopares sobre cada superficie. La conductividad térmica y el grosor del panel de plástico son conocidos. A partir de las temperaturas medidas bajo régimen permanente mostradas en la figura 3.17, calcular:

- El flux de calor bajo régimen permanente a través de la pared (y el panel).
- La resistencia térmica (grosor de la pared dividido por la conductividad térmica).

Respuestas

- 14.3 BTU/hr ft².
- 4.2 ft² hr F/BTU.

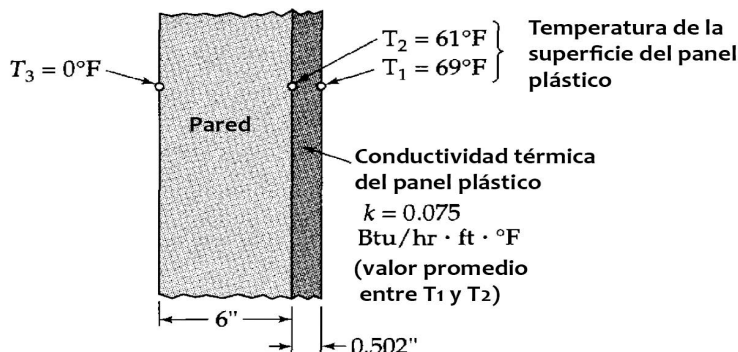


Figura 3.17. Determinación de la resistencia térmica de una pared.

2. Grosor de la pared de aislamiento de un horno. (Problema 10B. 6. Bird et al.)

La pared de un horno está fabricada con 3 capas: (1) ladrillo refractario, (2) ladrillo aislante, (3) placa de acero de 0.25 in de grosor. Calcular el grosor de cada capa de ladrillo para obtener el grosor de pared mínimo total si la pérdida de calor a través de la pared es de 5000 BTU/hr ft², suponiendo que las capas están en íntimo contacto térmico. Los datos son los siguientes:

Placa de acero	Material	Temperatura máxima Permitida (° F)	Conductividad térmica (BTU/hr ft F)	
			a 100° F	a 2000° F
	Ladrillo refractario	2600	1.8	3.6
	Ladrillo aislante	2000	0.9	1.8
	Acero	---	26.1	---

Figura 3.18. Pared de horno compuesta.

Capítulo 4

Capa Límite Térmica y Flujo Turbulento No Isotérmico

4. 1. Capa Límite Térmica. Método de von Karman.

Considerar flujo bidimensional alrededor de un cuerpo sumergido, como se expone en la figura 4.1.

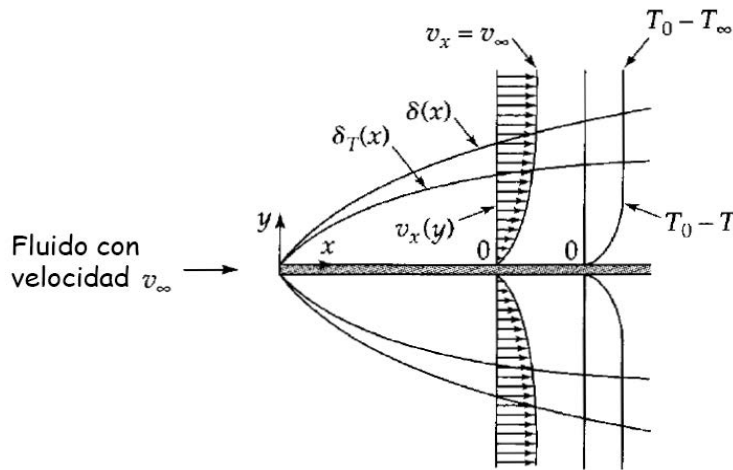


Figura 4.1. Desarrollo de la capa límite en el flujo alrededor de una placa plana. El grosor de la capa límite térmica es menor que la de momentum. La temperatura de la placa es T_0 .

En la vecindad del cuerpo, las ecuaciones de conservación son:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}) \quad (4.2)$$

$$\rho \hat{C}_p (v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y}) = k (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (4.3)$$

En la ecuación 4.3 se ha despreciado la contribución de la disipación viscosa y la conducción de calor en la dirección del movimiento ($q_x = 0$). Si en regiones lejanas a la capa límite los efectos de viscosidad son despreciables, entonces tenemos la condición de flujo potencial:

$$\frac{1}{2}\rho(v_x^2 + v_y^2) + P = \text{constante} \quad (4.4)$$

Diferenciando la ecuación 4.4 con respecto a x obtenemos:

$$\frac{1}{2}\rho \frac{dU^2}{dx} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{donde } U^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \text{Substituyendo esta expresión en la ecuación 4.2, obtenemos:}$$

$$\rho(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}) = \rho U \frac{dU}{dx} + \mu (\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}) \quad (4.5)$$

Si en regiones lejanas de la capa límite U es constante, entonces:

$$\rho(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}) = \mu (\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}) \quad (4.6)$$

Las ecuaciones 4.6 y 4.3 están sujetas a las condiciones de frontera

$$\text{siguientes: } v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0 \quad y \quad v_x|_{y \rightarrow \infty} = U \quad (4.7)$$

$$T|_{y=0} = T_0 \quad y \quad T|_{y \rightarrow \infty} = T_\infty \quad (4.8)$$

El número de Prandtl ($Pr = \nu/\alpha$) define la magnitud de la capa límite térmica δ_T .

Si $Pr > 1$, el grosor de la capa límite de momentum es mayor que la capa límite térmica ($\delta > \delta_T$). Si $Pr < 1$, $\delta_T > \delta$. Integrando las ecuaciones 4.1 y 4.6, obtenemos las ecuaciones de momentum de Von Karman (integral de momentum):

$$\mu (\frac{\partial v_x}{\partial y})|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho v_x (U - v_x) dy \quad (4.9)$$

Substituyendo la ecuación 4.1 en la 4.3 obtenemos:

$$\rho \hat{C}_p [v_x \frac{\partial T}{\partial x} - (\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} dy) \frac{\partial T}{\partial y}] = k (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad \text{Integrando:}$$

$$\rho \hat{C}_p [\int_0^\infty v_x \frac{\partial T}{\partial x} dy - (\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} (T_\infty - T) dy)] = k (\frac{\partial T}{\partial y})|_{y=0}$$

$$\rho \hat{C}_p \int_0^\infty [v_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} (T - T_\infty)] dy = k (\frac{\partial T}{\partial y})|_{y=0}$$

$$\rho \hat{C}_p \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} [(T - T_\infty) v_x] dy = k (\frac{\partial T}{\partial y})|_{y=0} \quad \text{por la regla de Leibnitz y teniendo en cuenta los}$$

límites en 4.7 y 4.8:

$$k (\frac{\partial T}{\partial y})|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho \hat{C}_p (T - T_\infty) v_x dy \quad (4.10)$$

Como ejemplo, considérese los siguientes perfiles de momentum y temperatura:

$$\begin{aligned}\frac{v_x}{v_\infty} &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 & y \leq \delta \\ \frac{v_x}{v_\infty} &= 1 & y \geq \delta\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} &= 2\eta_T - 2\eta_T^3 + \eta_T^4 & y \leq \delta_T \\ \frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} &= 1 & y \geq \delta_T\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\text{Donde } \eta = \frac{y}{\delta} \quad \eta_T = \frac{y}{\delta_T}$$

Se pretende calcular el flujo de calor en función de los números adimensionales requeridos.

Calculamos primero la integral de momentum 4.9 y la integral de la ecuación 4.10 con los perfiles propuestos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \rho v_x (U - v_x) dy &= \rho \delta v_\infty^2 \int_0^1 \frac{v_x}{v_\infty} (1 - \frac{v_x}{v_\infty}) d\eta = \rho \delta v_\infty^2 \int_0^1 (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)(1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4) d\eta = \\ &= \frac{37}{315} \rho \delta v_\infty^2\end{aligned}\quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \rho \hat{C}_p (T_\infty - T) v_x dy &= \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) \delta_T \int_0^1 (2\eta_T \Delta - 2\eta_T^3 \Delta^3 + \eta_T^4 \Delta^4)(1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4) d\eta_T = \\ \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) \delta_T (\frac{2}{15} \Delta - \frac{3}{140} \Delta^3 + \frac{1}{180} \Delta^4) &= \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) \delta_T f(\Delta)\end{aligned}\quad (4.14)$$

donde $\Delta = \delta_T / \delta$. Substituyendo la ecuación 4.13 en 4.9 obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) |_{y=0} &= \frac{2\mu v_\infty}{\delta} \\ \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho v_x (U - v_x) dy &= \frac{d}{dx} \left(\frac{37}{315} \rho \delta v_\infty^2 \right) = \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \text{Igualando:} \\ \frac{37}{315} \rho v_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} &= \frac{2\mu v_\infty}{\delta} \quad \text{integrando: } \int \delta d\delta = \frac{2\mu v_\infty}{\frac{37}{315} \rho v_\infty^2} = \frac{(2)315}{37} \frac{\nu}{v_\infty} \int dx\end{aligned}$$

donde la viscosidad cinemática es $\nu = \mu / \rho$. El resultado es:

$$\delta^2 = \frac{1260}{37} \frac{\nu}{v_\infty} x \quad (4.15)$$

Con la integral ecuación 4.10:

$$\begin{aligned}k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) |_{y=0} &= -2 \frac{k}{\delta_T} (T_0 - T_\infty) \\ \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho \hat{C}_p (T - T_\infty) v_x dy &= \rho \hat{C}_p v_\infty (T_\infty - T_0) f(\Delta) \frac{d\delta_T}{dx} \quad \text{igualando:} \\ \frac{2k dx}{\rho \hat{C}_p v_\infty f(\Delta)} &= \delta_T d\delta_T \quad \text{integrando: } \delta_T^2 = \frac{4\alpha x}{v_\infty f(\Delta)}\end{aligned}\quad (4.16)$$

donde la difusividad térmica $\alpha = k / \rho \hat{C}_p$.

$$\text{Ahora: } \eta_T = \frac{y}{\delta_T} = \frac{y}{\delta \Delta} \quad \Delta^2 = \frac{\delta_T^2}{\delta^2} = \frac{\frac{4\alpha x}{v_\infty f(\Delta)}}{\frac{1260}{37} \frac{v}{v_\infty} x} = \frac{37}{315} \frac{\alpha}{v f(\Delta)} = \frac{37}{315} \frac{P_r^{-1}}{f(\Delta)} \quad (4.17)$$

Como $f(\Delta) = \frac{2}{15}\Delta - \frac{3}{140}\Delta^3 + \frac{1}{180}\Delta^4$, si $\Delta < 1$ entonces la ecuación 4.17 se aproxima a $\Delta = P_r^{-1/3}$ (4.18)

Luego $\eta_T = \frac{y P_r^{1/3}}{(\frac{1260}{37} \frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}}$ (4.19)

La ecuación 4.19 resuelve el perfil de temperaturas expuesto en 4.12.

Cálculo del flujo de calor.

$$Q = 2 \iint_{00}^{WL} q_{y|y=0} dx dz = 2 \iint_{00}^{WL} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) |_{y=0} dx dz = 2W \int_0^L k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) |_{y=0} dx \quad (4.20)$$

Por las ecuaciones 4.10 y 4.14:

$$Q = 2W \int_0^\infty \rho \hat{C}_p v_x (T - T_\infty) |_{x=L} dy = 2W \rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty) \delta_T(L) f(\Delta) \quad (4.21)$$

Por la ecuación 4.16: $\delta_T(L) = \left[\frac{4\alpha L}{v_\infty f(\Delta)} \right]^{1/2}$

Por la ecuación 4.17: $[f(\Delta)]^{1/2} = \sqrt{\frac{37}{315} \frac{P_r^{-1/2}}{\Delta}} = \sqrt{\frac{37}{315}} P_r^{-1/6}$

Si $\frac{\alpha L}{v_\infty} = \frac{vL}{P_r v_\infty} = \frac{\mu L}{\rho v_\infty P_r}$ entonces

$$Q = 2W \rho \hat{C}_p v_\infty (T_0 - T_\infty) \left[\frac{4\mu L}{\rho v_\infty P_r} \right]^{1/2} \sqrt{\frac{37}{315}} P_r^{-1/6}$$

$$Q = 2W \left(\hat{C}_p \frac{\mu}{k} \right) \left(\frac{\rho L v_\infty}{\mu} \right) k (T_0 - T_\infty) \sqrt{\frac{148}{315}} \left[\frac{\mu}{\rho L v_\infty} \right]^{1/2} P_r^{-2/3}$$

$$Q = 2WL \left(\frac{k}{L} \right) (T_0 - T_\infty) (0.685) R_e^{1/2} P_r^{1/3} \quad (4.22)$$

Solución asintótica a números de Prandtl grandes (líquidos).

En este caso, como el grosor de la capa límite térmica es bastante menor que la de momentum, se sugiere un perfil lineal de velocidades a lo largo de toda la placa. Esta variación se puede expresar de la forma sugerida por la ecuación 4.19:

$$\eta_T = \frac{y P_r^{1/3}}{(\frac{1260}{37} \frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} \quad \rightarrow \quad \frac{v_x}{v_\infty} = \frac{C y}{(\frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} \quad (4.23)$$

$$v_y = - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = \int_0^y \frac{\frac{1}{2} C v_\infty y/x}{(\frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} dy = \frac{C v_\infty y^2/x}{4(\frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} \quad (4.24)$$

Substituyendo la ecuación 4.24 en la 4.3 obtenemos:

$$\frac{C v_\infty y}{(\frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\frac{C v_\infty y^2}{x}}{4(\frac{v}{v_\infty} x)^{1/2}} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right] = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.25)$$

Sujeta a las condiciones de frontera: $T|_{y=0} = T_0$ y $T|_{x=0} = T_\infty$

Por el método de combinación de variables, escogemos las siguientes variables adimensionales:

$$\theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} \quad y \quad \eta = \left[\frac{C v_\infty^{\frac{3}{2}}}{12 \alpha v^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} = K \frac{y}{x^{1/2}} \quad \text{donde} \quad K = \left[\frac{C v_\infty^{\frac{3}{2}}}{12 \alpha v^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4.26a)$$

$$\text{con condiciones} \quad \theta|_{\eta=0} = 0 \quad y \quad \theta|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \quad (4.26b)$$

Evaluamos las siguientes derivadas necesarias en la ecuación 4.25:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (T_\infty - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = (T_\infty - T_0) \theta' K \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) y \quad (4.27a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_\infty - T_0) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_\infty - T_0) \theta' K x^{-1/2} \quad (4.27b)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (T_\infty - T_0) \theta'' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = (T_\infty - T_0) \theta'' K \frac{\eta}{y} x^{-1/2} \quad (4.27c)$$

La ecuación 4.25 en términos de η se puede expresar como:

$$\eta^3 \left(\frac{12 \alpha x}{y^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \eta^3 \left(\frac{3 \alpha}{y} \right) \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.28)$$

Substituyendo las ecuaciones 4.27 en 4.28 obtenemos:

$$\begin{aligned} \eta^3 \left(\frac{12 \alpha x}{y^2} \right) \theta' \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \right) y + \eta^3 \left(\frac{3 \alpha}{y} \right) \theta' x^{-1/2} &= \alpha \frac{\eta}{y} \theta'' x^{-1/2} \\ -3 \eta^3 \theta' \alpha \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y} &= \alpha \frac{\eta}{y} \theta'' x^{-1/2} \quad \rightarrow \quad \theta'' + 3 \eta^2 \theta' = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sujeto a las condiciones 4.26b. Integrando 4.29 obtenemos:

$\theta' = C_1 + e^{-\eta^3}$ integrando de nuevo:

$\theta = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^3} d\eta + C_2$ Por la primera condición $C_2 = 0$. Por la segunda condición:

$$1 = C_1 \int_0^\infty e^{-\eta^3} d\eta$$

$$\theta = \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^3} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\eta^3} d\eta} = \frac{\int_0^\eta e^{-\eta^3} d\eta}{\Gamma(\frac{4}{3})} \quad (4.30)$$

Flujo de calor.

$$Q = 2 \iint_{00}^{WL} q_{y|y=0} dx dz = -2 \iint_{00}^{WL} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) |_{y=0} dx dz = -2Wk \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) |_{y=0} dx$$

$$Q = -2WkK(T_\infty - T_0)\theta'|_{\eta=0} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}} dx = 2Wk(T_\infty - T_0)K \frac{2L^{1/2}}{\Gamma(\frac{4}{3})}$$

$$\text{Ahora: } KL^{1/2} = \left(\frac{C}{12}\right)^{1/3} \frac{L^{1/2} v_\infty^{1/2}}{\alpha^{1/3} \nu^{1/6}} = \left(\frac{C}{12}\right)^{1/3} \frac{L^{1/2} v_\infty^{1/2}}{\nu^{1/2}} P_r^{1/3} = \left(\frac{C}{12}\right)^{1/3} R_e^{1/2} P_r^{1/3}, \text{ ahora:}$$

$$Q = (2WL) \frac{k}{L} (T_\infty - T_0) \frac{2}{\Gamma(\frac{4}{3})} \left(\frac{C}{12}\right)^{\frac{1}{3}} R_e^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}} \rightarrow Nu = \frac{Q}{(2WL) \frac{k}{L} (T_\infty - T_0)} = 0.677 R_e^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}} \quad (4.31)$$

4. 2. Flujo Turbulento no isotérmico.

Analogía de Reynolds y el flux de calor para flujo turbulento en tubos.

La analogía de Reynolds permite aportar la contribución en régimen turbulento al flujo de calor. Esta consiste en aplicar en flujo turbulento, la igualdad de las difusividades de momentum y térmica. Esto es:

$$\nu^{(t)} = \alpha^{(t)} \quad (4.32)$$

En el análisis de la capa límite, definamos las siguientes variables:

$$q|_{y=0} = q_0, \quad T|_{y=0} = T_0 \quad y \quad T|_{y=R} = T_R \quad (\text{temperatura en el centro del tubo})$$

El flux de calor en régimen turbulento se define:

$$q_r = -(k + k^{(t)}) \frac{dT}{dr} = -\left(1 + \frac{\alpha^{(t)}}{\alpha}\right) k \frac{dT}{dr} = -\left(1 + \frac{\nu^{(t)}}{\alpha^{(t)}}\right) k \frac{dT}{dr} \quad (4.33)$$

La expresión empírica que se aplica a la subcapa viscosa junto a la pared es:

$$q_y = -\left[1 + P_r \left(\frac{\gamma v_*}{14.5 \nu}\right)^3\right] k \frac{dT}{dr} \quad (4.34)$$

$$\text{Donde la velocidad de fricción es: } v_* = \left(\frac{\tau_0}{\rho}\right)^{1/2} \quad (4.35)$$

Cálculo del número de Nusselt.

Integramos la ecuación 4.34:

$$k \int_{T_R}^{T_0} dT = q_0 \int_0^\infty \frac{dy}{1 + P_r \left(\frac{v_*}{14.5\nu} \right)^3 y^3} \quad \text{su solución es la siguiente:} \quad (4.36)$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1 + a^3 y^3} = \frac{1}{\sqrt{3}a} \tan^{-1} \left[\frac{2y-1}{\sqrt{3}} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{3}a} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} \quad \text{donde } a = P_r^{1/3} \frac{v_*}{14.5\nu}$$

Substituyendo en la ecuación 4.36 obtenemos:

$$\frac{k}{q_0} (T_0 - T_R) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{14.5\nu}{v_*} P_r^{-1/3} \quad \rightarrow \quad Nu = \frac{q_0 D}{k(T_0 - T_R)} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{v_* D}{14.5\nu} P_r^{\frac{1}{3}} \quad (4.37)$$

Por la definición de factor de fricción y velocidad de fricción (ecuación 4.35):

$$f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho\langle v \rangle^2} = \frac{v_*^2}{\frac{1}{2}\langle v \rangle^2} \quad \rightarrow \quad v_* = \sqrt{f/2} \langle v \rangle$$

substituyendo en la ecuación 4.37 obtenemos:

$$Nu = 0.057 R_e P_r^{1/3} \sqrt{f/2} \quad (4.38)$$

Capítulo 5

Transporte de Energía Interfacial en Sistemas No Isotérmicos. Coeficientes de Transferencia de Calor.

Este capítulo consta de 5 partes:

1. Convección forzada en tubos.
2. Convección forzada alrededor de cuerpos sumergidos.
3. Convección forzada en medios porosos.
4. Convección natural.
5. Condensación de vapores en superficies sólidas.

5. 1. Convección forzada en tubos.

5. 1.1. Cálculo de los coeficientes de transferencia de calor interfacial.

Sea T_b la temperatura promedio definida por la ecuación 3.24:

$$T_b = \frac{\iint_{00}^{2\pi R} T(r,z) v_z(r) r dr d\theta}{\iint_{00}^{2\pi R} v_z(r) r dr d\theta}$$

Considerar un fluido dentro de un tubo que se calienta de T_{b1} a T_{b2} con temperatura en la pared $T_\theta(z)$.

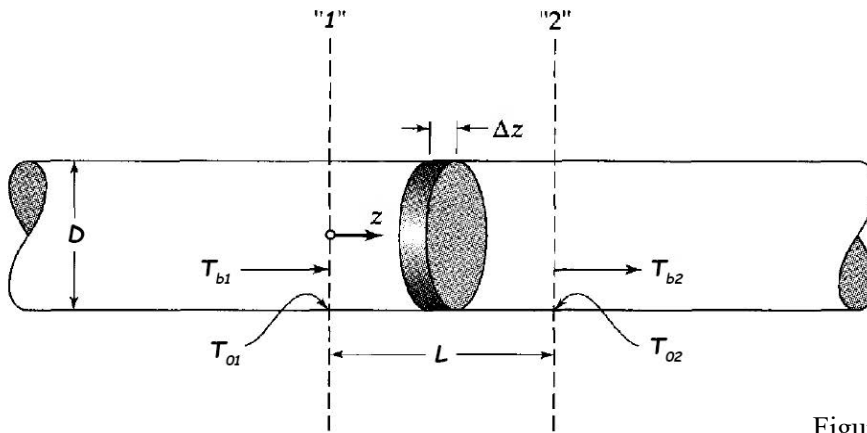


Figura 5.1. Transferencia de calor en un tubo.

El balance de energía en la zona de flujo desarrollado corresponde a la ecuación 3.9:

$$w\hat{\Delta}H = Q \quad \text{En forma diferencial:} \quad w\hat{d}H = dQ \quad (5.1)$$

$$\text{donde } \hat{d}H = C_p dT_b \quad \text{y} \quad dQ = h_{loc}(T_0 - T_b)\pi D dz \quad (5.2)$$

y donde h_{loc} es el coeficiente interfacial de transferencia de calor definido en la ecuación 3.91. En este caso es un coeficiente local. Substituyendo la ecuación 5.2 en la 5.1 obtenemos

$$w\hat{C}_p dT_b = h_{loc}(T_0 - T_b)\pi D dz \quad \text{de donde la definición de } h_{loc} \text{ es:}$$

$$h_{loc} = \frac{w\hat{C}_p dT_b}{(T_0 - T_b)\pi D dz} = -\frac{w\hat{C}_p}{\pi D} \frac{d \ln(T_0 - T_b)}{dz} \quad (5.3)$$

Esta es la definición general de coeficiente local interfacial. Para obtener in coeficiente promedio que se pueda calcular a partir de datos de las variables conocidas, se integra la ecuación 5.3 a lo largo de la longitud del tubo:

$$\int_0^L h_{loc} dz = \frac{w\hat{C}_p}{\pi D} \int_{T_{b1}}^{T_{b2}} \frac{dT_b}{T_0 - T_b} \quad \text{integrando} \quad (5.4)$$

$$\int_0^L h_{loc} dz = \frac{w\hat{C}_p}{\pi D} \ln \frac{T_{b1} - T_{01}}{T_{b2} - T_{02}} \quad \rightarrow \quad (T_{b2} - T_{b1}) \int_0^L h_{loc} dz = \frac{w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi D} \ln \frac{T_{b1} - T_{01}}{T_{b2} - T_{02}}$$

$$\frac{w\hat{C}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi D} = \frac{T_{b2} - T_{b1}}{\ln \frac{T_{b1} - T_{01}}{T_{b2} - T_{02}}} \int_0^L h_{loc} dz \quad \rightarrow \quad \frac{w\Delta H}{\pi D \Delta T_{lm}} = \int_0^L h_{loc} dz \quad (5.5)$$

Donde la ΔT logarítmica media se define como:

$$\Delta T_{lm} = \frac{T_{b2} - T_{b1}}{\ln \left(\frac{T_{b1} - T_{01}}{T_{b2} - T_{02}} \right)} \quad (5.6)$$

A partir de la ecuación 5.1, podemos expresar la ecuación 5.5. de la siguiente forma:

$$Q = \pi D \Delta T_{ln} \int_0^L h_{loc} dz \quad (5.7)$$

Si h_{loc} fuera un coeficiente promedio h_{ln} , entonces la ecuación 5.7 toma la forma:

$$Q = h_{ln} (\pi D L) \Delta T_{ln} \quad \text{que es la ley de Newton de enfriamiento} \quad (5.8)$$

La definición de este coeficiente promedio es, por lo tanto:

$$h_{ln} = \frac{w \Delta \hat{H}}{\pi D L \Delta T_{ln}} = \frac{w \hat{C}_p (T_{b2} - T_{b1})}{\pi D L \Delta T_{ln}} \quad (5.9)$$

La relación entre h_{loc} y h_{ln} se puede encontrar a partir de las ecuaciones 5.7 y 5.8:

$$h_{ln} = \frac{1}{L} \int_0^L h_{loc} dz \quad \text{Aplicando la regla de Leibnitz:}$$

$$\frac{d}{dL} (L h_{ln}) = \frac{d}{dL} \int_0^L h_{loc} dz = \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial L} h_{loc} \right)_z dz + h_{loc}|_{z=L} + h_{loc}|_{z=0}(0)$$

$$h_{ln}|_{z=L} + L \frac{d}{dL} (h_{ln}) = \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial L} h_{loc} \right)_z dz + h_{loc}|_{z=L} \quad (5.10)$$

Para que ambos coeficientes sean iguales, sus pendientes $\frac{d}{dL} (h_{ln})$ y $\left(\frac{\partial}{\partial L} h_{loc} \right)_z$ deben ser iguales a cero. Esto implica que en la zona asintótica de la curva de los coeficientes en función de L ($z = L$) los coeficientes son iguales cuando la pendiente de ambos tiende a cero (ver figura 5.2).

Existen otras definiciones de h que se basan en promedios diferentes. Por ejemplo, el coeficiente que se basa en la media aritmética es:

$$h_a = \frac{w \Delta \hat{H}}{\pi D L \Delta T_a}, \quad \text{donde } \Delta T_a = \frac{(T_{01} - T_{b1}) + (T_{02} - T_{b2})}{2} \quad (5.11)$$

Y el coeficiente que se basa en las condiciones a la entrada del tubo es:

$$h_1 = \frac{w \Delta \hat{H}}{\pi D L (T_{01} - T_{b1})} \quad (5.12)$$

Estos coeficientes se pueden calcular experimentalmente midiendo la temperatura de salida del fluido en tubos de diferente longitud. Por ejemplo, dada la temperatura en la pared del tubo (T_0) y conociendo la temperatura de entrada del fluido (T_{b1}) y el flujo másico w , se puede hacer una gráfica de temperatura en función de L y los coeficientes se calculan con las ecuaciones 5.3, 5.9, 5.11 y 5.12.

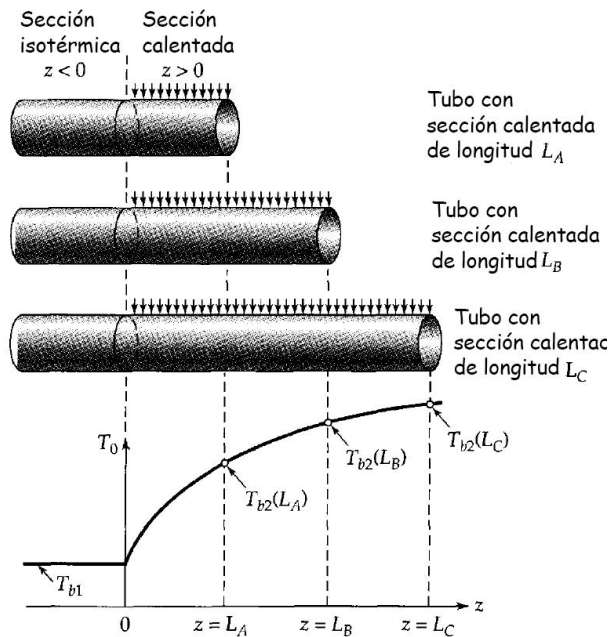


Figura 5.3. Coeficientes calculados con las ecuaciones 5.3, 5.9, 5.11 y 5.12.

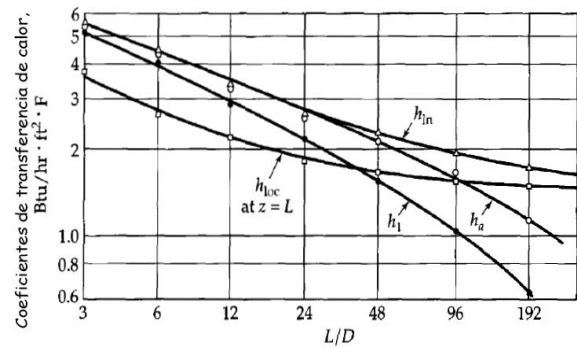


Figura 5.2. Experimentos de medición de temperatura de salida de tubos de diferente longitud, de acuerdo al ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.1. Cálculo de los coeficientes de transferencia de calor a partir de datos experimentales.

Aire con un gasto de 3 lbm/hr fluye en un tubo con diámetro de 0.5 in. A la entrada del tubo su temperatura T_{b1} es 200°F . La temperatura en la pared del tubo se mantiene constante a 212°F . En la siguiente tabla se encuentran las mediciones de la temperatura de salida para cada tubo:

$L(\text{in})$	$T_{b2} (^{\circ}\text{F})$
1.5	201.4
3.0	202.2
6.0	203.1
12.0	204.6
24.0	206.6
48.0	209.0
96.0	211.0

Los coeficientes se calcularon con las ecuaciones mencionadas. Por ejemplo, usando la ecuación 5.12,

$$h_1 = \frac{w\hat{c}_p(T_{b2} - T_{b1})}{\pi DL(T_0 - T_{b1})} \quad \text{donde los valores de la tabla nos dan los datos necesarios para calcular } h_1 \text{ en función de } L. \text{ Los resultados se muestran en la figura 5.3.}$$

5. 1.2. Flujo laminar en tubos.

las regiones cercanas a la entrada y lejanas de la entrada. Las expresiones analíticas derivadas para la región de entrada del tubo consideran la aproximación de capa límite. Con la condición de flujo de calor constante en la pared revelan una variación del número de Nusselt que es proporcional al número de Reynolds, al número de Prandtl y a la relación D/L , de acuerdo a la relación establecida en la ecuación **B-14**:

$$Nu \sim \left(\frac{PeR}{z}\right)^{1/3} \sim [Re Pr D/L]^{1/3}$$

En las regiones lejos de la entrada, de acuerdo a la ecuación 3.22, obtuvimos una región asintótica ($L \gg D$) con un valor constante del número local Nu :

$$Nu_{loc} = \frac{2Rq_0}{k(T_0 - T_b)} = 48/11 \quad \text{Como } q_0 = h_{loc}(T_0 - T_b), \text{ entonces } Nu_{loc} = h_{loc}D/k$$

En el caso de temperatura constante en la pared, $Nu_{loc} = 3.66$.

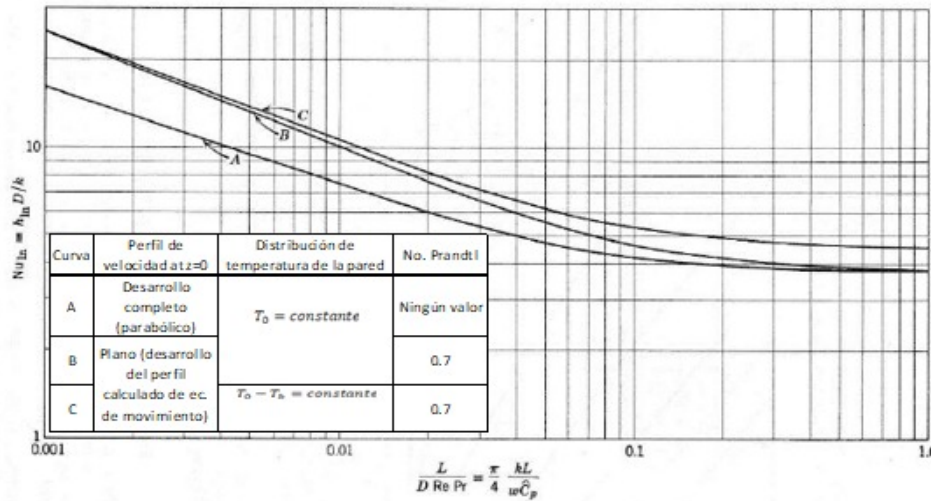


Figura 5.4. Variación del número de Nusselt en función de $(Re Pr D/L)^{-1}$. La pendiente inicial es de $-1/3$ y las asíntotas son $48/11$ y 3.66 .

En la figura 5.4 se observa la variación de Nu_{in} en función de $(Re Pr D/L)^{-1}$ para las situaciones de temperatura constante y flujo de calor constante en la pared. La correlación que se adapta mejor a los datos es:

$$Nu_{in} = 1.86(Re Pr \frac{D}{L})^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{0.14} \quad (5.13)$$

Donde la corrección por viscosidades en el seno del líquido (μ_b) y en la pared (μ_0) son funciones de las temperaturas promedio: $\frac{1}{2}(T_{b2} + T_{b1})$ y $\frac{1}{2}(T_{02} + T_{01})$, respectivamente.

5. 1.3. Flujo turbulento en tubos.

A elevados valores del número de Prandtl, la ecuación 4.38 describe la expresión del número de Nusselt:

$$Nu_{loc} = 0.057 Re_r^{1/3} \sqrt{f/2} \quad (5.14)$$

En flujos turbulentos, no existe diferencia significativa entre las condiciones de temperatura

o flujo de calor constante en la pared. En tubos, es frecuente que las propiedades sean calculadas a la temperatura de película T_f :

$$T_f = \frac{1}{2}(T_{ba} + T_{0a}), \quad \text{donde} \quad T_{ba} = \frac{1}{2}(T_{b2} + T_{b1}) \quad \text{y} \quad T_{0a} = \frac{1}{2}(T_{02} + T_{01}).$$

En flujos altamente turbulentos, donde $Re > 20,000$ (10^4 - 10^5), Pr (0.6-100), $L/D > 10$, las curvas son independientes de L/D y convergen a una sola curva, dada por la correlación:

$$Nu_{ln} = 0.026 Re^{0.8} P_r^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0} \right)^{0.14} \quad (5.15)$$

Para poder correlacionar el régimen laminar y turbulento en una sola gráfica, que abarque las ecuaciones 5.13 y 5.15, se define el factor J_H en las tres formas equivalentes siguientes:

$$J_{Hln} = \frac{Nu_{ln}}{Re P_r^{1/3}} \quad (5.16)$$

$$J_{Hln} = \frac{Nu_{ln}}{Re P_r} P_r^{2/3} = \frac{h_{ln} D}{k} \frac{\mu}{GD} \frac{k}{\hat{C}_p \mu} P_r^{2/3} = \frac{h_{ln}}{\hat{G} \hat{C}_p} P_r^{2/3} \quad (5.17)$$

$$J_{Hln} = \frac{w \hat{C}_p (T_{b2} - T_{b1})}{\pi D L \Delta T_{ln}} \frac{P_r^{2/3}}{\hat{G} \hat{C}_p} = \frac{D (T_{b2} - T_{b1})}{4 L \Delta T_{ln}} P_r^{2/3} \quad (5.18)$$

$G = \rho v$ es el flujo másico por unidad de área (flux de masa). En la figura 5.5 se grafican los factores J_{Hln} en sus tres formas con la corrección de viscosidad en función del número de Reynolds. Se observa que la zona laminar depende de la relación L/D . Para $Re > 8 \times 10^3$, J_{Hln}

se correlaciona con $f/2$ (analogía de Colburn), relación derivada de la ecuación 5.14. Esto es: $\log(J_{Hln}) \sim \log \frac{Nu_{ln}}{Re P_r^{1/3}} \sim \log \left(\frac{f}{2} \right)$.

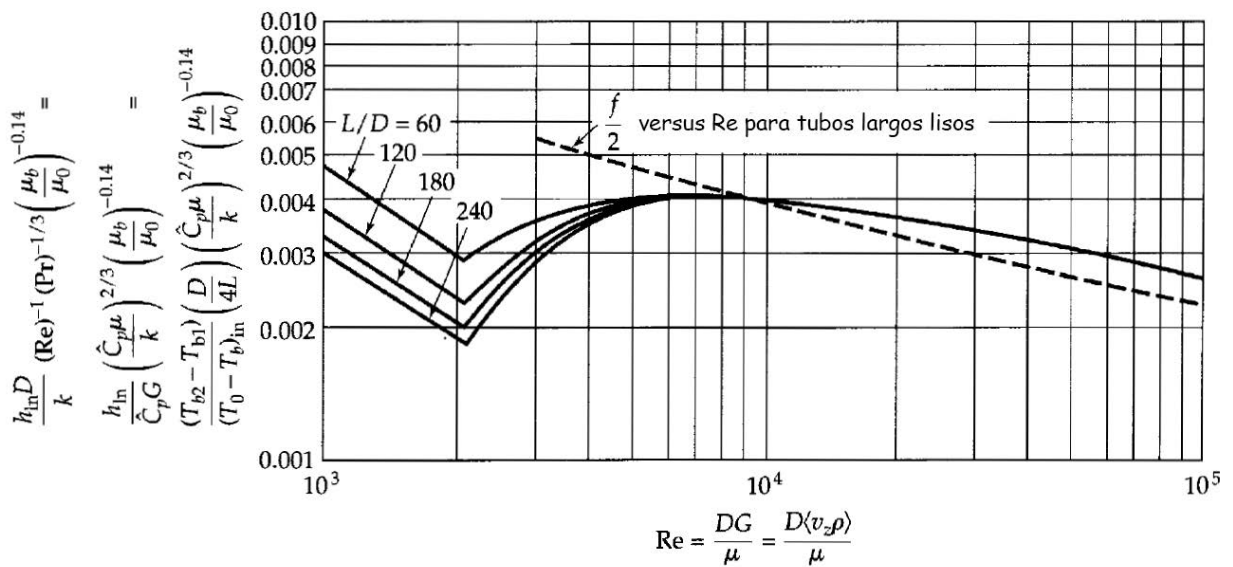


Figura 5.5. J_{Hln} en función de Re para tubos lisos.

5. 1.4. Ejemplo 5.2

Aire fluye a 70⁰ F y 1 atm a través de un tubo recto de diámetro de 2 in con un gasto de 70 lb/hr. La sección de calentamiento tiene una temperatura en la pared interior de 250⁰ F. La temperatura del aire a la salida es de 230⁰F.

Calcular la longitud del tubo necesaria para el proceso.

Primeramente, es necesario calcular $T_{ba} = \frac{1}{2}(T_{b2} + T_{b1})$ y $T_f = \frac{1}{2}(T_{ba} + T_{0a})$ lo que da:

$T_{ba} = 150^0 F$ y $T_f = 200^0 F$ Las propiedades del aire a $T_f = 200^0 F$ son:

$$\mu = 0.052 \text{ lb/ft hr}$$

$$Pr = 0.7$$

$$\hat{C}_p = 0.242 \text{ BTU/lb}^0 F$$

$$\mu_b|_{150} = 0.049, \quad \mu_0|_{250} = 0.055$$

$$k = 0.018 \text{ BTU/ hr ft}^0 F$$

$$\Delta T_{ln} = \frac{T_{b2} - T_{b1}}{\ln\left(\frac{T_{b1} - T_{01}}{T_{b2} - T_{02}}\right)} = 72.7$$

Solución:

$$R_e = \frac{GD}{\mu} = \frac{4w}{\pi D \mu} = 1 \times 10^4 \quad \text{De la figura 5.5,}$$

$$J_{H_{ln}} = \frac{D}{4L} \frac{(T_{b2} - T_{b1})}{\Delta T_{ln}} P_r^{2/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{-0.14} = 0.004$$

$$L = \frac{D}{4(0.004)} \frac{(T_{b2} - T_{b1})}{\Delta T_{ln}} P_r^{2/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_0}\right)^{-0.14} = 19 \text{ ft}$$

5. 2. Convección forzada alrededor de cuerpos sumergidos.

5. 2.1. Placa plana.

En este caso, la superficie de la placa se mantiene a T_0 y el fluido tiene una temperatura T_∞ y una velocidad v_∞ en regiones alejadas de la placa. En la subcapa laminar en regiones cercanas al extremo izquierdo de la placa, las expresiones analíticas del factor de fricción y del número de Nusselt (ver ecuación 4.31, considerando una sola cara):

$$\frac{1}{2} f_{loc} = 0.332 R_e^{-1/2} \quad (5.19)$$

$$Nu_{loc} = 0.338 R_e^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}} \quad (5.20)$$

Por la ecuación 5.16, $J_{H_{ln}} = \frac{Nu_{ln}}{Re Pr^{1/3}}$, de donde obtenemos:

$$J_{H_{ln}} = 0.338 Re^{-1/2} \quad (5.21)$$

Este valor es aproximadamente igual al de la ecuación 5.19. Por lo tanto, obtenemos la expresión de la analogía de Colburn, esto es,

$$\frac{1}{2} f_{loc} = J_{H_{ln}} \quad (5.22)$$

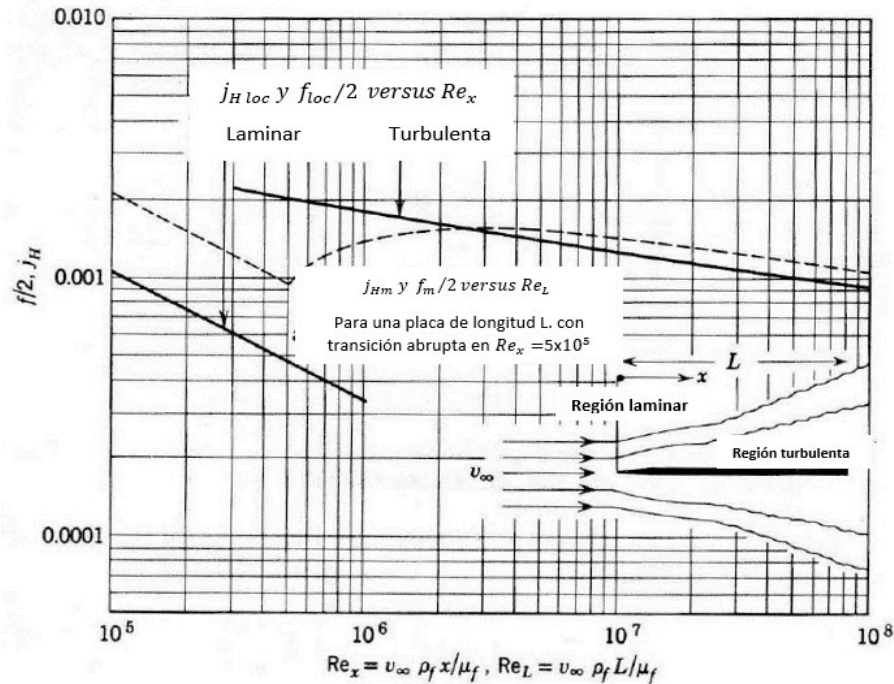


Figura 5.6. Coeficientes de transferencia de flujo tangencial alrededor de una placa plana.

5. 2.2. Esferas y cilindros.

La transferencia de calor de una esfera hacia un fluido en reposo corresponde a un número de Nusselt de 2 (ecuación 3.95).

En el caso de un fluido en movimiento, para esferas y cilindros se cuenta con las siguientes correlaciones:

Esferas: $Nu_m = 2 + 0.6 Re_e^{1/2} Pr^{1/3}$ (5.23)

Cilindros: $Nu_m = 0.4 Re_e^{1/2} Pr^{0.4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{1/4}$ donde Nu_m es el Nusselt promedio. (5.24)

5.2.3. Otras geometrías.

Se ha propuesto la siguiente correlación:

$$Nu_m - Nu_{m0} = 0.6 R_e^{\frac{1}{2}} P_r^{\frac{1}{3}} \quad (5.25)$$

Donde Nu_{m0} es el número de Nusselt promedio cuando el número de Reynolds es cero.

La figura 5.7 muestra la correlación ecuación 5.25 para diferentes geometrías.

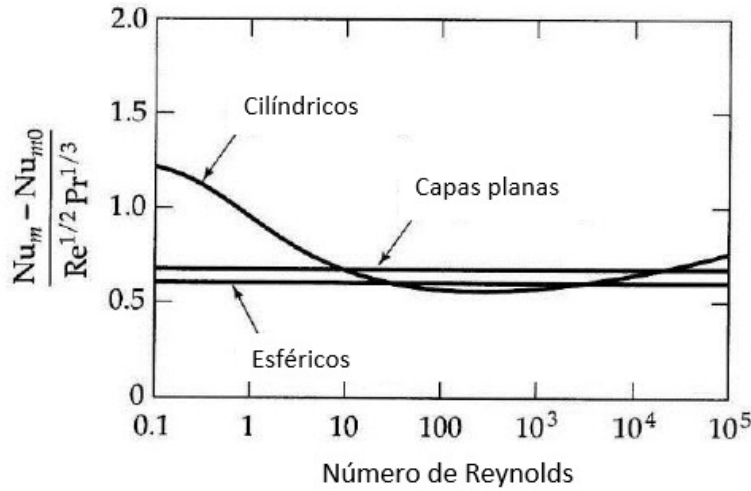


Figura 5.7. Comparación de números de Nusselt para flujos alrededor de cuerpos sumergidos: placas, esferas, cilindros usando la ecuación 5.25.

5.3. Convección forzada en medios porosos.

En este caso, el coeficiente de transferencia h_{loc} se define en base a un volumen del medio poroso Sdz :

$$dQ = h_{loc}(T_0 - T_b)aSdz \quad (5.26)$$

donde a es la superficie de las partículas por unidad de volumen del medio poroso. El tamaño efectivo de las partículas D_p es función de la porosidad ϵ y de a :

$$D_p = 6(1 - \epsilon)/a \quad (5.27)$$

$$\text{La correlación para } Re \text{ pequeños es: } J_H = 2.19 R_e^{-2/3} \quad (5.28)$$

$$\text{Donde } J_H = \frac{h_{ln}}{G_0 \hat{c}_p} P_r^{2/3} \quad (5.29)$$

$$R_e = \frac{D_p G_0}{\psi(1-\epsilon)\mu} \quad (5.30)$$

Las propiedades físicas se evalúan a la temperatura de película $T_f = \frac{1}{2}(T_b + T_0)$ y $G_0 = \frac{w}{S}$.

ψ es el factor de forma para diferentes geometrías. Para esferas $\psi = 1$, para cilindros $\psi = 0.92$. El número de Nusselt se define de la siguiente forma:

$$Nu_{loc} = \frac{h_{loc} D_p}{k(1-\varepsilon)\psi} \quad (5.31)$$

Como $J_H = \frac{Nu}{Re P_r^{1/3}}$ entonces, por la ecuación 5.28 obtenemos:

$$Nu_{loc} = J_H Re P_r^{1/3} = 2.19(Re P_r)^{1/3} \quad (5.32)$$

Esta ecuación es consistente con las expresiones de capa límite ($Pe \gg 1$) y con la ecuación 5.17 para tubos.

5.4. Convección natural.

Una placa vertical a temperatura T_0 se encuentra en contacto con un fluido que tiene una

temperatura T_1 . Junto a la placa, el fluido sube por flotación (ver figura 5.8). A partir de las ecuaciones de conservación en 2 dimensiones, deducir la dependencia de la pérdida de calor sobre las variables del sistema.

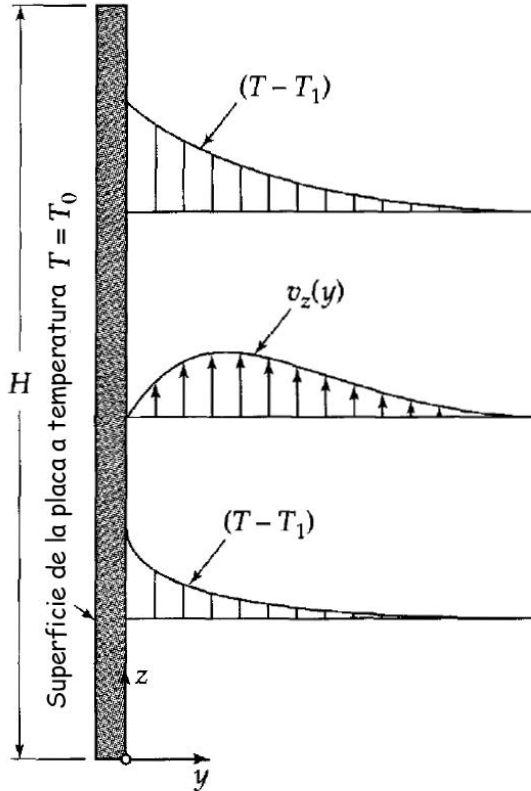


Figura 5.8. Perfiles de temperatura y velocidad en la región junto a una placa vertical caliente.

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.33)$$

$$\bar{\rho} (v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) v_z = \mu (\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}) + \bar{\rho} g \bar{\beta} (T - T_1) \quad (5.34)$$

$$\bar{\rho} \hat{C}_p (v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) (T - T_1) = k (\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (5.35)$$

Las condiciones de frontera son:

$$v_y|_{y=0} = v_z|_{y=0} = 0, \quad v_z|_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad (5.36)$$

$$T|_{y=0} = T_0, \quad T|_{y \rightarrow \infty} = T_1 \quad (5.37)$$

Variables adimensionales:

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1} \quad \phi_z = \left(\frac{\mu}{\alpha_{BH}} \right)^{1/2} v_z$$

$$\zeta = z/H$$

$$\eta = \left(\frac{B}{\alpha_{\mu H}} \right)^{1/4} y \quad \phi_y = \left(\frac{\mu H}{\alpha^3 B} \right)^{1/4} v_y$$

$$B = \bar{\rho} g \bar{\beta} (T_0 - T_1) \quad \text{Substituyendo estas variables en las ecuaciones 3.33-3.35:}$$

$$\frac{\partial \phi_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = 0 \quad (5.38)$$

$$\frac{1}{Pr} (\phi_y \frac{\partial}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial}{\partial z}) \phi_z = \left(\frac{\partial^2 \phi_z}{\partial \eta^2} \right) + \theta \quad (5.39)$$

$$(\phi_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial}{\partial \zeta}) \theta = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (5.40)$$

Con condiciones de frontera adimensionales:

$$\phi_y|_{\eta=0} = \phi_z|_{\eta=0} = \phi_z|_{\zeta=0} = 0, \quad \phi_z|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

$$\theta|_{\eta=0} = 1, \quad \theta|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

El flux de calor promedio es:

$$\bar{q} = -\frac{k}{H} \int_0^H \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} dz \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (T_0 - T_1) \left(\frac{B}{\alpha_{\mu H}} \right)^{1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} |_{\eta=0}$$

$$\bar{q} = k(T_0 - T_1) \left(\frac{B}{\alpha_{\mu H}} \right)^{1/4} \int_0^1 \left(-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} |_{\eta=0} \right) d\zeta \quad \text{Si} \quad C = \int_0^1 \left(-\frac{\partial \theta}{\partial \eta} |_{\eta=0} \right) d\zeta$$

$$\bar{q} = C k (T_0 - T_1) \left(\frac{\bar{\rho} g \bar{\beta} (T_0 - T_1)}{\alpha_{\mu H}} \right)^{1/4} = C \frac{k}{H} (T_0 - T_1) \left(\frac{\hat{c}_p \mu \rho^2 H^3 g \bar{\beta} (T_0 - T_1)}{\mu^2} \right)^{1/4} = C \frac{k}{H} (T_0 - T_1) (Gr Pr)^{1/4} \quad (5.42)$$

Como $\theta = \theta(P_r, \eta, \zeta)$ la derivada $\frac{\partial \theta}{\partial \eta}|_{\eta=0} = f(P_r, \zeta)$. La integral en ζ resulta en que

$C = C(P_r)$, y esta cantidad es casi constante $C \approx 0.548$. El

número de Nusselt correspondiente a la ecuación 5.42 es:

$$Nu_m = C(G_r P_r)^{\frac{1}{4}} = \frac{\bar{q}H}{k(T_0 - T_1)} \quad (5.43)$$

La constante C es función de P_r y de la geometría, $C = C_l$ (forma) $C_2(P_r)$. Valores para diferentes geometrías son:

Placas verticales	Placas horizontales	Cilindros horizontales	Esferas
C_l 1.0	0.835	0.772	0.878
	Gases	Agua	
P_r	0.71	1.0	2.0 4.0 6.0
C_2	0.515	0.534	0.568 0.595 0.608

5. 4.1. Ejemplo 5.3.

Estimar la rapidez de pérdida de calor por convección natural en un tubo horizontal de 6 in de diámetro, si la temperatura en su superficie exterior es $100^0 F$ y la del aire ambiente es de $80^0 F$ a 1 atm.

$$Nu_m = \frac{hD}{k} = C(G_r P_r)^{\frac{1}{4}} \quad C = C_1 C_2 = 0.772 \times 0.515$$

$$\frac{Q}{L} = \frac{h_m(\pi DL)\Delta T}{L} = (Nu_m)k\pi\Delta T \quad \Delta T = 20^0 F$$

Las propiedades del aire a $T_f = \frac{100+80}{2} = 90^0 F = 550^0 R$, son:

$$\mu = 0.046 \text{ lb/ft hr}$$

$$\rho = 0.072 \text{ lb/ft}^3$$

$$\hat{C}_p = 0.241 \text{ BTU/lb}^0 R$$

$$k = 0.015 \text{ BTU/ hr ft}^0 R$$

$$\beta = 1/T_f = 1/550^0 R$$

$$g = 4.17 \times 10^8 \text{ ft/hr}^2$$

Números adimensionales:

$$P_r = \frac{\hat{C}_p \mu}{k} = \frac{(0.241)(0.046)}{0.015} = 0.729$$

$$G_r = \frac{\rho^2 D^3 g \beta \Delta T}{\mu^2} = \frac{(0.5)^3 (0.072)^2 (4.17 \times 10^8) (\frac{20}{550})}{(0.046)^2} = 4.7 \times 10^6$$

$$Nu_m = C[(4.7 \times 10^6)(0.729)]^{1/4} = 17.1$$

$$\frac{Q}{L} = (17.1)(0.015)\pi(20) = \frac{16 \text{ BTU}}{\text{hr ft}}$$

5.5. Condensación.

Se estudiará el proceso de condensación de un vapor sobre la superficie de una placa vertical con temperatura T_0 . El largo de la placa es L y su anchura es W . El condensado fluye verticalmente por gravedad. El vapor fluye hacia la placa debido a una diferencia de presiones cerca de la interfase que se encuentra a una temperatura de rocío T_d y cede su calor latente ΔH_{vap} . La figura 5.9 expone el proceso de condensación.

La transferencia interfacial de calor es igual al calor latente de vaporización, de acuerdo al

siguiente balance de energía:

$$Q_i = h_m h L (T_d - T_0) = w \Delta \hat{H}_{vap} \quad (5.44)$$

Este balance global de energía expresa que la interfase líquida de grosor $\delta(z)$ conduce calor Q_c del vapor al sólido. El coeficiente de transferencia interfacial h_m y $\Delta T = T_d - T_0$ determinan el calor interfacial Q_i .

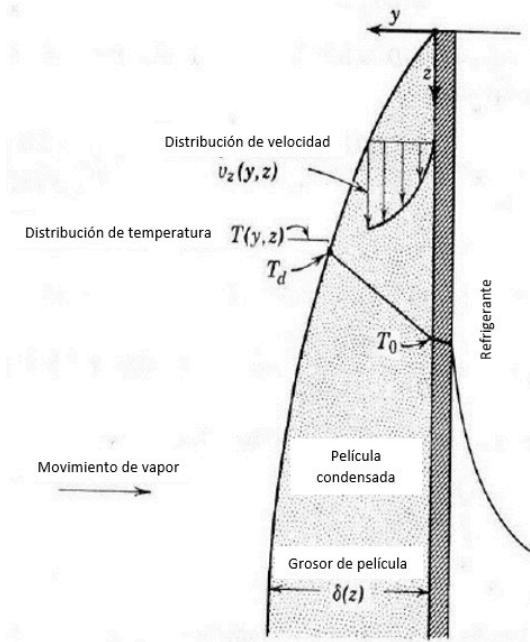


Figura 5.9. Condensación de vapores sobre una placa.

Luego entonces, $Q_i = Q_c = w \Delta \hat{H}_{vap}$. Como la distancia δ varía con z , es necesario hacer un balance diferencial:

$$dQ_c = \Delta \hat{H}_{vap} dw \quad (5.45)$$

El flujo másico por gravedad en una placa vertical está dado por:

$$w = \frac{\rho^2 g h \delta^3(z)}{3\mu} \quad (5.46)$$

$$dw = \frac{\rho^2 g h \delta^2(z)}{\mu} d[\delta(z)] \quad (5.47)$$

$$Q_c = \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS = - \iint_{00}^{zh} q_y dx dz = -h \int_0^z q_y dz \quad (5.48)$$

Cálculo del flux de calor:

Balance de energía diferencial: $\rho \hat{C}_p v_z \frac{dT}{dz} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

Los vectores $\underline{q}(0, q_y, 0)$ y $\underline{v}(0, 0, v_z(y))$ implican que $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ con condiciones de frontera $T|_{y=\delta} = T_d$, $T|_{y=0} = T_0$. El perfil de temperaturas resultante es:

$$\frac{T-T_0}{T_d-T_0} = \frac{y}{\delta(z)} \quad \text{y el flux de calor es:} \quad q_y = -k \frac{T_d-T_0}{\delta(z)} = -k \frac{\Delta T}{\delta(z)} \quad (5.49)$$

Substituyendo la ecuación 5.49 en la 5.48 obtenemos:

$$Q_c = kh\Delta T \int_0^Z \frac{1}{\delta(z)} dz$$

$$dQ_c = kh\Delta T \frac{1}{\delta(z)} dz \quad (5.50)$$

Substituyendo las ecuaciones 5.47 y 5.50 en 5.45 obtenemos:

$$k\Delta T \frac{1}{\delta(z)} dz = \Delta \hat{H}_{vap} \frac{\rho^2 g \delta^2(z)}{\mu} d[\delta(z)] \quad (5.51)$$

Integrando:

$$k\Delta T \int_0^Z dz = \Delta \hat{H}_{vap} \frac{\rho^2 g}{\mu} \int_0^\delta \delta^3(z) d[\delta(z)]$$

Integrando:

$$z = \Delta \hat{H}_{vap} \frac{\rho^2 g \delta^4(z)}{4k\Delta T \mu} \quad (5.52)$$

Resolviendo para $\delta(z)$ obtenemos:

$$\delta(z) = \left[\frac{4k\Delta T \mu}{\rho^2 g \Delta \hat{H}_{vap}} \right]^{1/4} z^{1/4} \quad (5.53)$$

Como $Q_i = Q_c$, entonces, para obtener el coeficiente h_m :

$$kh\Delta T \int_0^Z \frac{1}{\delta(z)} dz = h_m hL\Delta T \quad \text{de donde podemos despejar el coeficiente } h_m:$$

$$h_m = \frac{k(\rho^2 g \Delta \hat{H}_{vap})^{1/4}}{L(4k\Delta T \mu)^{1/4}} \int_0^L \frac{1}{z^{1/4}} dz = \frac{4k(\rho^2 g \Delta \hat{H}_{vap})^{1/4}}{3L(4k\Delta T \mu)^{1/4}} L^{3/4} = \frac{4k}{3} \left[\frac{\rho^2 g \Delta \hat{H}_{vap}}{4k\Delta T \mu L} \right]^{1/4} = \frac{4k}{3\delta(L)} \quad (5.54)$$

$$\text{El número de Nusselt correspondiente es:} \quad Nu_m = \frac{h_m \delta(L)}{k} = 4/3 \quad (5.55)$$

Si $\delta(z)$ hubiera sido constante a lo largo de la película de condensado ($\delta(L)$), entonces la ecuación 5.54 hubiera dado como resultado:

$$Nu_m = \frac{h_m \delta(L)}{k} = 1 \quad (5.56)$$

Para generalizar este resultado para que sea aplicable a otras geometrías, se define el flujo másico por unidad de anchura h de la forma siguiente:

$$\Gamma = \frac{w}{h} = \frac{\rho^2 g \delta^3(L)}{3\mu} \quad (5.57)$$

Despejando $\delta(L)$: $(3\mu\Gamma/\rho^2g)^{1/3} = \delta(L)$, que substituyendo en la ecuación 5.54 se obtiene:

$$h_m = \frac{4}{3^{4/3}} \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu \Gamma} \right]^{1/3} \quad (5.58)$$

Definiendo al número de Reynolds de la película: $Re = \Gamma/\mu$ (5.59)
y substituyendo la ecuación 5.59 en 5.58 obtenemos:

$$h_m = \frac{4}{3^{4/3}} \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right]^{1/3} Re^{-1/3} \quad (5.60)$$

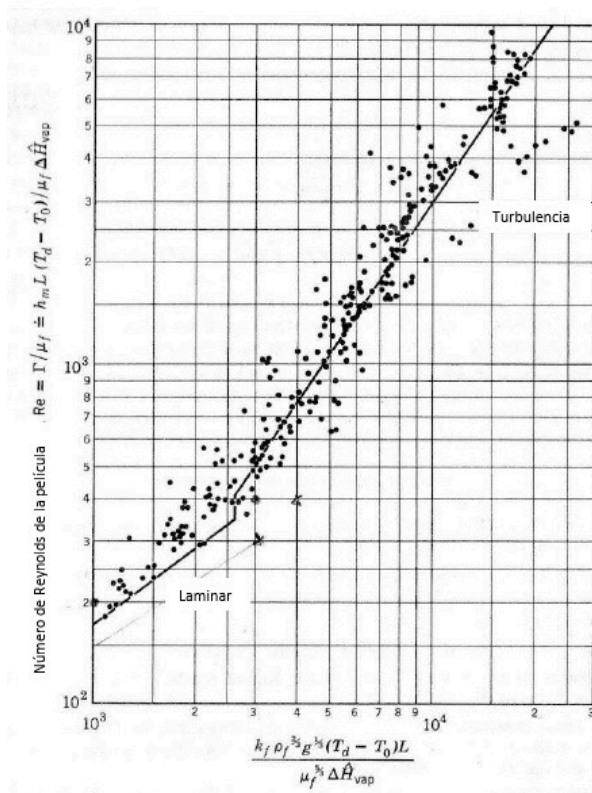
A partir de la ecuación 5.44, podemos obtener una expresión para Γ y Re :

$$\frac{Q_i}{h} = h_m L \Delta T = \frac{w}{h} \hat{\Delta} H_{vap} = \Gamma \hat{\Delta} H_{vap} \text{ por lo que } Re = \frac{\Gamma}{\mu} = \frac{\frac{Q_i}{h}}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} = \frac{h_m L \Delta T}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} \quad (5.61)$$

$$\text{En tubos, por ejemplo, } \frac{Q_i}{\pi D} = h_m L \Delta T, Re = \frac{\Gamma}{\mu} = \frac{\frac{Q_i}{\pi D}}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} = \frac{h_m L \Delta T}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} \quad (5.62)$$

por lo que la expresión para Re en 5.61 y 5.62 no depende de la geometría (h o πD).

$$\text{En flujo turbulento, cuando } \Delta T \text{ no es muy grande, } h_m = 0.021 \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right]^{1/3} Re^{1/3} \quad (5.63)$$



Para graficar ambos regímenes y encontrar el coeficiente h_m , podemos expresar en las ordenadas la ecuación 5.61 y en las abscisas una función de Re independiente de h_m . En el caso laminar,

$$\left[\frac{L \Delta T}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} \right] \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right]^{1/3} = \frac{Re}{h_m} \frac{1.1 h_m}{Re^{1/3}} = 1.1 Re^{4/3}$$

y en el caso turbulento,

$$\left[\frac{L \Delta T}{\mu \hat{\Delta} H_{vap}} \right] \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right]^{1/3} = \frac{Re}{h_m} \frac{50 h_m}{Re^{1/3}} = 50 Re^{2/3}$$

Notar que, en las abscisas, ambos regímenes comparten el lado izquierdo de estas dos ecuaciones.

Figura 5.10. Datos y correlaciones del proceso de condensación de vapores en superficies verticales.

5. 5.1. Ejemplo 5.4.

Un líquido que fluye en el interior de un tubo vertical se calienta por condensación de vapor en su exterior. El tubo tiene una longitud de 10 ft y 2 in de diámetro. ¿Qué temperatura del vapor saturado se requiere para suplir con 92,000 BTU/ hr de calor al tubo cuya superficie está a 200⁰ F?

Solución

T_d no se conoce, por lo que se requiere iniciar con una aproximación de temperatura a la cual se pueda determinar las variables. Esta es 200⁰ F:

$$\Delta \hat{H}_{vap} = 978 \text{ BTU/lb}$$

$$k = 0.393 \text{ BTU/hr ft } ^0\text{F}$$

$$\rho = 60.1 \text{ lb/ft}^3$$

$$\mu = 0.738 \text{ lb/ft hr}$$

De acuerdo a la ecuación

$$R_e = \frac{\Gamma}{\mu} = \frac{\frac{Q_i}{\pi D}}{\mu \Delta \hat{H}_{vap}} = \frac{92,000}{\pi (\frac{2}{12})(0.738)(978)} = 244 \text{ correspondiente a flujo laminar.}$$

$$\left[\frac{L \Delta T}{\mu \Delta \hat{H}_{vap}} \right] \left[\frac{k^3 \rho^2 g}{\mu^2} \right]^{1/3} = 1.1 R_e^{4/3} = 1700 \quad \text{de donde podemos despejar } \Delta T:$$

$$\Delta T = \frac{1700(978)}{(0.393)(10)} \left[\frac{(4.17 \times 10^8)(0.738)^5}{(60.1)^2} \right]^{1/3} = 22^0 F \quad \text{por lo que } T_d = 222^0 F.$$

Evaluando las propiedades a esta temperatura, se obtiene 220⁰ F.

Tarea 8

1. Coeficientes promedio de transferencia de calor. (Problema 14A.1. Bird et al.)

10,000 lbm/hr de un aceite con capacidad calorífica de 0.6 Btu/lbm F se calientan de 100⁰ F a 200⁰ F en un intercambiador de calor. El aceite fluye a través de tubos de cobre de diámetro exterior de 1 in con grosor de pared de 0.065 in. La longitud combinada de los tubos es 300 ft. El calor requerido se obtiene de la condensación de vapor saturado a 15 psia en el exterior de los tubos. Calcular h_l , h_a y h_{ln} para el aceite, suponiendo que las superficies interiores de los tubos están a la temperatura de saturación del vapor, 213⁰ F.

Respuestas: 78, 139, 190 Btu/hr ft² F.

2. Transferencia de calor en flujo laminar en un tubo. (Problema 14A.2. Bird et al.)

100 lbm/hr de aceite a 100⁰ F fluyen a través de un tubo de cobre de diámetro interior de 1 in y 20 ft de largo. La superficie interior del tubo se mantiene a 215⁰ F por condensación de vapor en su superficie exterior. Se supone flujo desarrollado y las propiedades físicas del aceite se pueden considerar constantes con los valores siguientes: densidad = 55 lbm/ft³, capacidad calorífica = 0.49 Btu/lbm°F, viscosidad = 1.42 lbm/hr ft, conductividad térmica = 0.0825 Btu/hr ft °F.

- (a) Calcular Pr.
- (b) Calcular Re.
- (c) Calcular la temperatura de salida del aceite.

Respuestas:

- (a) 8.44
- (b) 1075.
- (c) 155⁰ F.

Tarea 9

1. Transferencia de calor en condensación de vapores. (Problema 14A.5. Bird et al.)

La superficie exterior de un tubo vertical de 1 in de diámetro exterior y 1 ft de longitud se mantiene a 190°F . Si el tubo está rodeado por vapor saturado a 1 atm de presión, ¿cuál será el flujo total de transferencia de calor a través de la pared del tubo?

Respuestas.

8,400 Btu/hr.

2. Pérdida de calor por convección natural en un tubo horizontal que se encuentra dentro de un líquido. (Problema 14A.8. Bird et al.)

Calcular la pérdida de calor por convección natural y por unidad de longitud de un tubo horizontal de 6 in de diámetro exterior, si la temperatura en la superficie exterior es 100°F y la temperatura del agua que lo rodea es de 80°F . Comparar el resultado con el obtenido en el ejemplo 5.3, en donde el aire es el medio que rodea al tubo. Las propiedades del agua a la temperatura de película de 90°F (o 32.3°C) son: viscosidad = 0.7538 cp, capacidad calorífica = 0.9986 cal/g C y la conductividad térmica = 0.363 Btu/hr ft F. También la densidad del agua alrededor de 90°F es:

T (C)	30.3	31.3	32.3	33.3	34.3
ρ (g/cm ³)	0.99558	0.99528	0.99496	0.99463	0.99430

Respuesta:

$Q/L = 1930 \text{ Btu/hr ft.}$

Capítulo 6

Balances Integrales

6. 1. Balance Integral de Energía a Régimen Permanente.

A partir de la ecuación 1.37 (balance diferencial de energía) tenemos:

$$\rho \hat{C}_p (\underline{v} \cdot \nabla T) = -\nabla \cdot \underline{q} + \underline{\tau} : \underline{D}$$

Integrando en el volumen del elemento material del fluido:

$$\rho \hat{C}_p \iiint \underline{v} \cdot \nabla (T - T_0) dV = - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV + \iiint \underline{\tau} : \underline{D} dV \quad (6.1)$$

donde T_0 es una temperatura de referencia. La ecuación 1.17 expresa que:

$$\iiint (\underline{D} : \underline{\tau}_{tot}) dV = W - \iiint \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\tau}_{tot}) dV \quad (6.2)$$

Ahora, por el balance de momentum lineal:

$$\iiint (\underline{D} : \underline{\tau}_{tot}) dV = W - \iiint \underline{v} \cdot \left(\rho \frac{d\underline{v}}{dt} - \rho \underline{g} \right) dV = W - \iiint (\rho \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}) - \rho \underline{v} \cdot \underline{g}) dV$$

Substituyendo la ecuación anterior en 6.2 obtenemos:

$$\rho \hat{C}_p \iiint \underline{v} \cdot \nabla (T - T_0) dV = - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV + W - \iiint (\rho \underline{v} \cdot \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} - \rho \underline{v} \cdot \underline{g}) dV$$

$$\rho \hat{C}_p \iiint \underline{v} \cdot \nabla (T - T_0) dV = - \iiint \nabla \cdot \underline{q} dV + W - \iiint (\rho \underline{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dV + \iiint \rho (\underline{v} \cdot \underline{g}) dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia, y considerando que $\underline{g} = -\nabla \phi$, obtenemos:

$$\rho \hat{C}_p \iint (T - T_0) \underline{v} \cdot \underline{n} dS = - \iint \underline{q} \cdot \underline{n} dS + W - \iint \rho \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \underline{v} \cdot \underline{n} dS - \iint \rho \phi \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

Si $T = \bar{T}$ no es función de dS :

$$\rho \hat{C}_p Q_{vol} (\bar{T} - T_0) + Q - W + \frac{1}{2} \rho \Delta \langle v^3 \rangle S + \Delta (\rho \phi \langle v \rangle S) = 0 \quad (6.3)$$

Dividiendo entre el flujo másico:

$$\Delta\hat{H} + \frac{1}{2}\Delta\langle v \rangle^2 + g\Delta h = -\hat{Q} + \hat{W} \quad (6.4)$$

donde se ha considerado flujo turbulento ($\langle v^3 \rangle / \langle v \rangle = \langle v \rangle^2$)

Q es el calor añadido al sistema a través de su frontera y W es el trabajo realizado por los alrededores del sistema (fronteras móviles) sobre el sistema. En muchas ocasiones, la energía térmica predomina, en cuyo caso la ecuación 6.4 se reduce a:

$$\Delta\hat{H} = -\hat{Q} \quad (6.5)$$

El balance de energía mecánica para sistemas no isotérmicos a régimen permanente es:

$$\frac{1}{2}\Delta\langle v \rangle^2 + g\Delta h + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \hat{E}_v = \hat{W} \quad (6.6)$$

6. 1.1. Formas diferenciales de las ecuaciones 6.4 y 6.6:

Estas se usan cuando Q y E_v no pueden ser aplicadas en toda la longitud del sistema.

$$\hat{d}H + vdv + gdh = -\hat{d}Q + dW \quad (6.7)$$

Equivalentemente:

$$C_p dT + vdv + gdh = \frac{U_{loc} \Delta T dA}{w} + dW \quad (6.8)$$

U_{loc} es el coeficiente local global de transferencia de calor, y w es el gasto másico. La ecuación 6.6 en forma diferencial es:

$$vdv + gdh + \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 de_v = dW \quad (6.9)$$

$$\text{donde } de_v = \frac{f}{R_h} dL$$

R_h es el radio hidráulico y f el factor de fricción, función del número de Reynolds.

6. 1.2. Casos especiales.

a) Sistemas isotérmicos para gases ideales:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{RT}{M} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \frac{RT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (6.10)$$

b) Sistemas adiabáticos: $\frac{p^{1/\gamma}}{\rho} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dp}{\rho} &= \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p^{1/\gamma}} = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \left[p^{-1/\gamma+1} \right]_{p_1}^{p_2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}} \right) = \frac{p_1^{1/\gamma}}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} [p_2^{1-\frac{1}{\gamma}} - p_1^{1-\frac{1}{\gamma}}] = \\ &= \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

6. 2. Flujo de gases ideales en ductos horizontales de sección constante.

A partir de las ecuaciones 6.7 y 6.9:

$$d\hat{H} + v dv = -d\hat{Q} \quad (6.12)$$

$$v dv + \hat{V} dp + \frac{1}{2} v^2 d\epsilon_v = 0 \quad (6.13)$$

6. 2.1. Flujo Adiabático.

Primeramente, se buscará una expresión para $d\hat{H}$ en función de $\hat{p}V$ cuando $d\hat{Q} = 0$. Partimos de la expresión de la entalpía:

$$\begin{aligned} d\hat{H} &= C_p dT = \frac{C_p}{R} d(\hat{p}V) = \frac{\gamma}{\gamma-1} d(\hat{p}V) \quad \text{Substituyendo en la ecuación 6.12 obtenemos:} \\ d(\hat{p}V) + \frac{\gamma-1}{\gamma} v dv &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

La ecuación **6.13** se puede expresar alternativamente:

$$v dv + d(p\hat{V}) - p\hat{V}\left(\frac{dV}{V}\right) + \frac{1}{2}v^2 de_v = 0 \quad (6.15)$$

Integrando 6.14:

$$(p\hat{V}) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}v^2\right) = C = (p_1\hat{V}_1) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}v_1^2\right) \quad (6.16)$$

donde la constante C se evalúa a las condiciones de la entrada. Por el balance integral de masa:

$$\rho v = \frac{v}{V} = \rho_1 v_1 \quad \rightarrow \quad dv = \rho_1 v_1 d\hat{V} \quad \rightarrow \quad dv = \frac{v}{V} d\hat{V} \quad (6.17)$$

Substituyendo **6.14**, **6.16** y **6.17** en la ecuación **6.15** obtenemos:

$$v dv - \frac{\gamma-1}{\gamma} v dv - \frac{dv}{v} [p_1\hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}v_1^2\right)] + \frac{dv}{v} \left[\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{1}{2}v^2\right] + \frac{1}{2}v^2 de_v = 0$$

Dividiendo entre $v^2/2$:

$$2 \frac{dv}{v} \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} + \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\gamma-1}{\gamma}\right] - \frac{2dv}{v^3} [p_1\hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}v_1^2\right)] + de_v = 0$$

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) \frac{dv}{v} - 2 [p_1\hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{2}v_1^2\right)] \frac{dv}{v^3} + de_v = 0 \quad (6.18)$$

Para obtener una expresión que relacione $p_1\hat{V}_1$ con $p_2\hat{V}_2$, es necesario integrar las ecuaciones **6.14** y **6.18** entre los puntos 1 (entrada) y 2 (salida).

Integrando la ecuación **6.18** obtenemos:

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) \ln \frac{v_2}{v_1} - [2p_1\hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)(v_1^2)] \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{v_2^2} - \frac{1}{v_1^2}\right) + e_v = 0 \quad (6.19)$$

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) \ln \frac{v_2}{v_1} + \frac{p_1\hat{V}_1}{v_1^2} \left[\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1\right] + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \left[\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1\right] + e_v = 0$$

$$\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) \ln \frac{v_2}{v_1} + \left[\frac{v_1^2}{v_2^2} - 1\right] \left[\frac{p_1\hat{V}_1}{v_1^2} + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right] + e_v = 0 \quad (6.20)$$

Definiendo la velocidad másica $G = v_1/\hat{V}_1$ y $s = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2$

$$-\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right) \ln \frac{v_1}{v_2} + \left[\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1\right] \left[\frac{p_1}{Gv_1} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right] + e_v = 0 \quad (6.21)$$

$$-\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s + [s - 1] \left[\frac{p_1/\hat{V}_1}{G^2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right] + e_v = 0 \quad \rightarrow$$

$$\left[\frac{p_1\hat{V}_1}{G^2}\right] = \frac{e_v - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s}{1-s} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \quad \rightarrow \quad G^2 = \frac{p_1\rho_1(1-s)}{e_v - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s - (1-s)\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (6.22)$$

Ahora, integrando la ecuación **6.14** obtenemos:

$$(p_2 \hat{V}_2 - p_1 \hat{V}_1) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} (v_2^2 - v_1^2) = 0$$

$$\frac{p_1 p_2}{p_1} \hat{V}_2 - p_1 \hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1\right) = 0$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{p_1 \hat{V}_2} [p_1 \hat{V}_1 + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) G^2 V_1^2 \left(1 - \frac{1}{s}\right)] = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) \frac{G^2}{p_1 \rho_1} \left(1 - \frac{1}{s}\right)\right] \quad (6.23)$$

Las ecuaciones 6.22 y 6.23 describen las relaciones entre la velocidad másica G y la presión de salida P_2 .

6.2.2. Flujo Isotérmico.

En el caso de flujo isotérmico, la ecuación **6.18** se simplifica para $\gamma = 1$, obteniendo:

$$2 \frac{dv}{v} - 2 \frac{RT}{M} \frac{dv}{v^3} + de_v = 0 \quad (6.24)$$

Igualmente, la ecuación **6.23** se simplifica: $\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ y la ecuación **6.22** nos da la expresión del flujo másico isotérmico:

$$G^2 = \frac{p_1 \rho_1 (1-s)}{e_v - \ln s} \quad (6.25)$$

Por la ley de los gases ideales, $P = \frac{\rho RT}{M}$, $s = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$ y la ecuación **6.25** se reduce a:

$$e_v - 2 \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1 \rho_1}{G^2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1\right] = 0 \quad \text{donde} \quad e_v = 4fL/D \quad (6.26)$$

Como $\frac{p_1 \rho_1}{G^2} = \frac{\rho_1^2 RT/M}{\rho_1^2 v_1^2} = \frac{RT}{M v_1^2}$ luego entonces:

$$\frac{2fL}{D} - \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{RT}{2M v_1^2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1\right] = 0 \quad (6.27)$$

6. 2.3. Optimización del flujo másico. Flujo adiabático.

El proceso de encontrar la máxima G dada la presión crítica P_c involucra a la derivada de G con respecto a s en la ecuación 6.22:

$$\frac{dG^2}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{p_1 \rho_1 (1-s)}{e_v - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s - (1-s) \frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] = 0 \quad (6.28)$$

$$[e_v - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s - (1-s) \frac{\gamma-1}{2\gamma}] [-p_1 \rho_1] + [p_1 \rho_1] (1-s) \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{1}{s}\right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right] = 0$$

$$e_v - \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \ln s - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{1}{s}\right) + \frac{\gamma+1}{2\gamma} = 0$$

$$e_v = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) [\ln s + \left(\frac{1}{s}\right) - 1] \quad (6.29)$$

Substituyendo la ecuación 6.29 en la 6.22 obtenemos:

$$G_{max}^2 = \frac{p_1 \rho_1 (1-s)}{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \left(\left(\frac{1}{s}\right) - 1\right) - (1-s) \frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{p_1 \rho_1 (1-s)(2\gamma s)}{(\gamma+1)(1-s) - (1-s)s(\gamma-1)} = \frac{p_1 \rho_1 (2\gamma s)}{(\gamma+1) - s(\gamma-1)} \quad (6.30)$$

Substituyendo la ecuación 6.30 en la 6.23 obtenemos la presión crítica correspondiente a G_{max} :

$$\frac{p_c}{p_1} = \frac{\rho_c}{\rho_1} \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) \frac{G^2}{p_1 \rho_1} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \right] = \frac{\rho_c}{\rho_1} \left[1 + \frac{(s-1)(\gamma-1)}{(\gamma+1) - s(\gamma-1)} \right] = \frac{2\sqrt{s}}{(\gamma+1) - s(\gamma-1)} \quad (6.31)$$

A partir de las ecuaciones 6.30 y 6.31 podemos encontrar una relación directa entre G_{max} y p_c :

$$G_{max}^2 = \frac{p_1 \rho_1 (2\gamma s)}{2\sqrt{s}} \frac{p_c}{p_1} = p_c \rho_1 \gamma \sqrt{s} = \gamma p_c \rho_c \quad (6.32)$$

A las condiciones críticas, $G_{max}^2 = \rho_c^2 v_c^2 = \gamma p_c \rho_c$

$$v_c^2 = \gamma p_c / \rho_c = v_s^2 \quad (\text{velocidad del sonido}) \quad (6.33)$$

6. 2.4. Optimización de flujo másico. Flujo Isotérmico.

En este caso: $s = \left(\frac{\rho_c}{\rho_1}\right)^2 = \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^2$

La ecuación 6.30 se simplifica a:

$$G_{max}^2 = p_1 \rho_1 s = \frac{\rho_1}{p_1} p_c^2 = \frac{M}{RT} p_c^2 = p_c \rho_c \quad (6.34)$$

que corresponde a la ecuación 6.32 para $\gamma = 1$.

6. 3. Flujo de gases ideales. Procesos adiabáticos sin fricción.

Estos procesos involucran la acción de compresores, toberas, descargas de tanques a presión, en donde no hay cambios de energía potencial. Considerando las ecuaciones 6.6 y 6.11, el balance de energía para procesos adiabáticos sin fricción se reduce a:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = \hat{W} \quad (6.35)$$

6. 3.1. Compresores.

En el caso de compresores que trabajen adiabáticamente, la ecuación 6.35 se utiliza para calcular la energía requerida por el compresor. El primer término puede ser función de las densidades a la entrada y salida, por medio del balance de masa $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$. Luego:

$$\frac{v_1^2}{2} \left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} - 1 \right) + \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = \hat{W} \quad (6.36)$$

Normalmente, el primer término resulta mucho menor que el segundo término de la ecuación.

6. 3.2. Toberas y tanques de presión.

En este caso existe un cambio considerable de presiones a través de una contracción, en donde la velocidad inicial es cero ($v_1 = 0$). La ecuación 6.35 se reduce a:

$$\frac{1}{2} v_2^2 + \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = 0 \quad (6.37)$$

6. 3.3. Medidores de flujo (Tubo Venturi).

El balance de masa toma en cuenta las condiciones a la entrada (1) y en la contracción misma (2), donde s_1 y s_2 son las áreas de la entrada y contracción, respectivamente.

$w = \rho_1 v_1 s_1 = \rho_2 v_2 s_2$ la ecuación 6.35 se reduce a:

$$v_2^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}\right) = v_2^2 \left(1 - \left(\frac{\rho_2 s_2}{\rho_1 s_1}\right)^2\right) = 2 \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] \quad (6.38)$$

Como en un proceso adiabático $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$, el flujo másico se puede calcular:

$$w = \rho_2 s_2 \left[\frac{2 \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]}{1 - \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{2/\gamma}} \right]^{1/2} \quad (6.39)$$

6. 3.4. Optimización del flujo másico.

El flujo másico es producto de la velocidad másica y la sección: $w = G s$. Para encontrar la presión crítica a la cual se optimiza G , o se minimiza s , se busca el máximo de w :

$$\frac{dw}{dp} = s \frac{dG}{dp} + G \frac{ds}{dp} = 0 \quad (6.40)$$

De acuerdo con la ecuación 6.37,

$$G = \rho v = \rho \left[2 \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]^{1/2} \quad (6.41)$$

En un proceso adiabático $\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/\gamma}$ y substituyendo en la ecuación 6.41:

$$G = \left\{ p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} = \left[p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right) \right]^{1/2} \left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}+1} \right]^{1/2} \quad (6.42)$$

$$\frac{dG}{dp} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\gamma} \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}-1} - \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \quad \text{de donde se obtiene:}$$

$$\left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}-1} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{\gamma+1}{2}$$

$$\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \quad (6.43)$$

La velocidad másica máxima se calcula substituyendo la ecuación 6.43 en la 6.42:

$$\begin{aligned}
 G_{max} &= [p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}} - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}] = \\
 &= [p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}] = [p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{2}}] \\
 G_{max} &= [p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2}{1-\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}] = [p_1 \rho_1 \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}] \quad (6.44)
 \end{aligned}$$

La velocidad crítica se calcula con las ecuaciones 6.37 y 6.43:

$$v_c^2 = \frac{2p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \frac{2p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right) = \frac{2p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma+1} \quad (6.45)$$

$$\frac{p_c}{p_1} = \left(\frac{\rho_c}{\rho_1}\right)^\gamma \rightarrow \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_c}{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_c}\right)^\gamma = \frac{p_c}{\rho_c} \left(\frac{\rho_1}{\rho_c}\right)^{\gamma-1} \quad \text{Por medio de la ecuación 6.43:}$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \rightarrow \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_c}{\rho_c} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \quad \text{y por medio de la ecuación 6.45 obtenemos:}$$

$$v_c^2 = \frac{p_c}{\rho_c} \gamma = v_s^2 \quad (\text{velocidad del sonido}) \quad (6.46)$$

6. 4. Ejemplos.

6. 4.1. Ejemplo 6.1.

Mezcla de corrientes de gases ideales.

Dos corrientes a régimen turbulento del mismo gas que fluyen a diferentes velocidades, temperaturas y presiones se mezclan, como se describe en la figura 6.1. Calcular la velocidad, temperatura y presión de la mezcla de fluidos, bajo régimen adiabático sin fricción.

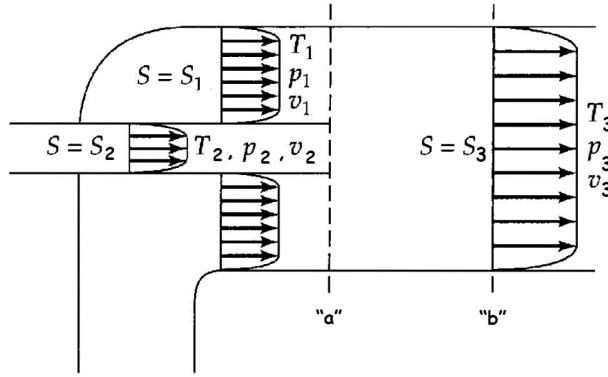


Figura 6.1. Mezcla de dos corrientes turbulentas de gases ideales.

Se aplicará el balance de masa, momentum y energía entre los puntos a y b.

Masa: $w_3 = w_1 + w_2$ (6.47)

Momentum: $w_3 v_3 + p_3 S_3 = w_1 v_1 + p_1 S_1 + w_2 v_2 + p_2 S_2$ (6.48)

Energía: $w_3 [\hat{C}_p(T_3 - T_0) + \frac{1}{2} v_3^2] = w_1 [\hat{C}_p(T_1 - T_0) + \frac{1}{2} v_1^2] + w_2 [\hat{C}_p(T_2 - T_0) + \frac{1}{2} v_2^2]$ (6.49)

Ecuación de estado: $p_3 = \frac{\rho_3 R T_3}{M}$ (6.50)

Las corrientes 1 y 2 son conocidas. Sean w, P y E, tal que:

$w_3 = \rho_3 v_3 S_3 = w$ (6.51)

$w_3 v_3 + p_3 S_3 = P$ (6.52)

Multiplicando la ecuación 6.47 por $\hat{C}_p(T_0)$ y restando el resultado de 6.49 obtenemos:

$w_3 [\hat{C}_p(T_3) + \frac{1}{2} v_3^2] = E$ (6.53)

Son 4 ecuaciones: 6.50-6.53 y 4 incógnitas p_3, ρ_3, T_3 y v_3 . De las ecuaciones 6.50 y 6.52

$v_3 = \frac{P}{w} - \frac{p_3 S_3}{w} = \frac{P}{w} - \frac{\rho_3 R T_3}{M} \left[\frac{S_3}{\rho_3 v_3 S_3} \right] = \frac{P}{w} - \frac{R T_3}{M v_3}$ (6.54)

Despejando T_3 de 6.53, substituyendo en la ecuación 6.54:

$v_3 = \frac{P}{w} - \frac{R}{M v_3} \left[\frac{E}{w \hat{C}_p} - \frac{1}{2} \frac{v_3^2}{\hat{C}_p} \right] \rightarrow v_3 = \frac{P}{w} - \frac{R}{M v_3} \frac{E}{w \hat{C}_p} + \frac{R}{2 M v_3} \frac{v_3^2}{\hat{C}_p} \rightarrow$

$v_3^2 = \frac{P}{w} v_3 - \frac{R}{M} \frac{E}{w \hat{C}_p} + \frac{R}{2 M} \frac{v_3^2}{\hat{C}_p} \rightarrow v_3^2 \left(1 - \frac{R}{2 M} \frac{1}{\hat{C}_p} \right) = \frac{P}{w} v_3 - \frac{R}{M} \frac{E}{w \hat{C}_p} \rightarrow$

Como $\frac{R}{M} \frac{1}{\hat{C}_p} = \frac{R}{\hat{C}_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rightarrow v_3^2 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2 \gamma} \right) = \frac{P}{w} v_3 - \frac{E}{w} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)$

$v_3^2 - v_3 \left[\frac{P}{w} \left(\frac{2 \gamma}{\gamma + 1} \right) \right] + \frac{2 E}{w} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) = 0$ (6.55)

Ecuación cuadrática cuya solución es:

$$v_3 = \frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{P}{w} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \right) \right]^2 - 4 \frac{wE}{w} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \right\}^{1/2} \rightarrow v_3 = \frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \pm \frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left[1 - 2 \frac{wE}{P^2} \left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$v_3 = \frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left[1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{wE}{P^2} \left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \right)} \right] \quad (6.56)$$

Sea $\frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) = v_c$ una velocidad crítica. Substituyendo este valor en la ecuación 6.54:

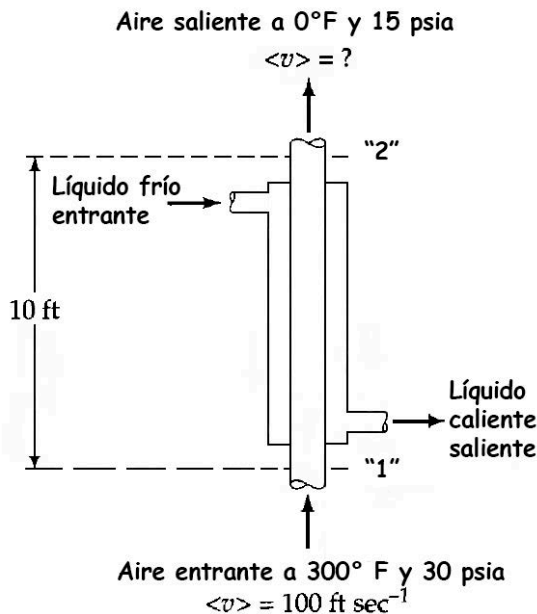
$$\frac{P}{w} \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) = \frac{P}{w} - \frac{RT_3}{Mv_c} \rightarrow \frac{P}{w} \left(\frac{-1}{\gamma+1} \right) = -\frac{RT_3}{Mv_c} \rightarrow \frac{v_c}{\gamma} = \frac{RT_3}{Mv_c} \text{ luego entonces:}$$

$v_c = \sqrt{\frac{\gamma RT_3}{M}}$ y por lo tanto $v_c = v_s$ (velocidad del sonido). Substituyendo en la ecuación 6.56 obtenemos:

$$v_3 = v_s \left[1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{wE}{P^2} \left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \right)} \right] \quad (6.57)$$

La ecuación 6.57 muestra que cuando la cantidad del radical es cero, la velocidad de la corriente 3 es sónica. Si el radical es mayor a cero, tendremos dos raíces: una velocidad supersónica y otra subsónica. La supersónica es inestable a perturbaciones externas. Conociendo v_3 , es posible conocer p_3, ρ_3, T_3 .

6. 4.2. Ejemplo 6.2. Columna de enfriamiento.



200 lb/hr de aire seco entran a una columna de enfriamiento a 300°F y 30 psia, a una velocidad de 100 ft/s. El aire sale a 0°F y 15 psia. La altura de la columna es de 10 ft.

Calcular la velocidad de remoción de energía a través de la pared del tubo, suponiendo comportamiento de gas ideal y flujo turbulento, en donde el $\hat{C}_p$ (BTU/lbmol °R) está dado por: $\hat{C}_p = a + bT - cT^2$, $a = 6.39$, $b = 9.8 \times 10^{-4}$, $c = -8.18 \times 10^{-8}$

Figura 6.2. Columna de enfriamiento de gases.

Solución

$$\Delta\hat{H} + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g\Delta h = \hat{Q} \quad (6.58)$$

$$\text{Balance de masa: } \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (6.59)$$

$$\text{Ley de los gases: } p = \rho RT/M \quad (6.60)$$

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{RT_1}, \quad \rho_2 = \frac{p_2 M}{RT_2}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2 T_1}{T_2 p_1}$$

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1\right) = \frac{1}{2}v_1^2 \left[\left(\frac{p_1 T_2}{T_1 p_2}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}10^4 \left[\left(\frac{30}{15} \frac{460}{760}\right)^2 - 1\right] = 2,320 \frac{ft^2}{s^2}$$

$$\Delta\hat{H} = \frac{1}{M} \int_{T_1}^{T_2} \hat{C}_p dT = \frac{1}{29} \left[a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) - \frac{c}{3}(T_2^3 - T_1^3) \right] = 72 \frac{BTU}{lb}$$

$$g\Delta h = 32.2 \times 10 = 322 \frac{ft^2}{s^2}$$

$$\text{Factor de conversión: } 1 \overleftrightarrow{lbft} = 32.2 lb \frac{ft^2}{s^2}$$

$$\text{Equivalente mecánico del calor: } 1 \frac{BTU}{lb} = 778 \frac{\overleftrightarrow{lbft}}{lb} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$1 \frac{BTU}{lb} = 778 \times 32.2 \frac{ft^2}{s^2}$$

Las contribuciones de las energías son:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0.1 BTU/lb$$

$$g\Delta h = 0.013 BTU/lb$$

$$\Delta\hat{H} = 72 BTU/lb$$

Lo que indica que la energía térmica es preponderante. De la

$$\text{ecuación 6.58 calculamos } \Delta\hat{H} = \hat{Q} \rightarrow Q = w\Delta\hat{H} = 72 \frac{BTU}{lb} \times \frac{200 lb}{hr} = 14,400 \frac{BTU}{hr}$$

6. 4.3. Ejemplo 6.3. Intercambiador de calor.

Dos corrientes se enfrían y calientan simultáneamente. Los gastos másicos y capacidades

caloríficas de las corrientes son diferentes. Se requiere evaluar el desempeño del intercambiador en base a los coeficientes de transferencia y a la resistencia térmica de la pared del tubo.

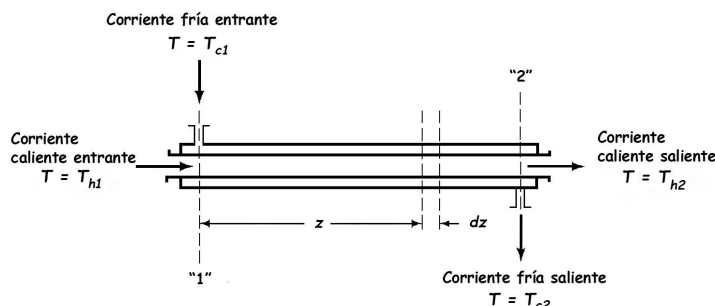


Figura 6.3 Intercambiador de calor.

Balance global de energía (ecuación 6.5): $w\Delta H = -Q$, en donde son pequeñas las contribuciones de energía cínica. Este se puede expresar para las dos corrientes (caliente y fría):

$$w_h \hat{C}_{p_h} (T_{h2} - T_{h1}) = Q_h \quad (6.61)$$

$$w_c \hat{C}_{p_c} (T_{c2} - T_{c1}) = Q_c = -Q_h \quad (6.62)$$

Puesto que existe intercambio de calor simultáneo a cada Δz , utilizamos el balance diferencial (ecuación 6.8):

$$\hat{C}_{p_h} dT_h = \frac{U_0(T_c - T_h)\pi D}{w_h} dz \quad (6.63)$$

$$-\hat{C}_{p_c} dT_c = \frac{U_0(T_c - T_h)\pi D}{w_c} dz \quad (6.64)$$

Sumando las ecuaciones 6.63 y 6.64:

$$-\frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = \left[\frac{1}{w_h \hat{C}_{p_h}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{p_c}} \right] U_0 \pi D dz \quad \text{integrando:}$$

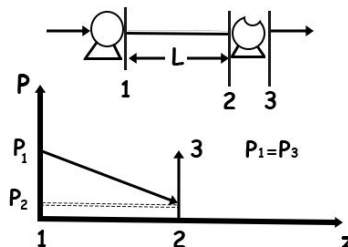
$$\ln \frac{T_{h1} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{c2}} = \left[\frac{1}{w_h \hat{C}_{p_h}} + \frac{1}{w_c \hat{C}_{p_c}} \right] U_0 \pi D L \quad (6.65)$$

Substituyendo las ecuaciones 6.61 y 6.62 en la ecuación 6.65 obtenemos:

$$\ln \frac{T_{h1} - T_{c1}}{T_{h2} - T_{c2}} = \left[\frac{T_{h2} - T_{h1}}{-Q_c} + \frac{T_{c2} - T_{c1}}{Q_c} \right] U_0 \pi D L \quad \text{de donde despejamos } Q_c:$$

$$Q_c = \frac{(T_{h2} - T_{c2}) - (T_{h1} - T_{c1})}{\ln \frac{T_{h2} - T_{c2}}{T_{h1} - T_{c1}}} U_0 \pi D L = U_0 A_0 \Delta T_{ln} \quad (6.66)$$

6. 4.4. Ejemplo 6.4. Gaseoducto con estaciones de bombeo.



Se bombea metano a través de un ducto de diámetro 2 ft con una presión inicial de 100 psia y velocidad de 40 ft/s a 70⁰ F. Las estaciones de bombeo están separadas cada 10 millas. La presión en el punto 3 se reestablece a 100 psia. Suponer gas ideal, ducto horizontal y flujo turbulento. Calcular la potencia de los compresores.

Figura 6.4. Gaseoducto con estaciones de compresión.

Se considera un compresor adiabático y un gaseoducto isotérmico. En el compresor se utiliza la ecuación 6.35 y en el gaseoducto la 6.27. En ambas, los términos de energía cinética son muy pequeños y despreciables. En el compresor, el cálculo de la potencia requiere de la presión en el punto 2, la cual puede ser calculada con el balance en el gaseoducto.

$$\frac{p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] = \hat{W} \quad (6.67)$$

$$\frac{2fL}{D} + \frac{RT}{2Mv_1^2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (6.68)$$

Gaseoducto. Cálculo del número de Reynolds, factor de fricción, gasto másico en el punto 1:

Metano: $\frac{\mu}{\rho} = \nu \Big|_{T=70^\circ F}^{p=100 \text{ } \overline{\text{lb}}/\text{in}^2} = 2.6 \times 10^{-5} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}}, \quad \gamma = 1.3, \quad M = 16 \text{ lb}/\text{lbmol}$

$$Re = \frac{\rho D v_1}{\mu} = \frac{2 \times 40}{2.6 \times 10^{-5}} = 3 \times 10^6 \rightarrow f = 0.0025$$

$$w = \rho_1 v_1 S = \frac{p_1 M}{RT} v_1 S, \quad \text{donde } R = 10.73 \frac{\text{psi ft}^3}{\text{lb mol } ^\circ R} \rightarrow w = \frac{100 \times 16}{10.73 \times 530} 40 \times \frac{\pi}{4} D^2 = 35.35 \text{ lb/s}$$

Para la ecuación 6.68: $R = 1545 \frac{\overline{\text{lb ft}}}{\text{lb mol } ^\circ R} \quad y \quad 1 \frac{\overline{\text{lb ft}}}{\text{lb}} = 32.2 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2}$

$$\frac{RT}{2Mv_1^2} = \frac{1545 \times 32.2 \times 530}{2 \times 16 \times 40^2} = 515 \rightarrow \frac{2 \times 0.0025 \times 52,800}{2} + 515 \left[\left(\frac{p_2}{100} \right)^2 - 1 \right] \rightarrow p_2 = 86 \frac{\overline{\text{lb}}}{\text{in}^2}$$

La ecuación 6.67 define que la presión en el punto 3 es igual a la presión en el punto 1. A su vez,

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{RT_1}{M} = \frac{1545 \times 530}{16} \rightarrow \hat{W} = \frac{1545 \times 530}{16} \frac{1.3}{0.3} \left[\left(\frac{100}{86} \right)^{0.3/1.3} - 1 \right] = 7834 \frac{\overline{\text{lb ft}}}{\text{lb}}$$

$$W = w \hat{W} = 35.35 \times 7834 = 277,000 \frac{\overline{\text{lb ft}}}{\text{s}} \quad \text{Conversión a HP: } 1 \text{ HP} = 550 \frac{\overline{\text{lb ft}}}{\text{s}}$$

$$W = 500 \text{ } \overrightarrow{\text{HP}}$$

6. 4.5. Ejemplo 6.5. Calentador a base de vapor.

Se calienta aire de 700 F a 1700 F en un calentador que tiene 36 ft de largo y 1 in de diámetro. El gasto másico es de 1000 lb/ hr y la presión a la entrada de es 20 psi. Calcular la rapidez de transferencia de calor al aire y la fricción del aire.

Datos:

$$p_1 = 34.7 \text{ psia}, T_1 = 70^\circ F, T_2 = 170^\circ F, \hat{C}_p = 7.1 \frac{\text{BTU}}{\text{lb mol } ^\circ F}, \mu = \frac{0.046 \text{ lb}}{\text{hr ft}} \quad y \quad s = 0.006 \text{ ft}^2$$

Solución

Por el balance de masa y la ley de los gases se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$v_1 = \frac{w}{\rho_1 s} = \frac{w}{s} \frac{RT_1}{p_1 M} \quad (6.69)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \quad (6.70)$$

La ecuación 6.4 proporciona la rapidez de transferencia de calor al aire:

$$\hat{C}_p(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \hat{Q} \quad (6.71)$$

y la ecuación 6.6 permite calcular las pérdidas por fricción:

$$\frac{1}{2}\Delta\langle v \rangle^2 + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \hat{E}_v = 0 \quad \text{Finalmente, consideraremos que el calentador es un ducto horizontal de sección constante isotérmico, por lo que aplica la ecuación 6.27 a una temperatura promedio } \bar{T} = \frac{1}{2}(T_2 + T_1):$$

$$\frac{2fL}{D} - \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{R\bar{T}}{2Mv_1^2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (6.72)$$

Por lo tanto, la ecuación 6.6 se aplica a un proceso isotérmico con temperatura $\bar{T}$:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{R\bar{T}}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} + \hat{E}_v = 0 \quad (6.73)$$

Luego entonces, a partir de la ecuación 6.72 se puede calcular p_2 , por la ecuación 6.70 se calcula v_2 , la ecuación 6.71 determina $\hat{Q}$ y la ecuación 6.73 permite evaluar $\hat{E}_v$.

$$v_1 = \frac{w}{s} \frac{RT_1}{p_1 M} = \frac{1000}{3600} \times \frac{10.73}{34.7} \times \frac{530}{0.006} \times \frac{1}{29} = 261 \frac{ft}{s}, \quad \text{donde } R = 10.73 \text{ psia } ft^3 / lbmol^0 R$$

$$Re = \frac{wD}{s\mu} = \frac{1000 \times (\frac{1}{12})}{0.006 \times 0.046} = 300,000 \rightarrow f = 0.0042 \quad \text{La ecuación 6.72:}$$

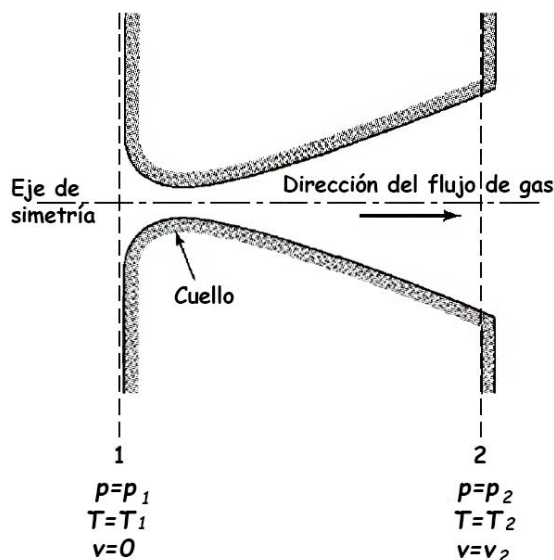
$$\frac{2 \times 0.0042 \times 36}{1/12} - \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{32.2 \times 1545 \times 580}{2 \times 29 \times 261^2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 - 1 \right] = 0 \text{ en donde } R = 1545 \frac{ft^3}{lbmol^0 R} \text{ y } 32.2 \frac{ft^2}{s^2} / \frac{lbft}{lb}$$

$$\text{Resolviendo: } \frac{p_2}{p_1} = 19/34.7 \rightarrow v_2 = 261 \frac{630}{530} \times \frac{34.7}{19} = 570 \text{ ft/s}$$

$$\hat{Q} = \frac{7.1}{29} (170 - 70) + \frac{1}{2} \left(\frac{570^2 - 261^2}{32.2 \times 778} \right) = 29.6 \frac{BTU}{lbmol} \rightarrow \hat{Q} = 29.6 \times 1000 = 29600 \frac{BTU}{hr}, \quad 1BTU = 778 \frac{lbft}{lb}$$

$$\hat{E}_v = \frac{1}{2} \left(\frac{570^2 - 261^2}{32.2 \times 778} \right) + \frac{1545 \times 580}{778 \times 29} \ln \frac{19}{34.7} = -19 \frac{BTU}{lb} \rightarrow E_v = -1000 \times 19 = 19,000 BTU/hr$$

6. 4.6. Ejemplo 6.6. Tobera adiabática.



Una tobera se alimenta con aire a 300 psia y 100° F. El área de la garganta es de 1 in². Calcular el flujo másico y la velocidad de descarga si:

- a)- La presión de descarga es 200 psia.
- b)- La presión de descarga es 100 psia.

Las propiedades del aire son:

$$\hat{C}_p = 7 \text{ BTU/lbmol}^0 R$$

$$\hat{C}_v = 5 \text{ BTU/lbmol}^0 R$$

$$M = 29 \text{ lb/lbmol}$$

$$\gamma = 1.4$$

Figura 6.5. Tobera convergente-divergente.

Solución

Primeramente, es necesario calcular la presión crítica de acuerdo a la ecuación 6.43.

$$p_c = p_1 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 300 \left(\frac{2}{2.4} \right)^{1.4/0.4} = 160 \text{ psia}$$

a)- Flujo subsónico ($200 > p_c$). A partir de las ecuaciones 6.42 y 6.37:

$$w = s [p_1 \rho_1 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right)]^{1/2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma+1}} \right]^{1/2} \quad (6.42)$$

$$v_2 = \left[\frac{p_1}{\rho_1} \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right]^{1/2} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]^{1/2} \quad (6.37)$$

b)- Flujo supersónico ($100 < p_c$). A partir de las ecuaciones a condiciones críticas (6.44 y 6.45)

$$w_c = s [p_1 \rho_1 \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}]^{\frac{1}{2}} \quad (6.44)$$

$$v_c = \left[\frac{2p_1}{\rho_1} \frac{\gamma}{\gamma+1} \right]^{1/2} \quad (6.45)$$

Realizando los cálculos:

$$\rho_1 = \frac{p_1 M}{RT_1} = \frac{29}{10.73} \times \frac{300}{560} = 1.45 \frac{lb}{ft^3} \text{ donde } R = 10.73 \text{ psia ft}^3 / \text{lbmol}^0 R$$

$$\sqrt{\rho_1 p_1} = [300 \times 144 \times 1.45 \times 32.2]^{1/2} = 1421 \frac{lb}{ft^2 s}. \quad \text{Se incluye el factor } 32.2 \frac{lb ft}{lb s^2}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{\rho_1}} = \left[\frac{300 \times 144 \times 32.2}{1.45} \right]^{1/2} = 980 \text{ ft/s}$$

Respuestas:

$$\text{a)- } w = 6.4 \frac{lb}{s}, \quad v_2 = 945 \text{ ft/s}$$

$$\text{b)- } w_c = 6.72 \frac{lb}{s}, \quad v_c = 1060 \text{ ft/s}$$

6. 4.7. Ejemplo 6.7. Tobera isotérmica.

En este caso, las ecuaciones 6.6 y 6.10 se combinan para obtener:

$$\frac{1}{2} v_2^2 + \frac{RT}{M} \ln \frac{p_2}{p_1} = 0 \quad (6.74)$$

La velocidad másica es:

$$G = \rho_2 v_2 = \frac{p_2 M}{RT} v_2 = \frac{p_2 M}{RT} \left[\frac{2RT}{M} \ln \frac{p_1}{p_2} \right]^{1/2} = p_2 \left[\frac{2M}{RT} \ln \frac{p_1}{p_2} \right]^{1/2} \quad (6.75)$$

Optimización de G :

$$\frac{dG}{dp_2} = \frac{d}{dp_2} \left\{ p_2 \left[\ln \frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \frac{p_c \left(-\frac{1}{p_c} \right)}{2 \left[\ln \frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{1}{2}}} + \left[\ln \frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{donde } p_c \text{ es la presión crítica. Luego:}$$

$$\frac{1}{2} = \ln \frac{p_1}{p_2} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = e^{1/2} \quad (6.76)$$

$$G_{max} = p_c \left[\frac{RT}{M} \right]^{-1/2} \quad (6.77)$$

La ecuación 6.77 concuerda con la ecuación 6.34 para flujos isotérmicos. La velocidad crítica se calcula con la ecuación 6.74 a la presión crítica:

$$v_c^2 = \frac{2RT}{M} \ln \frac{p_1}{p_c} = RT/M \quad (6.78)$$

que corresponde al resultado de la tobera adiabática con $\gamma = 1$ (ecuación 6.45).

Tarea 10

1. Flujo adiabático de un gaseoducto de gas natural. (Problema 15A.2. Bird et al.)

Calcular los requerimientos de potencia en el ejemplo (6.4) si el flujo en el gaseoducto fuera adiabático en vez de isotérmico.

- (a) Usar la ecuación (6.22) para determinar la densidad del gas en el plano 2.
- (b) Usar la ecuación (6.23) para determinar la presión en el plano 2.
- (c) Calcular la potencia del compresor como en el caso isotérmico.

Respuestas:

- (a) 0.243 lbm/ft^3 . (b) 86 psia. (c) 504 HP.

2. Intercambiador de calor de doble tubo. (Problema 15A.7. Bird et al.)

Una corriente de agua fría con gasto másico de 5,400 lbm/hr a 70^0 F se calienta por medio de 8,100 lbm/hr de agua caliente a 200^0 F , en un intercambiador de calor de doble tubo. El agua fría fluye en el tubo interno y el agua caliente fluye en la sección anular entre los dos tubos. La longitud de los tubos es de 20 ft. Calcular la temperatura de salida de la corriente fría si:

- (a) El coeficiente de transferencia de calor para la zona anular basado en el área de la superficie interna del tubo interior es $2000 \text{ Btu/hr ft}^2 \text{ F}$.
- (b) El tubo interior tiene las siguientes propiedades: longitud total 40 ft, diámetro interno de 0.0875 ft; superficie de transferencia de calor por unidad de longitud (pies) de 0.2745 ft^2 , gasto másico a la velocidad promedio de 1 ft/s es de 1345 lbm/hr.
- (c) Las propiedades del agua en el tubo interior son:

Viscosidad = $0.45 \text{ cp} = 1.09 \text{ lbm/hr ft}$.

$C_p = 1 \text{ Btu/lbm F}$

$k = 0.376 \text{ Btu/hr ft F}$.

Densidad = 61.5 lbm/ft^3 .

- (d) La resistencia combinada de la pared del tubo es de $0.001 \text{ hr ft}^2 \text{ F/Btu}$ basada en el área del tubo interior.

Respuesta: 136^0 F .

Tarea 11

1. Mezclado de dos corrientes de gases ideales. (Problema 15A.3. Bird et al.)

(a)- Calcular la velocidad, temperatura y presión cuando dos corrientes de aire se mezclan. La capacidad calorífica del aire C_p se considera constante y es de 6.97 Btu/lbmol F. Las propiedades de las corrientes se encuentran en la siguiente tabla:

Corriente 1a: $w = 1000$ lbm/hr, $v = 1000$ ft/s, $T = 80^0$ F, $p = 1$ atm.

Corriente 1b: $w = 10,000$ lbm/hr, $v = 100$ ft/s, $T = 80^0$ F, $p = 1$ atm.

(b)- Si la densidad fuera constante, ¿cuál sería el valor de la velocidad?

(c)- Estimar las pérdidas por fricción (E_v) basándose en los resultados de (b).

Respuestas:

(a)- 110 ft/s, 86.5⁰ F, 1 atm.

(b)- 109 ft/s

(c)- 1400 ft lbf/lbm.

2. Flujo a través de un tubo Venturi. (Problema 15A.4. Bird et al.)

Aire seco fluye en un tubo Venturi con garganta de 3 in de diámetro y diámetro de 1 ft. El coeficiente de descarga C_d es de 0.98. Calcular el flujo másico si el aire entra a 70⁰ F y 1 atm. La presión en la garganta es de 0.75 atm.

(a)- Suponer flujo adiabático sin fricción con $\gamma = 1.4$.

(b)- Suponer flujo isotérmico.

(c)- Suponer flujo incompresible a la densidad de entrada.

Respuestas:

(a)- 2.07 lbm/s, (b)- 1.96 lbm/s, (c)- 2.43 lbm/s.

3. Calentamiento de aire en un tubo. (Problema 15A.6. Bird et al.)

Un tubo horizontal de 20 ft de longitud se calienta por medio de un sistema de resistencias eléctricas. Aire seco entra a 50° F y 40 psia a 75 ft/s con gasto másico de 185 lbm/hr. El calor transferido al tubo es de 800 Btu/hr ft. ¿A qué temperatura el aire sale del tubo si la presión de salida es de 15 psia? Suponer flujo turbulento y comportamiento de gas ideal. Para el aire la capacidad calorífica a presión constante en Btu/lbmol F es:

$$C_p = 6.39 + (9.8 \times 10^{-4}) T - (8.18 \times 10^{-8}) T^2, \text{ donde } T \text{ se expresa en grados Rankine.}$$

Respuesta: $T_2 = 354^\circ \text{ F}$.

4. Flujo de un fluido compresible a través de una tobera convergente-divergente. (Problema 15B.6. Bird et al.)

Calcular la velocidad del fluido, la temperatura del fluido, y la sección transversal S como función de la presión local con flujo de 10 lbmol/s de aire desde 560° R y 10 atm hasta presión cero.

Respuesta.

P (atm)	10	9	8	7	6	5.28	5	4	3	2	1	0
v (ft/s)	0	449	645	807	956	1058	1099	1245	1398	1574	1798	2591
T (°R)	560	543	525	506	484	466	459	431	397	353	290	0
S (ft ²)	∞	.977	.739	.650	.613	.606	.607	.628	.688	.816	1.171	∞

Capítulo 7

Transferencia de Energía por Radiación

7.1. Definiciones.

En este capítulo se tratará el mecanismo de transferencia de energía, la radiación térmica electromagnética que es la radiación emitida por un cuerpo en virtud de su temperatura. El calor exhibe las características cuánticas y de onda típicas de la radiación electromagnética, resultando en que la radiación térmica es una parte del espectro electromagnético. Solamente la radiación producida por la temperatura de un cuerpo es la asociada a la radiación térmica.

La radiación térmica tiene lugar en una porción pequeña del espectro electromagnético, en la mayor parte del infrarrojo, y parte de la región del ultravioleta. Un espacio estrecho corresponde a la luz visible, entre 400 y 700 nm. Incrementando la temperatura de un cuerpo causa un aumento en la energía térmica que aparece como luz visible. A bajas temperaturas, cuando se emite luz visible, la luz es roja, y cuando la temperatura del cuerpo aumenta, más energía es emitida a longitudes de onda menores y la luz es ahora blanca.

La energía radiante que interactúa con la materia puede ser absorbida, transmitida o reflejada. La proporción de energía transmitida en sólidos es cero y en líquidos depende mucho del grosor de la muestra. La rugosidad de la superficie de los sólidos tiene una pronunciada influencia en las propiedades de radiación térmica. Un cuerpo es opaco si la fracción de absorción de energía más la fracción reflejada es igual a uno. En gases, muy poca energía se refleja, por lo que la energía se absorbe o transmite. Se define a un cuerpo negro aquel que absorbe toda la energía radiante a todas las longitudes de onda de la energía.

La absorción de energía no ocurre de igual forma a todas las longitudes de onda, ya que la distribución espectral de la energía es una función de la temperatura del emisor. Esto es, la absorción del receptor depende de la temperatura del emisor. La absorción selectiva es significativa en el caso de los gases, los cuales son transparentes a la radiación a ciertas longitudes de onda, pero absorbentes a otras longitudes.

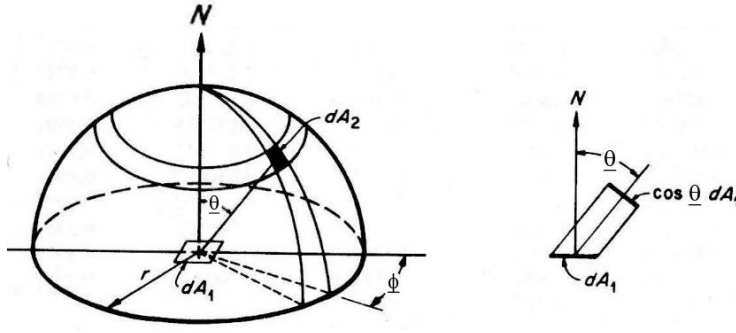


Figura 7.1. Modelo semiesférico para determinar la intensidad de la radiación.

El flux de radiación se define como la energía radiante por unidad de ángulo sólido por unidad de área del emisor proyectado sobre la normal a la línea que une ambas superficies. La energía radiada total desde el elemento de superficie dA_1 es interceptado por una semiesfera imaginaria centrada en el punto emisor. Para un cuerpo negro, el flujo de energía radiada de dA_1 a dA_2 es:

$$dQ_{12} = I_b \cos \theta dA_1 d\Omega \quad (7.1)$$

$$\text{donde el ángulo sólido es } d\Omega = \frac{dA_2}{r^2}. \quad I_b \text{ es la intensidad de radiación} \quad (7.2)$$

Notar que en la figura 7.1 $\cos \theta dA_1$ es el área del emisor proyectada sobre la normal a la línea vista por el receptor. Como:

$dA_2 = (rd\theta)(r \sin \theta d\phi)$ entonces: $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ que substituyendo en la ecuación 7.1 e integrando sobre el hemisferio obtenemos:

$$dQ_{12} = dA_1 \iint_{00}^{2\pi \pi/2} I_b \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (7.3)$$

que para el cuerpo negro I_b es constante, resultando en:

$$q_{12} = \frac{dQ_{12}}{dA_1} = \pi I_b \quad (7.4)$$

lo que significa que el flux de energía emitido por el cuerpo negro es proporcional a la intensidad de la radiación.

En el caso más general de dos superficies cualquiera que intercambian radiación térmica está descrito en la figura 7.2. La energía radiada desde A_1 sobre A_2 es:

$$dQ_{12} = I_b \cos \phi_1 dA_1 d\Omega_{12} \quad (7.5)$$

donde el ángulo sólido en este caso es:

$$d\Omega_{12} = \frac{\cos \phi_2 dA_2}{r^2} \quad (7.6)$$

La energía total radiada desde A_1 es, de acuerdo a la ecuación 7.4:

$$dQ_{12} = \pi I_b dA_1 \quad (7.7)$$

La energía total radiada desde A_1 es, de acuerdo a la ecuación 7.4:

$$dQ_{12} = \pi I_b dA_1$$

Definimos el factor de configuración como el cociente entre esta ecuación y la 7.5:

$$F_{12} = \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\pi r^2} dA_2 \quad (7.7)$$

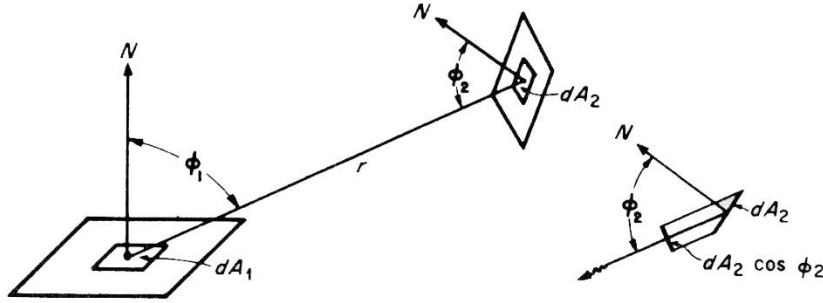


Figura 7.2. Intercambio de energía radiante entre dos elementos de área.

Notar que el ángulo sólido en la ecuación 7.6 se reduce al de la ecuación 7.2 porque la normal de la superficie dA_2 es colineal a r .

En el caso de un emisor infinitesimal que transmite energía a una superficie finita, la relación entre las ecuaciones 7.5 y 7.4 es:

$$F_{12} = \frac{\int I_b \cos \phi_1 \cos \phi_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2 I_b dA_1} \quad (7.8)$$

Como la intensidad y dA_1 son independientes de dA_2 , esta ecuación se simplifica a:

$$F_{12} = \frac{\int \cos \phi_1 \cos \phi_2 dA_2}{\pi r^2} \quad (7.9)$$

En el caso de intercambio de energía radiante entre dos superficies finitas, tenemos:

$$F_{12} = \frac{\iint I_b \cos \phi_1 \cos \phi_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2 \int I_b dA_1} = \frac{1}{A_1} \iint \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad (7.10)$$

7.1.1. Ejemplo 7.1.

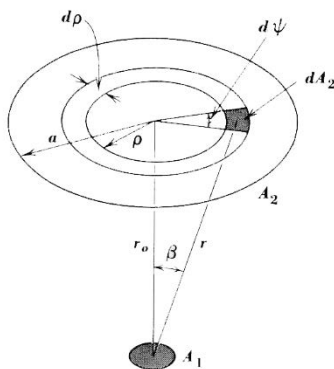


Figura 7.3 Discos paralelos.

Determinar el factor de configuración por radiación entre un disco pequeño de área A_1 que es paralelo a un disco grande de área A_2 y radio a . La línea que une sus centros es normal a ambos discos de longitud r_0 , de acuerdo a la figura 7.3.

En este caso, la ecuación 7.10 es

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad \text{donde } A_1 \ll A_2$$

por lo que la ecuación se reduce a la 7.9 y además los ángulos son iguales, luego entonces:

$$F_{12} = \frac{\int \cos^2 \beta dA_2}{\pi r^2} \quad \text{como} \quad dA_2 = \rho d\psi d\rho \quad \text{y} \quad \cos \beta = \frac{r_0}{r}, \quad \text{entonces:}$$

$$F_{12} = \iint_{00}^a \frac{2\pi r_0^2}{\pi} \frac{\rho d\psi d\rho}{r^4} = 2 \int_0^a \frac{r_0^2}{r^4} \rho d\rho \quad \text{la relación entre } r \text{ y } r_0 \text{ es } r_0^2 + \rho^2 = r^2$$

$$F_{12} = \int_0^a \frac{2r_0^2}{(r_0^2 + \rho^2)^2} \rho d\rho = \frac{a^2}{r_0^2 + a^2} \quad \text{es el resultado.}$$

Relación con la energía interna.

Sea u la densidad de energía en un punto determinado dentro de un elemento de volumen, tal que $u = \frac{E}{V}$ donde E es la energía interna y V es el volumen. Si consideramos que las normales a las superficies en la figura 7.1 son colineales, entonces la ecuación 7.1 se reduce:

$$\frac{dQ_{12}}{dA_1} = I_b d\Omega \quad (7.11)$$

El flux de energía radiante de la ecuación 7.11 dividido entre la velocidad de propagación c resulta en el momentum de la radiación, donde la propagación de la energía radiante se realiza a una velocidad c , la velocidad de las ondas electromagnéticas. Esto se expresa como:

$$du = \frac{I_b}{c} d\Omega \quad (7.12)$$

Integrando sobre la esfera obtenemos:

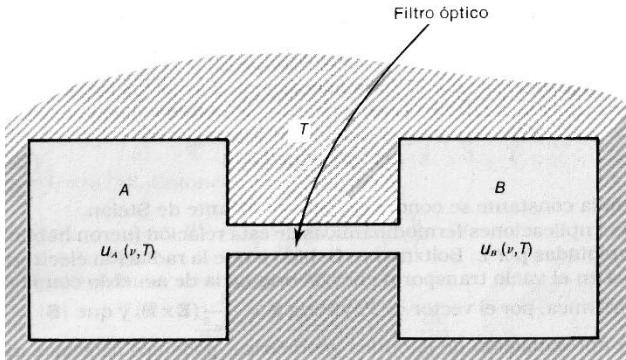
$$u = 4\pi \frac{I_b}{c} \quad \text{y} \quad u(v) = 4\pi \frac{I_b(v)}{c} \quad (7.13)$$

que establece la relación entre u y I_b para un medio isotrópico y homogéneo.

7. 2. Termodinámica de la radiación. Leyes de Kirchhoff y Stefan.

Se analizará la radiación en equilibrio a una temperatura determinada. Una caja cerrada con las paredes a una temperatura T , ejemplifica el caso en que la radiación en su interior está en equilibrio con las paredes, y es homogénea en el interior de la caja. Si se abre un pequeño agujero en la caja sin perturbar el equilibrio se puede observar la radiación en el interior. La radiación externa que entre a la caja por el agujero será absorbida por las paredes mediante reflexiones sucesivas. Por ello, la radiación en el interior se comporta como si las paredes fueran negras, o de absorción perfecta, y la radiación que sale de la caja por el agujero se llama radiación del cuerpo negro. La radiación dentro de la caja no está polarizada y varía con la temperatura al cambiar de color.

La primera ley de Kirchhoff establece que u como $u(\nu)$ son solamente funciones de T y no de las paredes, donde $u(\nu)$ es la densidad espectral de radiación, que es la densidad de energía en un intervalo $d\nu$ de frecuencias. La demostración de esta ley involucra a dos cavidades A y B unidas por un pequeño filtro óptico, que es un tubo opaco a todas las frecuencias, excepto a aquellas comprendidas en el intervalo $d\nu$ (ver figura 7.4).



Si $u_A(\nu) > u_B(\nu)$ se produce un flujo de energía de A hacia B y la temperatura de B aumentaría creando una diferencia de temperatura espontánea. Esto es un proceso contrario a la segunda ley, que postula que la densidad de energía debe ser igual en ambas cavidades. Esto es:

Figura 7.4. Cavidades cerradas unidas por un filtro óptico.

$u_A(\nu, T) = u_B(\nu, T) = u(\nu, T)$, donde $u(\nu, T)$ es una función universal de ν y T , pues A y B son arbitrarias. Con base a la descomposición espectral de u se puede expresar que:

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu \quad (7.14)$$

Por lo que $u(T)$ también es una función universal de la temperatura; la energía total $E = Vu(T)$ y donde V es el volumen de la caja es una función determinada de V y T . La radiación del cuerpo negro, por lo tanto, es un sistema termodinámico definido.

Si tenemos una serie de cuerpos dentro de una cavidad, eventualmente se alcanzará el estado de equilibrio térmico, en donde cada uno absorbe energía radiante al mismo tiempo que la emite. De acuerdo a la ecuación 7.4, llamemos q_1 al flux de energía emitida por un cuerpo de área A_1 con constante de absorción α_1 , q_0 es el flux de energía radiante de la cavidad que incide sobre el cuerpo de área A_1 , entonces:

$$q_1 A_1 = q_0 \alpha_1 A_1 \rightarrow q_0 = \frac{q_1}{\alpha_1} \quad (7.15)$$

Para cuerpos adicionales q_0 permanece constante, por lo que podemos expresar:

$$\frac{q_1}{\alpha_1} = \frac{q_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{q_n}{\alpha_n} \quad (7.16)$$

La ecuación 7.16 obtenida por Kirchhoff, constituye la ley que expresa que, a una T dada, la emisión y absorción de energía radiante en superficies sólidas son iguales cuando la radiación está en equilibrio con la superficie. O sea, todos los cuerpos tendrán la misma relación entre emisión y absorción de energía.

Si una de las superficies dentro de la cavidad absorbe toda la radiación que incide sobre ella, ésta tiene un coeficiente de absorción de 1 y es un cuerpo negro. Como $\frac{q_i}{\alpha_i}$ está fijo, sugiere un límite superior a la energía emitida de esa superficie, por lo que el cuerpo negro es aquel que es un emisor y absorbedor perfecto. Por definición, el coeficiente de emisión de una superficie real es el cociente entre q_1 y el flux de un cuerpo negro q_2 a la misma temperatura.

Este coeficiente es ε_1 . De acuerdo a la ecuación 7.16,

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \varepsilon_1 \quad (7.17)$$

En donde el cuerpo 2 es un cuerpo negro. Como α_2 es uno, obtenemos para el cuerpo que no es negro (se denominará cuerpo gris):

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \quad (7.18)$$

Generalizando, en un sistema en equilibrio térmico los coeficientes de emisión y absorción son iguales.

Al incidir sobre una superficie, la radiación produce una presión en medios isotrópicos y homogéneos. Como la presión es el cambio del momentum por unidad de tiempo y de superficie, consideraremos radiación entre superficies paralelas, por lo que las ecuaciones 7.1 y 7.2 se reducen a: $\frac{1}{c} \frac{dQ_{12}}{dA_1} = \frac{I_b}{c} \cos \theta d\Omega$ y $d\Omega = \frac{\cos \theta dA_2}{r^2} = \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$.

Como en teoría cinética de los gases, el cambio de momentum es $2 \frac{I_b}{c} \cos \theta d\Omega$,

$$p = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{I_b}{c} \cos \theta d\Omega = 2 \frac{I_b}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi \frac{I_b}{c} \left(\frac{1}{3} \right) \quad (7.19)$$

por lo tanto, por la ecuación 7.13:

$$p = \frac{u(T)}{3} \quad (7.19)$$

Notar que, a diferencia de un gas ideal, la presión de la radiación es una función de la temperatura, independiente del volumen.

Considérese una cavidad cilíndrica provista de un pistón movable, con radiación de un cuerpo negro a temperatura T. Si se desplaza el pistón reversiblemente una cantidad dV , el trabajo efectuado sobre el pistón según la ecuación 7.19 es:

$W_{rev} = pdV = \frac{1}{3}u(T)dV$ Dado que $E = u(T)V$, el cambio de entropía está expresado como:

$$dS = \frac{1}{T}[dE + pdV] = \frac{1}{T}d[u(T)V] + \frac{1}{3T}u(T)dV \quad (7.20)$$

$$dS = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3T}u(T)dV = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV, \text{ por lo que}$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{4}{3T}u \right) \rightarrow \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \frac{d}{dT} \left(\frac{u}{T} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{u}{T^2} \right) \rightarrow \frac{1}{3T} \frac{du}{dT} = \frac{4u}{3T} \rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

$$\text{Con solución: } u(T) = aT^4 \quad (7.21)$$

donde a es una constante que se puede determinar experimentalmente. La ecuación 7.21 es la ley de Stefan-Boltzmann, por lo que la emisividad de un metal es proporcional a T^4 .

Substituyendo la ecuación 7.21 en la 7.20 e integrando se obtiene:

$$\frac{S}{V} = \frac{4}{3} a T^3 \quad (7.22)$$

Lo cual implica que en procesos adiabáticos ($\Delta S=0$) $T^3 V = \text{constante}$. Al comparar este resultado con el de un proceso adiabático de un gas ideal con $\gamma=4/3$ se obtiene:

$$pV^\gamma = \text{const} \rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{const} \rightarrow VT^3 = \text{const}$$

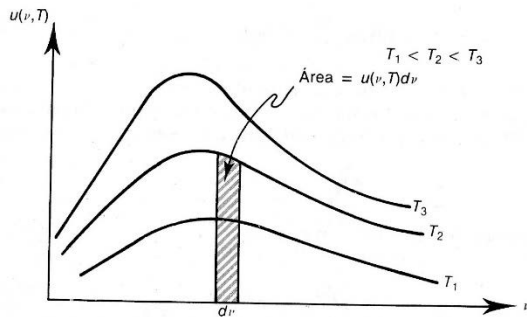
La ecuación 7.21 puede también deducirse de la expresión de la energía interna siguiente:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p = u \quad (7.23)$$

Por la ecuación 7.19, la ecuación 7.23 se reduce a:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{4}{3} u = \frac{1}{3} T \frac{du}{dT} \quad \text{por lo que } \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \text{ y se comprueba el resultado 7.21.}$$

7.3. Teoría de la densidad espectral.



De acuerdo a la figura 7.5, a diferentes temperaturas se obtienen varias curvas de la densidad de energía. El área bajo la curva debe ser proporcional a T^4 por la ley de Stefan.

Figura 7.5 Distribución espectral de la radiación

De acuerdo a las ecuaciones 7.14 y 7.21,

$$u(T) = \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu = a T^4 \quad (7.24)$$

En lo siguiente, se obtendrá la ecuación de Wien que estableció la forma general de la función $u(\nu, T)$. Para ello, se considera una expansión adiabática de una cavidad en equilibrio térmico con sus alrededores a la temperatura T . Al realizar la expansión, la temperatura disminuye al aumentar el volumen, y las ondas electromagnéticas tienen un cambio de frecuencia debido al efecto Doppler. Para un observador en el centro de la cavidad, la frecuencia de las ondas que se propagan en dirección normal a las paredes de la cavidad será ν' :

$\nu' = \nu(1 \pm \frac{v}{c})$ + corresponde a ondas reflejadas y – a ondas incidentes. La variación total de la frecuencia será $\Delta\nu = -2\nu\frac{v}{c}$. Para una incidencia oblicua, en la que la dirección de propagación es diferente a la normal a la superficie $\Delta\nu = -2\nu\frac{v}{c}\cos\theta$. Entre dos reflexiones sucesivas, la onda recorre una distancia $2rcos\theta$, que es la distancia entre dos puntos de la circunferencia de la cavidad esférica. El número de reflexiones será $c(2rcos\theta)^{-1}$. Como para cada reflexión la frecuencia cambia $\Delta\nu$, el cambio de frecuencia por segundo es:

$$\Delta\nu = (-2\nu\frac{v}{c}\cos\theta) (\frac{c}{2rcos\theta}) = -\frac{\nu v}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{r} \quad (7.25)$$

Como en procesos adiabáticos $T^3V = constante$, que implica que $T^3(\frac{4}{3}\pi r^3) = cte$,

Luego, $Tr = cte$. Si $v = \Delta r/t$, donde t es un tiempo fijo, luego entonces, $\Delta r/r \sim \Delta T/T$.

La ecuación 7.25 se reduce a: $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta T}{T}$ que implica que $T/\nu = cte$, $\rightarrow T\lambda = cte$ (7.26)

El producto de la longitud de onda de la radiación por la temperatura se mantiene constante en una expansión adiabática. Si la expansión ocurre en un intervalo $\Delta\nu$ de frecuencias, de acuerdo a la primera ley:

$$d[Vu(T)] = -pdV \quad \rightarrow \quad d[Vu(T)] = -\frac{u(T)}{3}dV \quad \rightarrow \quad -\frac{4}{3}\frac{dV}{V} = \frac{du(T)}{u(T)} \quad (7.27)$$

Como en los procesos adiabáticos $VT^3 = const$, entonces, según la ecuación 7.26, obtenemos que

$$V\nu^3 = const = C \quad \text{luego, } \ln(V) + \ln(\nu^3) = \ln C \quad \rightarrow \quad d\ln(V) + 3d\ln(\nu) = 0$$

$$\text{Por la ecuación 7.27: } -\frac{4}{3}d\ln V = d\ln(u(T)) \quad \rightarrow \quad 4d\ln \nu = d\ln(u(T))$$

Integrando: $u(T) = C\nu^4$, que es consistente con la ecuación 7.21 y con la 7.26. Luego entonces:

$du(T) = C\nu^3 d\nu$ y, en vista de la ecuación 7.24, se obtiene:

$$u(\nu, T)d\nu = C\nu^3 d\nu \quad (7.28)$$

que es la ecuación de Wien, quien sugirió que la constante de integración C debe ser una función indeterminada de ν/T , lo cual es consistente con la ley de Kichhoff que requiere que $u(\nu, T)$ sea una función universal de la frecuencia y la temperatura. Por lo tanto,

$$u(\nu, T)d\nu = f(\frac{\nu}{T})\nu^3 d\nu \quad (7.29)$$

Como $|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}|d\lambda|$ la ecuación 7.29 se puede expresar como:

$$u(\nu, T)d\lambda = \frac{c^4}{\lambda^5}f(\lambda T)d\lambda \quad (7.30)$$

Mediante la ecuación de Wien también se puede obtener el efecto de desplazamiento observado en las curvas de la figura 7.5, en donde los máximos se desplazan al ultravioleta al aumentar la temperatura. Esos máximos corresponden, de acuerdo a la ecuación 7.26, a una longitud de onda tal que $\lambda_{max}T = const$. El máximo de la ecuación 7.30 se calcula de acuerdo a:

$$\frac{du}{d\lambda} = 0 = \frac{c^4}{\lambda^5} \left[-5\frac{f}{\lambda} + T f' \right] \rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{5}{\lambda_{max}T} \quad \text{Como } f' = \frac{df}{d(\lambda T)} \text{ la integración resultante es:}$$

$\ln f = 5 \ln(\lambda_{max}T) \rightarrow f = (\lambda_{max}T)^5 = const \rightarrow (\lambda_{max}T) = 0.288 \text{ cm}^0K \text{ (7.31)}$ que es la constante de Wein, medida experimentalmente. Esta fórmula fue ampliada posteriormente para ser aplicable a altas frecuencias, obteniéndose:

$$u(\nu, T) d\nu = (const) e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \nu^3 d\nu \quad (7.32)$$

que concordaba satisfactoriamente con los datos experimentales. Sin embargo, en la zona de bajas frecuencias, la ecuación 7.32 resultaba insatisfactoria. Rayleigh hizo una corrección

que se basa en la naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética encerrada en una cavidad. Los modos normales resultantes se distribuyen en función de la frecuencia. Rayleigh supuso que los radiadores se pueden representar mediante osciladores armónicos, en donde su densidad espectral es igual al número de modos de vibración en un intervalo de frecuencias multiplicado por la energía promedio de cada modo, en donde esa energía promedio es kT . En el **Apéndice A** se describe la deducción para obtener la ecuación 7.33.

Rayleigh obtuvo que: $u(\nu, T) = \frac{c}{3} \nu^2 kT$ y Jeans demostró que la constante es 8π , por lo que:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{3} \nu^2 kT \text{ (7.33)}$$

$f(\frac{\nu}{T}) = e^{-\frac{\beta\nu}{T}}$ y a frecuencias bajas $f(\frac{\nu}{T}) = T/\nu$. que es la fórmula de Rayleigh-Jeans. En resumen, en la ecuación 7.29 a frecuencia altas

Planck propuso introducir al campo radiante un oscilador lineal cargado que responda a la acción del campo eléctrico, para representar el amortiguamiento de la radiación inherente en el mecanismo de absorción. Este desarrollo de la solución de un oscilador lineal con amortiguamiento, para obtener la energía promedio del proceso, se detalla en el **Apéndice B**. El resultado para la energía promedio total es:

$$\langle E \rangle = \frac{C_{w0}^2 \pi}{8m} \frac{1}{\sigma \omega_0^2} \quad (7.34)$$

donde σ está relacionada con el término de amortiguamiento y está expresado como:

$$\sigma = \frac{1}{12\pi} \frac{e^2}{\epsilon_0 m c^3} \quad (7.35)$$

donde c es la velocidad de la luz, m es la masa del oscilador, e es la carga y ϵ_0 es la permitividad. Substituyendo la ecuación 7.35 en la 7.34 obtenemos:

$$\langle E \rangle = \left(\frac{C_{w0}^2 \pi}{8m} \frac{1}{\omega_0^2} \right) \left(\frac{12\pi}{e^2} \epsilon_0 m c^3 \right) = \frac{3\pi^2 \epsilon_0 c^3}{2\omega_0^2 e^2} C_{w0}^2 \quad (7.36)$$

Es necesario ahora determinar $C_{w_0}^2$ en términos de la energía del cuerpo negro. La densidad de energía del campo electromagnético para ondas planas está dada por:

$$u = \epsilon_0 E_l^2 = \epsilon_0 (E_{lx}^2 + E_{ly}^2 + E_{lz}^2) \quad (7.37) \text{ donde } E_l \text{ es el campo eléctrico. De acuerdo al}$$

modelo de osciladores armónicos (ver **apéndice 7-B**, ecuaciones **7B-1** y **7B-2**) se obtiene:

$$eE_{lx}(\omega_0) = C_{w_0} \text{sen} \omega_0 t \quad (7.38)$$

Elevando al cuadrado e integrando obtenemos:

$$e^2 \langle (E_{lx}^2) \rangle = \frac{1}{2} C_{w_0}^2 \quad (7.39)$$

Se supone que los valores promedio de las amplitudes del campo eléctrico para cada frecuencia son iguales entre sí, por lo que:

$$\langle E_{lx}^2(\omega_0) \rangle = \frac{1}{3} \langle E_l^2(\omega_0) \rangle \quad (7.40)$$

Substituyendo la ecuación **7.40** en la **7.39** obtenemos:

$$C_{w_0}^2 = \frac{2e^2}{3} \langle E_l^2(\omega_0) \rangle \quad (7.41)$$

Substituyendo la ecuación **7.41** en **7.36**:

$$\langle E \rangle = \left(\frac{3}{2} \pi^2 \frac{\epsilon_0 c^3}{e^2 \omega_0^2} \right) \left(\frac{2e^2}{3} \langle E_l^2(\omega_0) \rangle \right) = \frac{\pi^2 \epsilon_0 c^3}{\omega_0^2} \langle E_l^2(\omega_0) \rangle \quad (7.42)$$

Substituyendo la ecuación **7.42** en la **7.37** se obtiene:

$$u(\omega_0, T) = \epsilon_0 \langle E_l^2(\omega_0) \rangle = \frac{\omega_0^2}{\pi^2 c^3} \langle E \rangle \quad \text{Como } \omega_0 = 2\pi\nu \quad \text{y} \quad 2\pi u(\omega, T) = u(\nu, T)$$

luego entonces:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle \quad (7.43)$$

que es uno de los resultados más relevantes de la teoría de la radiación. Notar que la ecuación **7.43** es una demostración formal de la fórmula de Rayleigh-Jeans, ecuación **7.33**.

A partir de la ecuación **7.43**, Planck obtuvo una expresión para la entropía de los osciladores que por estar en equilibrio con la radiación implica la entropía de la radiación.

Según la ecuación **7.43**, la densidad de energía interna está asociada con una energía promediada en el tiempo, que no es la energía interna del sistema ($\bar{E}$) la cual es evaluada por el promedio de cada oscilador respecto a una distribución de los osciladores característica del equilibrio, por el número de ellos. Sin embargo, por la hipótesis ergódica, existe esa igualdad. Por lo tanto:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \bar{E} \quad (7.44)$$

Definiendo $s(\nu, T)$ como la entropía por unidad de volumen de la radiación en equilibrio a una temperatura T y en el intervalo de frecuencias $d\nu$, entonces, en un proceso reversible *sin trabajo externo*,

$$ds(\nu, T) = \frac{1}{T} du(\nu, T) \quad (7.45)$$

Substituyendo la ecuación 7.44 en la 7.32, Planck demostró que la energía promedio por oscilador es:

$$\bar{E} = \frac{\alpha\nu}{8\pi} e^{-\frac{\beta\nu}{T}} \quad (7.46)$$

donde α y β son constantes. Despejando T de la ecuación 7.46 y substituyendo en

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}\right)_V = \frac{1}{T} \quad \text{se obtiene:} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}\right)_V = -\frac{1}{\beta\nu} \ln \frac{8\pi\bar{E}}{\alpha}$$

Puesto que la segunda derivada es negativa, el equilibrio termodinámico es estable:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{E}^2}\right)_V = -\frac{1}{\beta\nu\bar{E}} \leq 0 \quad (7.47)$$

En la región de frecuencias pequeñas, la fórmula de Rayleigh-Jeans $\bar{E} = kT$, $\beta = T/\nu$ es correcta, por lo tanto

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{E}^2}\right)_V = -\frac{k}{\bar{E}^2} \leq 0 \quad (7.48)$$

Para cubrir todo el espectro, Planck propuso una fórmula de interpolación que es consistente con los límites apropiados. Si $\alpha = 1/\beta\nu k$, la interpolación resulta en la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{E}^2}\right)_V = -\frac{1}{\beta\nu} \left(\frac{1}{\bar{E}} - \frac{\alpha}{1+\alpha\bar{E}}\right) \quad (7.49)$$

e integrando se obtiene:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\beta\nu} \ln \left(\frac{1+\alpha\bar{E}}{\bar{E}}\right) + \text{Const} \quad \text{La constante se evalúa en el límite: } \bar{E}|_{T \rightarrow \infty} = \infty, \text{ y luego:}$$

$$\text{Const} = -\frac{1}{\beta\nu} \ln \alpha \quad \text{por lo tanto:}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\beta\nu} \ln \left(\frac{1+\alpha\bar{E}}{\alpha\bar{E}}\right) \quad \text{Despejando } \bar{E} \text{ y substituyendo } \alpha \text{ obtenemos:}$$

$$\bar{E} = \frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu/T} - 1} \quad (7.50)$$

y substituyendo en la ecuación 7.44 se obtiene:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{k\beta\nu}{e^{\beta\nu/T} - 1} \quad (7.51)$$

Si $k\beta = h$, donde h tiene dimensiones de acción (energía x tiempo), se obtiene la forma más común de la ecuación de Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7.52)$$

y la ecuación 7.50 es:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7.53)$$

La ecuación 7.52 en el límite de bajas frecuencias se reduce a la fórmula de Rayleigh-Jeans:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT \quad (\text{ecuación 7.33}) \quad (7.54)$$

A frecuencias altas, el límite es el de la fórmula de Wien (ecuación 7.32):

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT} \quad (7.55)$$

de donde se pudo evaluar la constante de Planck h .

Si se integra la ecuación 7.52 sobre la frecuencia, se obtiene:

$$u(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \nu^3 \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{haciendo un cambio de variable } x = h\nu/kT, \text{ obtenemos:}$$

$$u(T) = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty x^3 \frac{dx}{e^x - 1} = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \frac{\pi^4}{15} \quad (7.56)$$

Comparando este resultado con la ecuación 7.21 se puede encontrar la constante de Stefan.

Por ltimo, el máximo de la distribución de Planck nos da la constante de Wein.

7. 4. Aplicaciones.

Es necesario primero hacer un resumen de las variables principales y enunciar el teorema de reciprocidad. Una cantidad relevante para el uso de las relaciones teóricas en aplicaciones directas, es la constante de Stefan-Boltzmann. Combinando las ecuaciones 7.13 y 7.21 se

obtiene: $q_{12} = \frac{c}{4} a T^4$ donde $a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}$ proviene de la ecuación 7.56. La constante de Stefan -Boltzmann es, por lo tanto:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 0.17 \times 10^{-8} \frac{BTU}{hr ft^2 R^4} = 1.355 \times 10^{-12} \frac{Cal}{scm^2 K^4}$$

$$\text{El flux de energía de radiación queda expresado como: } q_{12} = \sigma T^4 \quad (7.57)$$

$$\text{En cuerpos grises (no negros) tenemos que: } q_{12} = e\sigma T^4 \quad (7.58)$$

De acuerdo a la ecuación 7.10, el factor de configuración entre dos superficies negras es:

$$F_{12} = \frac{1}{A_1} \iint \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2}$$

La transferencia neta de energía o flujo de energía de dA_1 a dA_2 es:

$$Q_{12} = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) F_{12} = \sigma A_2 (T_1^4 - T_2^4) F_{21} \quad (7.59)$$

$$\text{donde } F_{21} = \frac{1}{A_2} \iint \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2 dA_1 dA_2}{\pi r^2} \quad \text{por lo tanto:}$$

$$A_1 F_{12} = A_2 F_{21} \quad (7.60)$$

que es el enunciado del teorema de reciprocidad.

7.4.1. Ejemplo 7.2.

La constante solar es el flux de calor del sol que entra a la atmósfera. Si se considera al sol como un cuerpo negro que emite radiación con una intensidad máxima a 5000 Armstrongs (5×10^5 cm). Calcular la temperatura de la superficie del sol, la constante solar y el flux de calor emitido en la superficie del sol.

a)- A partir de la ecuación 7.31 y sabiendo la constante de Wein, tenemos:

$$T = \frac{0.2884 \text{ cmK}}{5 \times 10^{-5} \text{ cm}} = 5,760^0 K = 10,400^0 R$$

b)- El flux de calor emitido por el sol es:

$$q_{12} = \sigma T^4 = (0.17 \times 10^{-8})(10,400)^4 = 2 \times 10^7 \text{ BTU/h rft}^2$$

c)- La constante solar se calcula sabiendo el diámetro del sol y la distancia de la tierra al sol (8.6×10^5 millas y 9.29×10^7 millas, respectivamente). Si el sistema 1 es el sol y el 2 es la tierra, aplicamos la ecuación 7.59 en donde las normales del sol y la tierra son colineales. En este caso:

$$Q_{21} = \sigma A_2 (T_1^4) F_{21} = q_{12} \frac{A_1}{\pi r^2} = q_{12} \frac{\pi D_1^2/4}{\pi r^2} = 2/4 \times 10^7 \left(\frac{8.6 \times 10^5}{9.29 \times 10^7} \right)^2 = 430 \text{ BTU/hrft}^2$$

7.4.2. Ejemplo 7.3.

Determinar la pérdida de calor por radiación por área de una placa de acero a 1600^0 F. En este caso $\epsilon = 0.29$, y se supone que es un cuerpo negro.

Usamos la ecuación 7.58:

$$q_{12} = \epsilon \sigma T^4 = (0.29)(0.17 \times 10^{-8})(1600 + 460)^4 = 9,000 \text{ BTU/hrft}^2$$

7. 4.3. Ejemplo 7.4.

Calcular la transferencia de calor por radiación desde una esfera de 1 in de diámetro a 2000⁰R hacia un plano de 6 ft de base y 4 ft de altura separados 4 ft. La esfera se localiza sobre la normal al centro del plano. Considerar a la esfera y al plano cuerpos negros. La temperatura del plano es muy baja, por lo que se desprecia la transferencia del plano a la esfera.

En este caso, F_{12} es función de $\beta = 3/4$ y $\gamma = 1/2$, tal que $F_{12} = 4$ (0.21) de la gráfica de F_{12} en función de β y γ (**apéndice C**). Utilizando la ecuación 7.59:

$$Q_{12} = \sigma A_1 (T_1^4) F_{12} = (0.17 \times 10^{-8}) \left(\frac{4\pi}{242} \right) 2000^4 (0.84) = 50.3 \text{ BTU/hr}$$

7. 4.4. Ejemplo 7.5.

Una muestra esférica de diámetro de 4 in y a 70⁰F se encuentra dentro de un horno cúbico de 4 ft de lado a 540⁰F. Calcular la transferencia por radiación si el horno es un cuerpo negro.

$$Q_{12} = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) F_{12}$$

Como el factor de configuración $F_{21} = 1$ (horno 1, esfera 2) porque la radiación de la esfera enteramente se recibe por las paredes del horno, por medio del teorema de reciprocidad,

$$F_{12} = \frac{A_2}{A_1} F_{21} = \frac{4\pi r^2}{6L^2} = 0.00545$$

$$Q_{12} = \sigma A_1 (T_1^4) F_{12} = 6L^2 (0.17 \times 10^{-8}) (1000^4 - 530^4) \cdot 0.00545 = 4.3 \text{ BTU/hr}$$

7. 4.5. Ejemplo 7.6.

Determinar la transferencia de calor entre dos superficies negras rectangulares paralelas y opuestas separadas por 6 ft. con áreas iguales de 6 y 4 ft. La placa 1 se encuentra a 1200⁰R y la 2 a 1000⁰R.

Puesto que las áreas son iguales, el teorema de reciprocidad resulta en que $F_{12} = F_{21}$.

En este caso F_{12} es función de $\beta=1$, $\gamma=2/3$, dando $F_{12} = 0.15$.

$$Q_{12} = \sigma A_1 (T_1^4 - T_2^4) F_{12} = Q_{12} = \sigma A_2 (T_1^4 - T_2^4) F_{21}$$

$$Q_{12} = (0.15)(4 \times 6)(0.17 \times 10^{-8})(1200^4 - 1000^4) = 6,625 \text{ BTU/hr}$$

7.5. Radiación entre cuerpos grises.

Considerar un cuerpo no negro (gris) que emite radiación dentro de una cavidad 2 con paredes a temperatura constante. En este caso:

$$Q_{12} = e_1 A_1 \sigma (T_1^4) \quad (7.61)$$

donde Q_{12} es el flujo de energía emitido y e es la emisividad del cuerpo gris. El flujo absorbido en la cavidad es:

$$Q_{21} = a_1 A_1 \sigma (T_2^4) \quad (7.62)$$

El flujo neto es, por lo tanto:

$$Q_{12} = \sigma A_1 (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \quad (7.63)$$

en donde F_{12} es igual a 1 ya que la superficie A_1 se asume convexa y no intercepta a ninguna de sus propias radiaciones. Como $a_1 \approx e_2$ a la temperatura T_2 , definimos el flujo J_i para cada superficie A_i como la suma de los flujos emitidos y reflejados desde A_i . El flujo neto de A_i hacia A_k se puede expresar como

$$Q_{ik} = A_i F_{ik} (J_i - J_k) \quad (7.64)$$

donde, si I_i es el flux incidente:

$$J_i = (1 - e_i) I_i + e_i \sigma T_i^4 \quad (7.65)$$

y $1 - e_i$ es la fracción reflejada. Si $e_i = 1$ (cuerpo negro), entonces

$J_i = \sigma T_i^4 = q_i$ que es la ecuación 7.57 para un cuerpo negro. Similarmente, la ecuación 7.64 para un cuerpo negro se reduce a la ecuación 7.59.

Podemos representar al flux neto desde A_1 de la ecuación 7.63 como el flux emitido menos el flux que incide sobre la superficie:

$$\frac{Q_i}{A_i} = J_i - I_i \quad (7.66)$$

Substituyendo la ecuación 7.65 en la 7.66 se obtiene:

$$\frac{Q_i}{A_i} = J_i - \frac{J_i - e_i \sigma T_i^4}{1 - e_i} = \frac{e_i}{1 - e_i} (\sigma T_i^4 - J_i) = \frac{\sigma T_i^4 - J_i}{\frac{1 - e_i}{e_i}} \quad (7.67)$$

En el caso de la radiación entre dos superficies infinitas grises, la ecuación 7.67 se puede generalizar a la siguiente expresión:

$$Q_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - e_1}{A_1 e_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - e_2}{A_2 e_2}} \quad (7.68)$$

Si las superficies fueran negras, entonces la ecuación 7.68 se reduce a la 7.59 o 7.63, o al resultado del ejemplo 7.6. Con base a lo anterior, se puede desarrollar una expresión que considere las dos superficies grises paralelas de la misma área cuando una lámina de elevada conductividad se coloca entre las dos placas.

Llamemos a las dos placas grises sistemas 1 y 3, y la placa de en medio el sistema 2. Entonces, el flujo entre 1 y 2, de acuerdo a la ecuación 7.68 ($F_{12} = 1$):

$$Q_{12} = \frac{A\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-e_1}{e_1} + 1 + \frac{1-e_2}{e_2}} \quad \text{y el flujo entre 2 y 3:} \quad Q_{23} = \frac{A\sigma(T_2^4 - T_3^4)}{\frac{1-e_2}{e_2} + 1 + \frac{1-e_3}{e_3}} \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} \text{Sumando: } A\sigma(T_1^4 - T_3^4) &= Q_{12} \left(\frac{1-e_1}{e_1} + 1 + \frac{1-e_2}{e_2} \right) + Q_{23} \left(\frac{1-e_2}{e_2} + 1 + \frac{1-e_3}{e_3} \right) \quad \text{Como} \\ Q_{12} = Q_{23} = Q_{13} \quad \rightarrow \quad Q_{13} &= \frac{A\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\left(\frac{1}{e_1} - 1 + \frac{1}{e_2} \right) + \left(\frac{1}{e_2} - 1 + \frac{1}{e_3} \right)} \quad (7.70) \end{aligned}$$

7.5.1. Ejemplo 7.7.

Predecir la pérdida de calor por radiación y por unidad de longitud de un tubo horizontal con recubrimiento. El diámetro exterior es de 6 in y la temperatura de la superficie externa es de 560°R. Los alrededores se encuentran a 540°R.

La superficie 1 es la del tubo con recubrimiento y el sistema 2 son los alrededores. La ecuación 7.63 es:

$$Q_{12} = \sigma A_1 F_{12} (e_1 T_1^4 - a_1 T_2^4) \quad \text{donde } e_1 = 0.93 = a_1, F_{12} = 1.$$

$$Q_{12} = (0.17 \times 10^{-8}) \left(\frac{\pi}{2} \right) (0.93)(560^4 - 540^4) = 32 \text{ BTU}/\square r$$

7.5.2. Ejemplo 7.8.

La pared de una casa consiste en dos planos paralelos. Las paredes exteriores e interiores tienen emisividades de 0.9 y 0.4, respectivamente. Las temperaturas en verano son de 70 y 120°F. ¿Cuál será el flux de energía de radiación, con y sin una placa de aluminio (como barrera protectora)? Su emisividad es de 0.06.

Sea 1 la pared exterior, 2 la barrera y 3 la pared interior. Sin barrera (ecuación 7.69),

$$\frac{Q_{13}}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1-e_1}{e_1} + 1 + \frac{1-e_3}{e_3}} = \frac{0.17 \times 10^{-8} (580^4 - 530^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.4} - 1} = 22.4 \text{ BTU/hr ft}^2$$

Con barrera (ecuación 7.70)

$$\frac{Q_{13}}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\left(\frac{1}{e_1} - 1 + \frac{1}{e_2} \right) + \left(\frac{1}{e_2} - 1 + \frac{1}{e_3} \right)} = \frac{0.17 \times 10^{-8} (580^4 - 530^4)}{\frac{1}{0.9} + \frac{1}{.4} + \frac{2}{.06} - 2} = 1.65 \frac{\text{BTU}}{\text{hr}} \text{ ft}^2$$

Apéndice A.

Se analizará el problema de las ondas estacionarias en 3 dimensiones, primero en una cavidad rectangular de lados a , b y c . Una onda plana en el espacio está caracterizada por el vector de onda k normal al plano de la onda con 3 componentes k_1 , k_2 y k_3 . Cuando se produce una onda en el interior de la cavidad, se refleja sucesivamente en todas las caras estableciéndose un grupo de 8 ondas que resultan de las combinaciones posibles entre $\pm k_1$, $\pm k_2$ y $\pm k_3$. La interferencia y superposición de estas 8 ondas da lugar a ondas estacionarias si las componentes de k tienen valores apropiados. Estos valores son:

$$k_1 = \frac{n_1\pi}{a}, k_2 = \frac{n_2\pi}{b}, k_3 = \frac{n_3\pi}{c} \quad (\text{A-1})$$

donde n_i son enteros. Como $k = [k_1^2 + k_2^2 + k_3^2]^{1/2}$, entonces

$$k = \pi \left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right]^{1/2}, \quad (\text{A-2})$$

y las posibles frecuencias de las ondas estacionarias en la cavidad son:

$$\nu = \frac{c}{2} \left[\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right]^{1/2}, \quad \text{donde } C \text{ es la velocidad de la luz.} \quad (\text{A-3})$$

Si la cavidad es cúbica, entonces $a = b = c$ en la ecuación 7A-3 y las frecuencias posibles son:

$$\nu = \frac{c}{2a} [n_1^2 + n_2^2 + n_3^2]^{1/2} \rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4a^2\nu^2}{c^2} \quad (\text{A-4})$$

Esta es la ecuación de una esfera con radio $\frac{2\nu a}{c}$. Se puede demostrar que, si el radio es muy grande, el número de combinaciones posibles de n_i es igual al volumen del octante de la esfera (ver figura A-1). Entonces, el número de modos de oscilación de frecuencia ν es:

$$N_\nu = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \left[\frac{2\nu a}{c} \right]^3 = \frac{4\pi\nu^3 a^3}{3c^3} \quad (\text{A-5})$$

Como $a^3 = V$ es el volumen, entonces $n_\nu = N_\nu/V$. Este resultado es válido para ondas longitudinales. Si las ondas son transversales, entonces se tiene para cada modo dos estados de polarización independientes y diferentes, de modo que en este caso:

$$n_{\nu T} = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} \quad (\text{A-6})$$

El número de modos dn en un intervalo de frecuencias $d\nu$ es:

$$dn_{\nu T} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (\text{A-7})$$

La densidad espectral es igual al número de modos de vibración en un intervalo de frecuencias multiplicado por la energía promedio de cada modo, en donde esa energía promedio es kT . Por lo tanto,

$$u(\nu, T)d\nu = kT dn_{\nu T} = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3} d\nu \quad (\text{A-8})$$

$$\text{y así se obtiene la ecuación 7.33: } u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT \quad (\text{A-9})$$

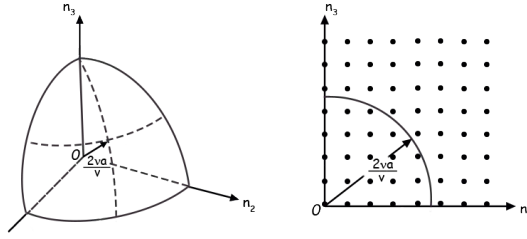


Figura A-1. Octante con radio $2va/C$ ($v = C$) y su proyección en el plano n_2 - n_3 .

A cada conjunto de enteros n_1 , n_2 y n_3 podemos asociar una celda de volumen unidad, como se indica con los puntos.

Apéndice B.

Este desarrollo expone la solución de un oscilador lineal con amortiguamiento, para obtener la energía promedio del proceso (ecuación 7.34).

En presencia de radiación, si suponemos que el amortiguamiento de las oscilaciones es proporcional a $\dot{x}$, la ecuación del oscilador es:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{e}{m} E_{lx} \quad (\text{B-1})$$

donde ρ es el coeficiente de amortiguamiento, e es la carga, y m es la masa del oscilador. E_{lx} es el componente del campo eléctrico en la dirección x . Si este campo oscila con una frecuencia ω y amplitud C_ω , entonces:

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 = \frac{C_\omega}{m} \sin \omega t \quad (\text{B-2})$$

La solución más general es:

$$x = D_w \sin(\omega t + \delta) \quad (\text{B-3})$$

donde:

$$D_w = \frac{C_\omega}{m} [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2]^{-1/2} \quad \text{y} \quad \frac{2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (\text{B-4})$$

Toda carga acelerada linealmente está sometida a una fuerza de amortiguamiento de acuerdo a:

$\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{x} = -2m\rho\dot{x}$, y según la ecuación 7B-3, $\ddot{x} = -\omega^2 \dot{x}$, por lo que el coeficiente de amortiguamiento es:

$$\rho = \frac{1}{12\pi} \frac{e^2}{m\epsilon_0 c^3} \omega^2 = \sigma \omega^2 \quad (\text{B-5})$$

La energía del oscilador es el valor promedio de la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m}{2} D_w^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad (\text{B-6})$$

$$E_p = \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \frac{m}{2} D_\omega^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad (\text{B-7})$$

$$E_\omega(t) = E_c + E_p \quad (\text{B-8})$$

El valor promedio es:

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{1}{T} \int_T^{T+T} E_\omega(t) dt \quad (\text{B-9})$$

Como:

$$\frac{1}{T} \int_T^{T+T} \cos^2(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{T} \int_T^{T+T} \sin^2(\omega t + \delta) dt = \frac{1}{2}$$

mediante la ecuación 7B-4 se obtiene:

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{C_\omega^2}{4m} \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2} \quad (\text{B-10})$$

Finalmente, la energía promedio total es:

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \langle E_\omega \rangle d\omega = \frac{1}{4m} \int_0^\infty C_\omega^2 \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2} d\omega \quad (\text{B-11})$$

Como el integrando tiene un máximo muy centrado en $\omega = \omega_0$ pues $\rho^2 \omega^2 \ll 1$, permite aproximar $C_\omega^2 = C_{\omega_0}^2$ y $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$ para tener:

$$\frac{C_{\omega_0}^2}{8m} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\sigma \omega_0^2)^2} \quad (\text{B-12})$$

Se considera que:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi \quad (\text{B-13})$$

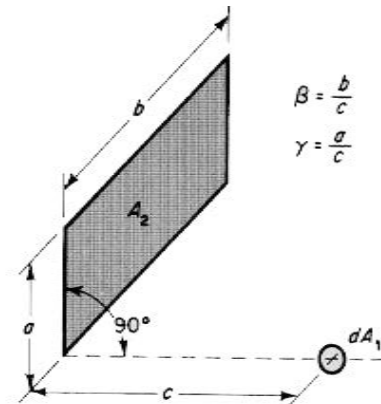
para obtener:

$$\langle E \rangle = \frac{C_{\omega_0}^2 \pi}{8m \sigma \omega_0^2} \quad (\text{B-14})$$

que es la ecuación 7.34.

Apéndice C.

Figura C-1. Configuración de una fuente puntual esférica y un rectángulo.



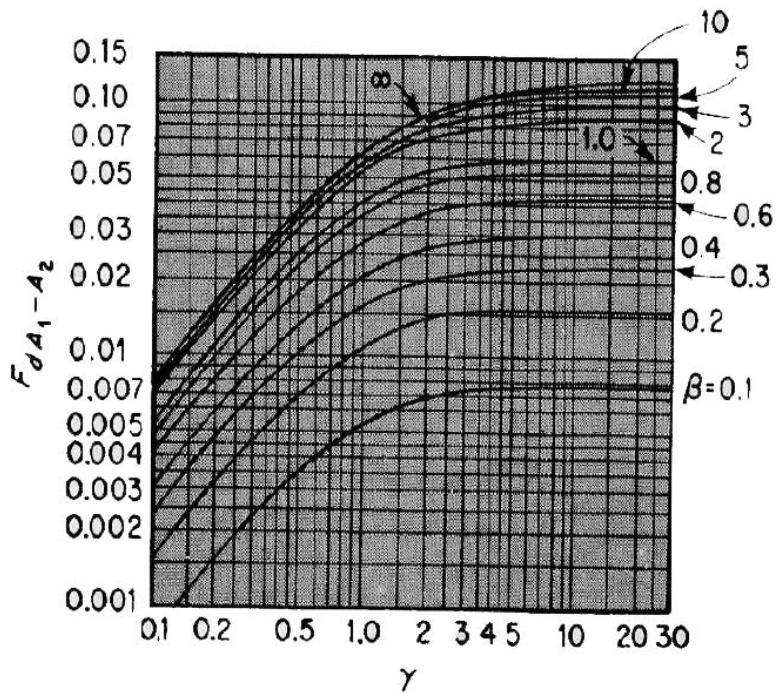


Figura C-2. Factores de configuración: fuente puntual esférica con un rectángulo plano.

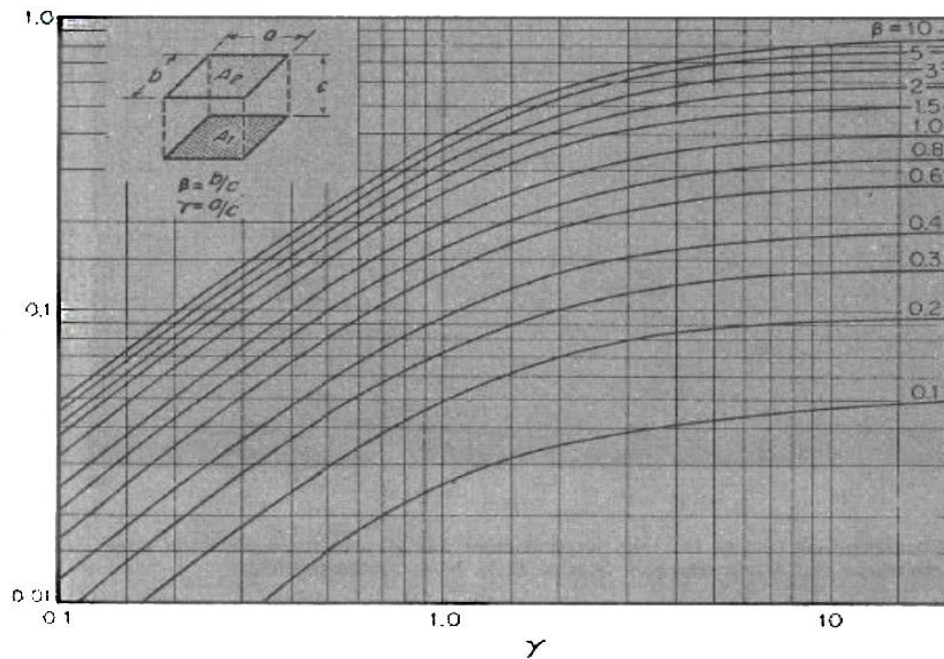


Figura C-2. Factores de configuración para dos paralelas idénticas, directamente opuestas a las placas planas.

Referencias

- [1] R.B. Bird, W. E. Stewart, E. N. Lightfoot, "Transport Phenomena", 2a Ed., Wiley & Sons, 2002.
- [2] J.C. Slattery, "Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua", McGraw Hill, 1981.
- [3] C. O. Bennett, J. E. Myers, "Momentum, Heat and Mass Transfer", 3rd Ed., McGraw-Hill, USA, 1982.
- [4] J. R. Welty, C. E. Wicks, and R. E. Wilson, "Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer", 4th Ed., John Wiley & Sons, USA, 2000.
- [5] W.M. Rohsenow, H.Chi, "Heat, Mass and Momentum Transfer", Prentice Hall, 1961.
- [6] L. E. Sissom, R. Pitts, "Elements of Transport Phenomena", Mc Graw-Hill, 1972.
- [7] L. Theodore, "Transport Phenomena for Engineers", International Textbook Co., 1971.
- [8] J.M. Smith, H.C. Van Ness, "Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics", 3rd Ed., McGraw-Hill, 1975.
- [9] R. E. Balzhiser, M.R. Samuels, J.D. Eliassen, "Chemical Engineering Thermodynamics", Prentice-Hall, 1972.
- [10] A. Bejan, "Convection Heat Transfer", Wiley & Sons, 1984.
- [11] L. García Colín, "Introducción a la Termodinámica Clásica", 3a Ed. Trillas, 1986.

